191 ~~J. XIV 47.~~

Höhere Geometrie (Kegelschnitte)

Ma. 191.

Abhandlung
über die
Kegelſchnitte
über
verſchiedene andere krumme Linien der Alten
und der Cycloide
nebſt einer practiſchen Anwendung derſelben
auf Künſte und Wiſſenſchaften.

---

nach dem franzöſiſchen
des Herrn de la Chapelle
vom

Herrn Hofrath Böckmann
ordentlichem Lehrer der Mathematick und Phyſick,
des academiſchen Gymnaſiums zu Carlsruhe Ephorus,
der Londner Societät der Künſte und Wiſſenſchaften,
der churfürſtl. Mainz. und Baieriſch. Akad. der Wiſſenſchaften,
der Berliner naturforſchenden Geſellſchaft und der
phyſiſchen Societät in Graubünden
Mitglied.

Mit II Kupfertafeln.

Carlsruhe, 1791
verlegt von Michael Macklot
Markgräfl. Badiſchem Rath und Hofbuchhändler.

Vorrede.

Wären für die mathematiſchen Wiſſenſchaften in Teutſchland nicht ſo glückliche Zeiten, als itzt, da faſt überall weiſe Regenten ihre aufblühende Jugend in denſelben eingeweiht wiſſen wollen; da man dieſe ſo gemeinnützigen Kenntniſſe nicht mehr bey einer einzigen Claſſe von Gelehrten, die ihr ganzes Leben denſelben gewidmet haben, zu finden glaubt; ſondern daß man ſie trotz allen Vorurtheilen der Unwiſſenheit auch von jedem zukünftigen Gottesgelehrten, Juriſten und Arzt mit Recht fordert; itzt, da man ſie einem jeden Künſtler zu Begleiterinnen wünſcht, und ſie nicht mehr aus den Palläſten und den Cirkeln der Groſſen entfernt, ſo würd' ich vielleicht niemals die Entſchlieſſung gefaßt haben, dieſe Abhandlung eines anſehnlichen fran-

zöſiſchen

zöſiſchen Gelehrten, im teutſchen Gewande meinen Landesleuten zu übergeben.

Allein itzt, da man in mehrern Gegenden Teutſchlands die vortreflichſten Veranſtaltungen vorkehrt, die mathematiſchen Kenntniſſe zu einer längſt gewünſchten Allgemeinheit zu bringen; itzt, da man ſelbſt auf niedern Schulen und Gymnaſien ſie bis zu einer gewiſſen Höhe treibt und da junge Studirende ſich nicht mehr für algebraiſche Formeln als für Zaubercharactere fürchten; itzt, da an ſehr vielen Orten die ſo nützlichen Schulen für angehende Profeßioniſten und Künſtler errichtet ſind und noch jährlich in gröſſerer Anzahl eröffnet werden: Itzt, glaub' ich, iſt ein Zeitpunkt, da man vielleicht mit einiger Zuverſicht und mit nicht betrüglicher Hoffnung einer guten Aufnahm' es wagen darf, ſeinen Nebenbürgern ein Buch in die Hände zu liefern, wodurch ſie einige Stufen näher zu den Geheimniſſen der Mathematick geführt werden.

Zwey Dinge können uns, wie ich glaube, rechtfertigen, wenn wir Schriften der Ausländer unſern Landsleuten bekannt machen. Nämlich die innere Güte derſelben ſelbſt, und das Bewuſztſeyn, daß noch kein Buch von

der

der Art in unſerm Vaterland anzutreffen ſey. Wo ich nicht irre, ſo haben hier beyde Gründe ſtatt. Denn dieſe Abhandlung iſt gründlich, gut, unterrichtend und überhaupt ſo ausgearbeitet, daß auch ſchwerere Sachen durch eine angenehme Wendung das Anſehen des Leichten erhalten. Der Verfaſſer verbindet in ſeinem Vortrag die ſynthetiſche und analytiſche Methode auf eine ſchickliche Weiſe. Er gibt dem jungen, noch wenig gebildeten Geiſt eine gewiſſe glückliche Richtung und iſt durchgehends ein Muſter, wie man an ſich trockne theoretiſche Wahrheiten durch die nutzbarſten Anwendungen auf andre Wiſſenſchaften und Künſte wichtig machen ſoll. Dieſer Tractat hat in Frankreich den ganzen Beyfall der Akademie der Wiſſenſchaften erhalten und ein **Alembert** und **Caſſini**, erheben ihn beyderſeits mit verdienten Lobſprüchen. Jener preiſet dieſe Schrift in der allgemeinen Encyclopaedie als eine der beſten in dieſer Art an, und beruft ſich deswegen auf das ganze franzöſiſche Publikum; dieſer empfiehlt ſie als ein Buch, welches wegen ſeiner Gründlichkeit, Ordnung, Leichtigkeit und Schönheit nothwendig gefallen muß. Ich wünſche und hoffe, daß meine Landsleute nach einer aufmerkſamen Durchleſung deſſelben ein ähnliches Urtheil fällen mögen!

Allein

Allein ſollte denn Teutſchland, dieſe ſo fruchtbare Mutter großer Genies, dieſe Ernährerinn ſo vieler noch lebenden und ſchäzbaren Geometer, dieſe Beſchützerinn und Verpflegerinn aller Wiſſenſchaften; ſolte dieſes unſer väterliches Teutſchland bey ſeiner ſo anſehnlichen Menge von Schriftſtellern nicht auch Männer aufſtellen können, die dieſe Materie gut bearbeitet hätten? Ohne Zweifel! Wir haben ja **Tſchirnhauſen, Leibnize, Euler, Hauſen, Segner, Käſtner, Karſten, Huben, Wolfe, Tempelhofe, Makos** und ſehr viele andre verdiente Männer, die auf eine glückliche und gründliche Weiſe von dieſen Linien gehandelt haben. Allein bey einer andern Abſicht, die dieſe groſſe Männer hatten, mußten nothwendig ihre ſo vortreflichen Arbeiten auch ein anders Anſehen, als dieſe Abhandlung bekommen. Ich kenne wenigſtens noch kein teutſches oder lateiniſches Buch, welches in der Anlage, Ausführung, und dem ganzen Zweck mit dieſem Werk zu vergleichen wäre. = = = Ich würde vielleicht nicht zu entſchuldigen ſeyn, wenn ich mich bey meinen Landsleuten noch weiter entſchuldigen würde. — — Was aber die Ausführung dieſes Unternehmens betrift, ſo iſt es vielleicht mehr nöthig. Ich kenne alle die ſchweren

Pflichten

Pflichten eines Ueberſetzers, der auf einigen Beyfall Anſpruch machen will. Er muß beyder Sprachen mächtig ſeyn; er muß ſeinen Autor ſtudirt haben und die Gedanken deſſelben mit aller Treue überliefern. Ich habe mich bemüht dieſe Pflichten zu erfüllen. Mögt' ich einigermaſſen glücklich geweſen ſeyn! Billige Richter werden kleine Fehler, die mir gewiß bey aller Vorſicht dennoch vielleicht entwiſcht ſind, mit Gütigkeit überſehen, und auf eine freundſchaftliche Art mich davon belehren. Von den Anmerkungen und Zuſätzen, die theils zur Erläuterung für gewiſſe Leſer, theils zur weitern Ausführung einiger Materien, theils zur Aufklärung der Geſchichte eines Satzes, theils zur Berichtigung des Vortrags in ziemlichen Anzahl von mir hinzugeſetzt ſind, wünſch' ich, daß ſie vielen angenehm und nützlich, niemand aber zu einiger Beſchwerde gereichen mögen. Ich will den Werth derſelben nicht beſtimmen. Solte wohl jemals ein Verfaſſer ein vollkommen unpartheiſches Urtheil über ſeine Arbeit fällen können? Und fällt' er es würklich, wird das Publikum ihm glauben? Daß ſie mir den Umſtänden angemeſſen geſchienen, werden meine Leſer urtheilen können, weil ich ſonſt ſehr ſträflich gehandelt hätte, ſie ihnen vorzulegen.

Ich

Ich übergebe demnach dieſes Buch mit einer Freimüthigkeit dem teutſchen Publicum; Inſonderheit jungen Gelehrten und Künſtlern, die etwa durch eignen Fleiß ſich an die ſo nützliche Unterſuchung der Eigenſchaften dieſer krummen Linien wagen und zu noch höhern Kenntniſſen ſich vorbereiten wollen. Ich empfehl' es ihnen als ein Werk, welches auch bey mittelmäßigen Fähigkeiten und bey keiner andern Erforderniß als einer Kenntniß der erſten Gründe der Aritmetick, der Geometrie und Trigonometrie ihre Wünſche erfüllen wird. Ich empfehl'es ihnen aber auch alsdenn noch zum nützlichen Nachleſen, wenn ſie gleich der mündlichen Unterweiſung anderer Gelehrten genieſſen können.

Vorrede des Verfaſſers.

Es iſt durchaus nothwendig dieſelbe durchzugehen, um zu wiſſen, wie man dieſes Werk leſen muß und in welchem Geiſte es aufgeſetzet worden ſey. Man wird darinn eine Entwickelung deſſelben finden, die in dem Verſtande des Leſers einen vollkommenen Abriß davon zu bilden fähig iſt.

Es gibt zwey Mittel die Gränzen der Künſte und Wiſſenſchaften zu erweitern. Sie ſind dieſe, ſelbſt neue Entdeckungen zu machen, und das Publicum in dem Beſitze derſelben zu ſetzen. Dieſe zwey Mittel, die der erſten Vermuthung nach

zugleich ſollten hervorgebracht ſeyn und mit einander mit gleichen Schritten fortgehen, laſſen oft groſſe Zwiſchenräume zwiſchen ſich.

Die wahren Erfinder, deren Anzahl in den Augen derjenigen, die die Verbindung der Produkte überſehen, ſehr klein iſt, überſpringen zuweilen unermeßliche Räume und kommen zu Wahrheiten, die für gemeine Menſchen unerſteigbar und gewiſſermaſſen ſchreklich ſind, wenn man, ſo zu ſagen, keine Brücke bauet, die ſie verbindet und den tiefen Abgrund, der ſie von einander trennt, bedeckt.

Oefters muß man es allein dem Undank anderer Menſchen zuſchreiben, wenn groſſe Geiſter über ihre Werke keinen hinreichenden Grad des Lichts fallen laſſen. Das, was mit leichter Mühe zu begreifen iſt, ſcheint vielen Leuten auch im Erfinden wenig gekoſtet zu haben. Sie meſſen die Achtung oder Hochſchätzung, die ſie für Erfinder haben müſſen, nach der gröſſern oder geringern Beſchwerlichkeit, die ſie gehabt

haben, die Gedanken derſelben zu verſtehen Dieſes iſt der Grund, warum ſehr groſſe Leute manchmal mit Fleiß in ihren Werken Dunkelheit gelaſſen und der Ausbreitung der Wiſſenſchaften Hinderniſſe gelegt haben.

Carteſius iſt hiervon ein Beyſpiel, das ich nicht ohne Betrübniß anführe. Vielleicht iſt niemals ein Mann geweſen, der geneigter war als er, grade zu zum Vortheil des menſchlichen Geſchlechts zu arbeiten. Allein verfolgt von ſeinen Feinden, die begierig ausſprengten, daß ſeine neuen Ausſichten in die Mathematik, Philoſophie und vor allen in die Phyſik nicht das geringſte ſehr auſſerordentliche hätten und daß man in dieſelben ſehr leicht hinein dringen könne, ſo wenig man auch vom Denken Profeſſion mache, verfolgt, ſage ich, von dieſen ſeinen Feinden, änderte er ſein Bezeugen ohne ſeine Geſinnungen zu ändern.

Da er einſahe, daß die wenige Hochachtung, die man ſeinen Werken ertheilte, allein von der

groſſen Deutlichkeit herkäme, die er bis hieher über dieſelben ausgebreitet hatte, ſo nahm er ſich vor in der Folge damit etwas weniger freygebig zu ſeyn. Seine Geometrie gab ihm Gelegenheit genug darzu. Er ließ darinn ſo viele Sachen weg, und zeigte ſo viele andere von ferne daß ſeine Feinde geſtehen mußten, daß er ihnen noch niemalen als ein ſo groſſer Geometer vorgekommen wäre.

Inzwiſchen machten ſie ihm, von der Schwürigkeit ſie zu verſtehen überwunden, ſeine auſſerordentliche Kürze zum Vorwurf, ohne zu erwägen, daß der Antrieb zu ihrer Beſchuldigung die Haupturſache und vieleicht der einzige Grund ihrer Hochachtung ſey.

Dieſer offenbare kleine Unwille, welcher in Carteſens Seele eindrang, hatte für den Fortgang der Wiſſenſchaften verdrüßliche Folgen. Die beſten Köpfe, die im Stande waren durch ihre eigene Unterſuchungen dem menſchlichen Geſchlechte Dienſte zu leiſten, gebrauchten alles

ihr

ihr Nachdenken, um nur in die Unterſuchungen dieſes vortreflichen Geometers einzudringen. Seine Geometrie, die man heut zu Tage in der Zeit von einem Jahre durch Hülfe der Elemente und der Algebra verſtehen kann, war während mehr als 100 Jahren der Gegenſtand der Erläuterungen der ſtärkſten Mathematiker, die auf ihm folgten.

In den erſten Zeiten, da ſie erſchien, waren nicht mehr als zweene Männer in Europa, nämlich der Herr von Beaune und Schooten, die im Stande waren, ſie zu verſtehen. (*a*)

Dieſes ſind nicht die einzigen Urſachen die den Fortgang der Wiſſenſchaften hemmten. Seit ungefehr 150 Jahren hat man ſie zu den feinſten Speculationen erhoben; man hat es aber zu ſehr vernachläſſigt zu zeigen, wie ſie zur Vollkommenheit der Künſte etwas beytrügen.

Wenn

(*a*) Man ſehe den Baillet im Leben des Carteſius.

Wenn die Menſchen ſich allein auf die Curioſitát und auf das bloſſe Ráſonnement einſchránkten, ſo würde die Theorie hinreichend ſeyn. Sie haben aber noch andere Bedürfniſſe, und die mehrſten Menſchen werden nur von materiellen und ſinnlichen Objekten ſehr gerühret. Man muß ſie alſo mit dem feſſeln, was am mehrſten mit ihrem Charakter übereinkommt. Nach einem 3. oder 4jährigem tiefen Studieren der höheren Geometrie finde ich nichts ſo demüthigend, als ſich noch fragen zu können, zu welchem Nutzen ſie im gemeinen Leben gereiche? Wie kann man denn andere Leute davon überzeugen? und wenn ich ihnen nicht nüzlich bin, kann ich alsdenn hoffen, daß ſie mir für meine Arbeit Dank wiſſen werden?

Man findet inzwiſchen doch in den Büchern, die zur Unterweiſung dienen, faſt nichts, welches grade zu auf die Künſte angewendet wáre. Die Herren de la Hire, Guisnee und de l'Hopital haben über die Kegelſchnitte gearbeitet. Ihre

Werke ſind ohnfehlbar vortreflich, aber ſie enthalten nichts als eine bloſſe Theorie. Junge Leute fangen die höhere Geometrie durch dieſe Männer an. Auf dieſe Art werden ſie durch die Schwere, Trockenheit und ſcheinbare Unfruchtbarkeit derſelben abgeſchrecket, laſſen ſie fahren und vermuthen nicht einmal die Unachtſamkeit oder wenige Geſchicklichkeit der Verfaſſer. Sie halten ſich für unvermögend, da ſie doch nur übel angeführet worden ſind.

Unter dieſe Hinderniſſe, die die Wiſſenſchaften nicht anders als langſam fortſchreiten laſſen, zähle ich als eines der ſtärkſten dieſes, daß man nicht hinlänglich die Gelegenheit, die Stuffen oder die Kette zeigt, wodurch man zu dieſen Entdeckungen gekommen iſt. Auf die Art, wie man ſie gemeiniglich vorträgt, ſolte es ſcheinen, daß ſie auf einmal vom Himmel heruntergekommen wären. Wer unterſteht ſich aber hierinn mit Recht zu verlangen, daß man begeiſtert ſey! Den Uebergang und die Stuffen die zu einem

Produkte führen beobachten laſſen, heißt das Genie ſelbſt entdecken, welches dabey geherrſcht hat. Hierdurch gewöhnt man ſich die Verknüpfungen zwiſchen geringen Sachen und den wichtigſten zu bemerken, und man iſt mehr durch die Vernunft als durch das Gedächtniß geleitet, oft glücklich genug, das Ende der Unterſuchung zu begreifen, weil man den Anfang davon wohl eingeſehen hat.

Wenn man die Höhe betrachtet, zu welcher die höhern Wiſſenſchaften ſeit zwey Jahrhunderten ſich erhoben haben, ſo kann man nicht zweyfeln, daß es daher komme, weil einige Gelehrte ſich Mühe gegeben haben, die Wege zu denſelben eben zu machen. Mehrere Perſonen ſind in dieſelben hineingedrungen, die Ausſichten haben ſich vermehrt, und es iſt geſchehen, was man natürlicher Weiſe vermuthen mußte, daß die Entdeckungen, indem ſie ſich ausbreiteten, zugleich neue hervorbrachten. Folglich heißt, Wiſſenſchaften zu einem höhern Grade bringen, ſo viel, als an ihrer Ausbreitung arbeiten.

Nachdem ich ſehr ernſtlich daran arbeitete die verſchiedenen Urſachen, die den Fortgang der Wiſſenſchaften aufhalten können, kennen zu lernen, ſo habe ich die Anzahl derſelben zu vermindern geſucht; und in dieſer Abſicht hat ſich mein Sujet mir unter drey Geſichtspunkten dargeſtellet, welche mir ſich einander wechſelsweiſe zu unterſtützen ſchienen, die Theorie der krummen Linien, ihr Gebrauch in der Kunſt und die Geſchichte von ihrem Urſprung und Fortgange. Die Theorie wird darinn das Licht ſeyn, der Gebrauch derſelben die Frucht und die Geſchichte das Vergnügen.

Dieſe allgemeine Einrichtung ſchien mir nöthig zu ſeyn. Man ſiehet nur gar zu viele Leute, die ſich von dem Studieren der krummen Linien unter dem Vorwande los machen, weil ihr Nutzen ſehr eingeſchränkt oder vielmehr weil ihre Anwendung im geringſten nicht offenbar ſey. Dieſer Einwurf fällt hier weg. Man gebraucht ſie in Ueberfluß und diejenigen, bey deren Er-

ziehung dieſes Studium vorkommen muß, kön-
nen ſich unter dieſem Vorwande nicht mehr dem-
ſelben entziehen. Setzen ſie die Trockenheit einer
ſolchen Arbeit entgegen, ſo habe ich mich bemü-
het durch die Geſchichte der Wiſſenſchaften und
Künſte und durch kleine Abhandlungen über ih-
re erſten Erfinder, derſelben vorzubeugen. In
den ernſthaften Wiſſenſchaften, wo der Geiſt ge-
ſpannet iſt, iſt ein Zug aus der Geſchichte ein
Ort der Ruhe, an welchem man ſich auf dem
Wege erfriſchet, und wo man neue Kräfte für
den Ueberreſt der Reiſe ſammlet.

Dieſes iſt mein Plan. Nun ſehe man auch
die Ausführung deſſelben.

Wenn ich mich hier bey der Theorie einer
krummen Linie befinde, ſo beweiſe ich nur die-
jenigen Eigenſchaften, die zum Verſtande ihrer
Anwendung auf die Künſte nöthig ſind.

Alles, was mir nur curiös und zu gleicher
Zeit zu ſchwer ſchien, oder wovon ich glaubte,
daß es nur ein ſehr entferntes Verhältniß mit

mei-

meinem Plan hätte, alles dieſes habe ich gänzlich unterdrückt. Man hat ſo viele nützliche Sachen, den Geiſt zu üben; Warum ſoll man ihn mit überflüßigen Dingen beſchäftigen?

Dieſe Erſparung der Zeit und der Kräfte des Verſtandes iſt nicht wenig durch die Aufmerkſamkeit unterſtützet worden, die ich gehabt habe, alle Sätze unmittelbar aus einander her zu leiten, ohne das geringſte errathen zu laſſen. Mir iſt es jederzeit ſo vorgekommen, daß es bey den Erklärungen ſchwerer Sachen genug errathen ſey, wenn man ſie verſteht.

Ich ſetze nichts als die Kenntniß meiner Inſtitutionen voraus (*a*) wenn ſich eine Wahrheit zufälliger Weiſe darbietet, die man nicht in

---

(*a*) Dieſe Institutions de la geometrie, die dem Herrn Verfaſſer wegen der Deutlichkeit, mit welcher ſie aufgeſetzet und wegen den ſchönen Anwendungen womit ſie überal durchwürket und wegen der Ordnung und Gründlichkeit mit welcher ſie ausgearbeitet ſind, Ehre machen, lehren auf eine angenehme Art angehende Schüler der Mathematik, die erſten Gründe der Arithmetik, Algebra,

in den gewöhnlichen Anfangsgründen der Geometrie findet, ſo beweiſe ich ſie unten auf der Seite in einer Note auf das genaueſte. Und weil ich ſowohl die Rechnung der Potenzen in Anſehung der Exponenten als auch die Wurzel-Rechnung nöthig gehabt habe, ſo habe ich eine hinlängliche Erklärung derſelben zu Anfange dieſes Traktats vorangeſchickt. Dieſe Rechnungen ſchienen mir nicht auf eine hinlänglich einfache Art abgehandelt zu ſeyn. Hier iſt eines aus dem andern mit einer auſſerordentlichen Leichtigkeit hergeleitet und zwar allein durch die Verwandlung der Wurzelzeichen in ſimple Exponenten. Dieſes Buch hat alſo nur ſich ſelbſt nöthig um verſtanden zu werden.

Es wird aber um ſo viel bequemer durch diejenigen die der öffentlichen Erziehung genieſ-

ſen,

---

bra, Geometrie und Trigonometrie. Sie machen 2 mäßige Oktavbände aus. Mit welcher Begierde ſie aufgenommen worden ſind, zeigt unter andern dieſes, daß ich ſchon die 4te Ausgabe davon in Händen habe. B.

ſen, geſchehen, weil ich durch Sternchen oder durch beſondere Nachrichten angezeiget habe, was ſie ohne Nachtheil übergehen können. Diejenigen z. E. die ſich nicht darum bekümmern, die Artillerie oder die Berechnung der Minen zu verſtehen, haben diejenigen Sätze nicht nöthig, worauf die Erkenntniß dieſer Künſte gegründet iſt. Indem man ſie davon benachrichtiget, ſo kürzet ſich dieſes Werk ab und man erſparet die Zeit.

Die Newtonianiſchen Inſtitutionen vom Herrn Sigorgne ſchienen mir geſchikt zu ſeyn ſich immer mehr zu einem Platze in den Lehrbüchern der Philoſophie zu empfehlen. Ich habe dahero geglaubet den öffentlichen Lehrern eine Gefälligkeit zu erzeigen, wenn ich alle Sätze von den Kegelſchnitten, die zum Grunde in dieſen Inſtitutionen liegen, mit einer gehörigen Weitläuftigkeit bewieſe. Allein man kan ſie übergehen, wenn man andere Ausſichten hat.

Sie

Sie gehören nicht zum Hauptwerke. Sie ſind nur als Zuſätze anzuſehen, deren Unterdrückung im ganzen Gebäude nichts zerſtöhret.

Unabhänglich von dieſer Anordnung der verſchiedenen Theile meiner Arbeit in Abſicht auf die Theorie wird man hier eine neue allgemeine Methode antreffen, die Tangenten der krummen algebraiſchen Linien, wovon man die Gleichungen hat, zu finden. Ingleichem eine neue Anwendung der Methode der Gränzen (Methode des limites) auf die Quadratur der krummen Linien. Dieſe leztere iſt wenigſtens ſo einfach und ſo geſchwinde als die von der Integral-Rechnung, ohne die Dunkelheit derſelben zu haben.

Wenn alle dieſe Eigenſchaften mein Werk ſchon von allen denjenigen unterſcheiden, die ihm vorhergegangen ſind, ſo wird die Art, deren Theorie hier angewendet iſt, ihr einen neuen Grad der Unterſcheidung geben

Ich

Ich gehe hier beſtändig bis auf die erſten Anfangsgründe derjenigen Kunſt, welche in meinen Plan gekommen iſt, zurük. Die Zweifel ſind zerſtöhret, die Erfahrungen der Prüfung unterworfen, das geringſte Gewölke zerſtreuet. Es ſind in den höhern Wiſſenſchaften noch ſo viele Dinge zu erfinden oder vollkommener zu machen, daß ich das Bezeigen dererjenigen nicht billigen kann, die dem Genie ihrer Leſer in ihren Erläuterungen irgend etwas überlaſſen. Das heißt einem unnützer Weiſe die Nothwendigkeit auf eine gewiſſe Art erſt zu erfinden auflegen, was ſchon entdecket iſt. Der Weg der Wiſſenſchaften iſt lang und das Leben kurz. Laſſet uns jenen erleichtern und machen, daß wir in dieſem gleich zum Genuſſe kommen. Das heißt den Weg abkürzen und das Leben erweitern.

Auf dieſe Art iſt jede Anwendung ein vollſtändiger Traktat geworden. So iſt die Theorie und Practik vom Bombenwerfen mit allen nothwendigen Kleinigkeiten bewieſen worden.

den. Man hat hier keine Aufloͤſung von irgend einem Problem vergeſſen und um ſeine Theorie zu beſtaͤtigen oder auf die Schwuͤrigkeiten die man hier entgegenſetzt zu antworten, hat man eine groſſe Anzahl von Erfahrungen beygebracht. Dieſe waren allein in dieſer Abſicht gemacht, um die Reſultate daraus mit denjenigen zu vergleichen, die man aus der Geometrie ziehet.

Die Uebereinſtimmung davon iſt auch ſo vollkommen als moͤglich. Das hieſſe folglich das Intereſſe der Societaͤt vergeſſen, wenn man ſich noch an dem ſimplen Gerathewohl halten wollte.

Man iſt auf die naͤmliche Art in Abſicht auf die Berechnung der Ausleerung der Minen verfahren. Man hat beſtaͤndig vorausgeſetzet, daß man mit Leſern rede die nur das verſtehen, was man ſie verſtehen laͤßt. Man iſt gar nicht zu genau in dem geweſen was die vortheilhafteſte Conſtruction der Sprachroͤhren, Hoͤrroͤhren und der Brennſpiegel, der Seitenmauren der

Ca-

Camine zur Heitzung der Zimmer und einiger auſſerordentlichen Widerhalle, die etwas wunderbares enthalten, betrift.

Alle dieſe Anwendungen ſind eine Folge von den Eigenſchaften der Parabel. Man hätte ſehr gewünſchet, nach Maaßgabe, wie man die theoretiſchen Wahrheiten entdekt hätte, auf der Stelle die Anwendung davon in der Ausübung zu zeigen. Allein wie es ſehr viele Sätze gibt, die keinen andern Nutzen haben, als daß ſie zum Beweiſe derjenigen Wahrheiten dienen, die unmittelbar auf die Kunſt anzuwenden ſind, ſo hat man einer andern Methode folgen müſſen. Der groſſe Abſtand, den man zwiſchen den mehrſten theoretiſchen Wahrheiten, wo eine von der andern abhanget, würde gehabt haben, würde ohnfehlbar in dem Verſtande der Leſer den Faden gebrochen haben. Dieſes iſt die Urſache warum man den Nutzen und die Anwendungen von einer krummen Linie nur erſt als-

denn gezeigt hat, nachdem man die ganze Theorie, die man nöthig hatte, vorher erklärt hatte.

Dieſes iſt der nämliche Gang in der Ellypſe und Hyperbel. Man gibt zuerſt die Theorie und wendet hernach dieſe krummen Linien auf die Dioptrik an oder auf die Kunſt Gläſer zu ſchleifen, die theils geſchickt ſind, die Fehler der Augen zu verbeſſern, theils deren Stärke zu vermehren. Man kommt daſelbſt wieder auf die Sprachröhren und Hörröhren. Man zeigt, daß dieſe Inſtrumente viel vollkommner ſind, wenn man jene aus einer Ellypſe und Parabel zuſammenſetzet, dieſe aber blos Ellyptiſch macht. Man erkläret bey dieſer Gelegenheit die Echo, die ſich nur bey einer ſchwachen Stimme, wie in den ſo genannten Sprachgewölben vernehmen laſſen. Auch ſind die Brenngläſer, die durch die Refraction würken, wie auch die Art, den körperlichen Innhalt von gedruckten Gewölbern zu finden, nicht vergeſſen worden. Die ganze Lehre von der Ellypſe iſt durch eine

Ab-

Abhandlung geſchloſſen worden, worinn man zeigt, daß Carteſius der wahre Erfinder der Dioptrik ſey. In einer Abhandlung am Ende der Hyperbel unterſuchet man die Arten von Brennſpiegeln, deren ſich Archimedes und Proklus haben bedienen können um diejenigen wunderbaren Effekte hervorzubringen, die einige Geſchichtſchreiber ihnen zueignen.

Von den 4 nachfolgenden krummen Linien der Ciſſoide, Conchoide, Quadratrix und Spiral-Linie des Archimeds macht man in den nützlichen Künſten wenig oder gar keinen Gebrauch. Man hat ſich vorgeſetzet nur diejenigen Eigenſchaften derſelben zu erklären, die zum Verſtande deſſen, was zu ihrer Erfindung Gelegenheit gegeben hat, nothwendig ſind. Und hier ſolte ſich dieſe Abhandlung endigen, das heißt, man ſolte nur der alten krummen Linien Erwähnung thun. Man hatte es ſich vorbehalten von den neuen krummen Linien, die in der Kunſt brauchbar ſind, in einem andern Werke zu re-

den, wenn dieſes von dem Publicum wohl aufgenommen würde und wenn ſich keine andere Umſtände entgegen ſetzten (a). Allein viele Perſonen

---

(a) Der allgemeine Beyfall des Publicums, den dieſes ſchöne Buch mit ſo vielem Rechte verdienet, hätte den Herrn Verfaſſer ſehr ſtark reizen können, ſo viele Wünſche zu erfüllen und die begierige Welt mit einer ähnlichen Abhandlung über die neuen krummen Linien zu beſchenken. Es iſt aber bisher noch nicht geſchehen. Und man erwartet noch mit einem eben ſo ſehnlichen Verlangen ſeine in dieſem Werke einigermaſſen verſprochene weitläuftigere und genaue Unterſuchung der Rechnung der Gewölber. Da ich die Ehre habe, mit dieſem gelehrten Abt in einem freundſchaftlichen Briefwechſel zu ſtehen, ſo kann ich es hier öffentlich verſichern, daß man wenige Hofnung habe, dieſe gewünſchten Ausarbeitungen von ſeiner Feder zu erhalten. So druckt ſich dieſer liebenswürdige Mann in einem ſeiner Briefe an mich ſelbſt über dieſe Materie aus: „Meine ſitzende Lebensart „und viele Meditationen haben meine Geſundheit gänz„lich zu Grunde gerichtet, und ich bin genöthiget „worden, ſeit einigen Jahren durchaus die Bearbeitung „der mathematiſchen Wiſſenſchaften liegen zu laſſen. Das „heißt in Wahrheit allen Vergnügungen meines Lebens „entſagt haben: Aber ſie waren Syrenen, die an meinem „Grabe arbeiteten. Auf dieſe Art habe ich mir allem An„ſehen nach zu viel geſchmeichelt, da ich mir vornahm dem „Publicum jene Abhandlungen zu überliefern. Ich habe „den Cirkel weggelegt; Geſchiktere Hände werden vielleicht „den Riß vollenden, den ich nur ſkizzirt habe.“ O möchte die Vermuthung dieſes wackern Gelehrten doch bald erfüllet werden. B.

ſonen haben in Abſicht auf die Cykloide ſo viele Einwendungen gemacht, daß man es ihnen nicht hat abſchlagen können, hier eine kleine Abhandlung davon zu liefern. Man hat ſich hauptſächlich Mühe gegeben, diejenigen Eigenſchaften derſelben zu betrachten, welche uns dahin leiten können, die Anwendung dieſer krummen Linie auf die Kunſt der Pendeluhren zu verſtehen. Man iſt hier in alle Kleinigkeiten der Mechanik hineingegangen, die im Stande waren das Spiel dieſer wunderbaren Maſchine begreiflich zu machen. Endlich ſiehet man durch eine kurze Geſchichte der Cykloide, wie wichtig bloſſe Speculationen der Geometrie ſind, die vom Anfange nur unerhebliche Wahcheiten darzubieten ſchienen.

Dieſes ſind die Dinge, die ich nach meinem Plane ausgeführet habe. Dafür kan ich gar wohl Bürge ſeyn, daß man in Frankreich kein Werk von dieſer Art und in dieſem Geſchmacke

aufgeſetzet habe. Das Publicum mag entſcheiden, ob ich das Glück gehabt habe, da ich demſelben auf eine neue Art nützlich zu ſeyn ſuchte, durch die verſchiedenen Anwendungen und durch die Geſchichte der Entdeckungen die Trockenheit zu vermeiden, deren dieſe Materien nur gar zu ſehr fähig ſind.

Inzwiſchen ſind die Vorreden etwas verdächtig geworden, weil es viel leichter iſt, zu verſprechen als zu halten und weil die mehrſte Zeit ein groſſer Unterſchied zwiſchen dem geleiſteten und zwiſchen dem iſt, was man hätte leiſten ſollen. Ich glaube daher den Leſern, die gerechter Weiſe dieſes Vorurtheil haben, am beſten die Beſorgniß zu benehmen, wenn ich ihnen dieſe billigende Genehmigung der Königlichen Akademie der Wiſſenſchaften vorlege.

Aus-

Auszug aus dem Protocolle
der Königl. Akademie der Wiſſenſchaften.

Wir haben auf Befehl der Akademie einen Traktat von den Kegelſchnitten und andern krummen Linien der Alten, wie auch von der Cykloide unterſuchet. Dieſer Traktat iſt von dem Herrn de la Chapelle, Mitgliede der Königl Societät zu London aufgeſetzet worden.

Nachdem der Verfaſſer die Eigenſchaften dieſer krummen Linien, vermittelſt der Analyſis gezeiget hat, ſo erkläret er auch den Gebrauch, den man davon in verſchiedenen Künſten gemacht hat. Auf dieſe Art gibt er bey dem Artikel von der Parabel die Theorie vom Bombenwerfen (*) und von der Berechnung der Ausleerung der Minen. Bey dem Artikel von der Ellypſe erklärt er den Gebrauch, den man davon bey den Brenngläſern und Augengläſern gemacht hat oder machen könne. Bey dem Artikel von der Hyperbel zeiget er auch die Anwendung dieſer krummen Linie auf die Unterſuchung der Catoptrik und Dioptrik. Endlich zeiget er bey dem Artikel von der Cykloide, wie die Theorie von dieſer krummen Linie darzu gedienet habe, die Uhren vollkommener zu machen, und wie ſie noch auf eine gewiſſe Art darzu diene, indem man die Pendeln ſehr kleine Stücke von Cirkelbögen beſchreiben läßt.

Herr

(*) Die Praxis iſt auch weitläuftig gezeigt worden.

Herr de la Chapelle zeiget die Tangenten der verſchiedenen krummen Linien, wovon er handelt, indem er dieſe Tangenten als Sekanten betrachtet, deren Durchſchnittspunkte mit der krummen Linie zuſammen fallen. Er findet auch die Quadratur dieſer nämlichen Linien, durch die Methode der Gränzen (Methode des limites), die er in ſeinen Inſtitutionen der Geometrie, die ſchon von der Akademie gebilligt ſind, erkläret hat. Er verfährt dabey auf eine ſolche Art, daß er die Anfänger ohne die Differenzial- und Integral-Rechnung zu gebrauchen, die wahre Metaphyſik dieſes Calculs begreifen läßt.

Wir glauben daher daß dieſes neue Werk vom Herrn de la Chapelle für diejenigen, die ſich dem Studium der höhern Geometrie und ihrer Anwendung auf die Phyſik widmen, nützlich ſeyn werde, ſowohl deswegen, weil der Autor hier viele Materien, die vorher in verſchiedenen Büchern zerſtreuet waren, zuſammenbringt, als auch, weil er dieſelben mit vieler Deutlichkeit und Sorgfalt abgehandelt hat.

Unterzeichnet

Caſſini, d'Alembert.

Ich bezeuge, daß dieſer Auszug dem Original und dem Urtheil der Akademie gemäß ſey.

Grand Jean d'Fouchy.

beſtändiger Sekretair der Königl. Akademie der Wiſſenſchaften.

Abhandlung von krummen Linien.

Von der Rechnung mit den Potenzen in Anſehung ihrer Exponenten.

Nachricht.

Die zwey folgenden Calculs, die Rechnung mit den Potenzen in Anſehung ihrer Exponenten und die Wurzel-Rechnung können von denen, die die neuere höhere Geometrie kennen wollen nicht übergangen werden. Auch bey dem Studium der höhern Geometrie der Alten ſind ſie von beſonderer Bequemlichkeit. Nichtsdeſtoweniger können die Anfänger dieſelbe gänzlich vorbey laſſen, weil der gröſte Theil dieſes Werkes ohne Hülfe derſelben verſtanden werden kann.

§. 1.

Man lehret in dieſem Capitel das, was man in Abſicht auf die Exponenten der Potenzen, in wiefern die verſchiedenen Rechnungsarten bey ihnen angewendet werden, vorzunehmen habe.

Der Exponent einer Gröſſe iſt eine jede Gröſſe, wodurch man anzuzeigen pfleget, wie oft die Gröſſe geſchrieben

werden müßte, wenn man ein ſolches Zeichen nicht gebrauchte. Wenn alſo dieſer Exponent ein Ganzes iſt, ſo gibt er beſtändig eine Multiplication zu erkennen. Man kann folglich einen Exponenten nicht vergrößern, ohne diejenige Größe, zu welcher er gehöret, zu multipliciren; und man kann ihn dahero auch nicht kleiner machen, ohne dieſe nämliche Größe zu dividiren. Und da die Erhebung zu Dignitäten und die Ausziehung der Wurzeln nur durch multipliciren und dividiren geſchiehet, ſo folgt, daß man von den Exponenten nicht anders handeln könne, als wenn man lehret, wie dadurch Potenzen zu multipliciren und zu dividiren ſind, wie dieſelben zu andern Dignitäten zu erheben und wie aus ihnen die Wurzeln auszuziehen ſind.

§. 2.

Anmerkung. Eine jede Größe, die zu keiner Dignität erhoben zu ſeyn ſcheinet, wird jederzeit ſo betrachtet, als hätte ſie die Einheit zum Exponenten. Folglich iſt

$$b = b^1;\ cd = c^1 d^1;\ a + b = (a + b.)^1$$

§. 3.

Wenn man Dignitäten aus einer und derſelbigen Wurzel, die zu ihren Exponenten ganze Zahlen haben, durcheinander multipliciren will, ſo ſchreibe man dieſe Wurzel ein einzigesmal und gebe derſelben die Summe aus den Exponenten von den Dignitäten, die ſich einander multipliciren, zum Exponenten. Z. E. $y^2 \times y^4 = y^{2+4} = y^6$; denn es iſt $y^2 = yy$ und $y^4 = yyyy$; Folglich iſt $y^2 \times y^4 = yy \times yyyy = yyyyyy = y^6$. Folglich iſt die gegebene Regel augenſcheinlich gewiß. Ebendeswegen zeiget man, wenn die Exponenten unbeſtimmt ſind, die Summe derſelben durch das Zeichen $+$ an; das heißt, $y^r \times y^s = y^{r+s}$.

§. 4.

Hieraus folgt, daß, wenn man Potenzen, die den vorigen ähnlich ſind, durch einander dividiren will, man den Exponenten der Dignität des Diviſors von dem Exponenten der Dignität der zu dividirenden Gröſſe ſubtrahiren und daß man das, was bey der Subtraction übrig bleibt, der Wurzel zum Exponenten geben müſſe: Wollet ihr z. E. c^5 durch c^3 dividiren ſo dürfet ihr nur ſchreiben $c^{5-3} = c^2$. Dieſes wird der geſuchte Quotient ſeyn; denn der Diviſor c^3 multiplicirt durch den Quotienten c^2 iſt $= c^{3+2}$ (§. 3.) = dem Dividendus c^5; Folglich iſt allgemein c^s dividirt durch $c^r = \frac{c^s}{c^r} = c^{s-r}$.

§. 5.

Es ſey in dem vorigen Exempel $r = s$, ſo wird man finden, daß $c^{s-r} = c^{s-s} = c^0$ ſey. (§. 4.) Es iſt aber $c^{s-r} = \frac{c^s}{c^r} = \frac{c^s}{c^s} = 1$. daher iſt $c^0 = 1$. Hieraus ſiehet man, daß eine jede Gröſſe, die zu keiner Dignigtät erhoben worden iſt, oder deren Dignität das Zero oder Null iſt, der Einheit gleich werde.

§ 6.

Wenn man demnach den Exponenten $s = 0$ ſezte, ſo würde $\frac{c^s}{c^r} = \frac{c^0}{c^r} = c^{0-r}$ (§. 4.) $= c^{-r}$ ſeyn. Dieſes beweiſet, daß eine Potenz einen negativen Exponenten haben könne. Sie ſtellet aber alsdenn einen wahren Bruch vor, ohngeachtet ſie nicht ſo ausſiehet. Denn es iſt $c^0 = 1$. (§. 5.)

Fol-

Folglich $\frac{c^0}{c^r} = \frac{1}{c^r}$; Allein man hat augenblicklich geſehen, daß $\frac{c^0}{c^r} = c^{-r}$; Folglich iſt $c^{-r} =$ dem Bruch $\frac{1}{c^r}$.

§. 7.

Ein poſitiver Exponent kann folglich in einen negativen verwandelt werden und umgekehrt, ohne daß die Potenz, der er zugehöret, ihren Werth verändert. Denn 1.) iſt $\frac{1}{c^r} = c^{-r}$ (§. 6.) 2.) behaupte ich, daß $c^r = \frac{1}{c^{-r}}$. Denn es iſt $\frac{1}{c^r} = c^{-r}$ (§. 6.); Folglich iſt $1 = c^r \times c^{-r}$. Daher $\frac{1}{c^{-r}} = c^r$.

§. 8.

Gleichermaſſen kann $d^4 f^{-3}$ folgende Gröſſe werden $\frac{d^4}{f^3}$. Denn weil $f^{-3} = \frac{1}{f^3}$ (§. 6.), ſo iſt $d^4 \times f^{-3} = d^4 \times \frac{1}{f^3} = \frac{d^4}{f^3}$. Es kann auch aus der nämlichen Gröſſe $d^4 f^{-3}$ der Ausdruck $\frac{1}{d^{-4} f^3}$ werden; Denn da d^4 gleich iſt $\frac{1}{d^{-4}}$ (§. 7.) und $f^{-3} = \frac{1}{f^3}$ (§. 6.) ſo iſt $d^4 f^{-3} = \frac{1}{d^{-4}} \times \frac{1}{f^3} = \frac{1}{d^{-4} f^3}$.

Man

Man gebraucht dieſe Verwandlungen, wenn man in einem Calcul wiſſen will, ob Gröſſen ſich gleich ſind, wenn ſie es gleich nicht zu ſeyn ſcheinen.

§. 9.

Weil die Potenzen auch negative Exponenten haben können (§. 6.) ſo muß man auch unterſuchen, wie ſie ſich in dieſem Betrachte multipliciren oder dividiren. Man hat keiner andern, als denjenigen Regeln zu folgen, die im 3. 4. §. gegeben worden ſind. Um alſo d^{-2} durch d^{-3} zu multipliciren, ſo ſchreibt man $d^{-2} \times d^{-3} = d^{-2-3} = d^{-5}$ (§. 3.) Auf gleiche Weiſe iſt $d^{-r} \times d^{-s} = d^{-r-s}$. Denn es iſt $d^{-r} = \frac{1}{d^r}$ und $d^{-s} = \frac{1}{d^s}$ (§. 6.) Folglich iſt $d^{-r} \times d^{-s} = \frac{1}{d^r} \times \frac{1}{d^s} = \frac{1}{d^r \times d^s} = \frac{1}{d^{r+s}}$ (§. 3.) $= d^{-r-s}$ (§. 6.). Wollt ihr noch d^4 durch d^{-5} multipliciren, ſo werdet ihr finden, daß $d^4 \times d^{-5} = d^4 \times \frac{1}{d^5} = \frac{d^4}{d^5} = d^{4-5} = d^{-1}$ ſey.

§. 10.

Wenn man der im §. 4. veſtgeſetzten und bewieſenen Regel folgt, ſo wird man auf eben dieſe Art mit der gröſten Leichtigkeit Potenzen, deren Exponenten negativ ſind, durch einander dividiren; es mag nun das Dividendum oder der Diviſor dieſen negativen Exponenten haben. Folglich, um d^{-5} durch d^{-3} zu dividiren, ſchreibt man $\frac{d^{-5}}{d^{-3}} = d^{-5+3} = d^{-2}$.
Dieſes wird der geſuchte Quotient ſeyn. Wenn aber die Exponenten unbeſtimmt ſind, das heißt, wenn man z. E. d^{-r}

durch

durch a^{-s} zu dividiren hat, ſo ſchreibe man $\frac{a^{-r}}{a^{-s}} = a^{-r+s}$ als den Quotienten dieſer Diviſion. Denn dieſer Quotient a^{-r+s} multiplicirt durch den Diviſor a^{-s} iſt $= a^{-r+s-s}$ (§. 9.) $= a^{-r}$ und wenn a^{-r} durch a^{s} dividiren würde, ſo würde man a^{-r-s} zum Quotienten haben, weil $a^{-r-s} \times a^{s} = a^{-s-r+s} = a^{-r}$ iſt.

§. 11.

Vermittelſt des Calculs der Potenzen in Anſehung ihrer Exponenten kann man eine Gröſſe, die mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ bezeichnet iſt, von dieſem Zeichen befreyen. Es iſt aber nöthig, daß man vorher folgendes einſehe und davon durch einen tüchtigen Beweis überzeugt ſey, daß, um irgend eine Potenz y^{s} zu einem beliebigen Grade, deſſen Exponent r oder $-r$, poſitiv oder negativ iſt, zu erheben, man den Exponenten s der gegebenen Potenz durch den gegebenen Exponenten r oder $-r$ multipliciren und alsdenn veranſtalten müſſe, daß dieſes Produkt der Exponent dieſer nämlichen Potenz werde: daß alſo y^{s} wenn man es zur Potenz r erhebt $= y^{rs}$ ſey und daß y^{s} zur Potenz $-r$ erhoben $= y^{-rs}$ ſey. Ich beweiſe dieſes demnach:

I. Es muß aus y^{s} zur poſitiven Potenz r erhoben, nothwendig y^{rs} werden. Denn wenn man y^{s} zur poſitiven Potenz r erhebt, ſo multiplicirt man dieſe Gröſſe ſo oft durch ſich ſelbſt als Einheiten in r ſind weniger Eins; das heißt, man ſchreibt dieſe Potenz ſo oft, als man in dem Buchſtaben r Einheiten annimmt, ſo daß aus derſelben $y^{s}, y^{s}, y^{s}, y^{s} \ldots\ldots$ werde. Hier iſt y^{s} ſo oft geſchrieben worden, als man Einheiten in r annimmt. Es iſt aber $y^{s}, y^{s}, y^{s}, y^{s} \ldots\ldots = y^{s+s+s+s} \ldots\ldots$ (§. 3.) In welchem Ausdruck der Exponent s ſo oft muß geſchrieben oder genommen worden ſeyn, als der Buchſtabe r Einheiten in ſich faſſet. Allein um s ſo vielmal zu nehmen, als r Einheiten in ſich faſſet, muß man s durch r multipliciren. Folglich iſt in dieſem Falle $y^{s+s+s+s} \ldots\ldots = y^{rs}$. Und ihr werdet euch insbeſondere von der Wahrheit dieſer Verſi-

cherung überzeugen, wenn ihr die Gröſſe a^3 zur 4ten oder irgend einer andern beſtimmten Potenz erhebet. Denn alsdenn muß man ſchreiben $a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$ oder $a^{3 \times 4}$: So wie es die allgemeine Regel vorſchreibt.

II. Es iſt y^s zur negativen Potenz $-r$ erhoben $= y^{-rs}$. Man muß ſich hierzu wieder erinnern daß $y^s = yyyy\ldots\ldots$ oder daß der Buchſtabe y ſo oft geſchrieben werden muß als man in dem Exponenten s Einheiten annimmt. Wenn man alſo y^s oder eine Gröſſe, die ihr gleich iſt $yyyy\ldots.$ zur Potenz $-r$ erhebt, ſo muß man ſchreiben $yyyy\ldots\ldots^{-r}$; dieſes zeiget an, daß die vorgegebene Gröſſe zu betrachten ſey, als ſey ſie zur Dignität $-r$ erhoben worden. Allein es iſt $yyyy\ldots\ldots^{-r} = \frac{1}{yyyy\ldots^{r}}$ (§. 6.) und $\frac{1}{yyyy\ldots^{r}}$ iſt $= \frac{1}{y^s}$ erhoben zur poſitiven Dignität $r = \frac{1}{{y^s}^r}$ (1) denn 1 zu irgend einer Dignität erhoben giebet beſtändig 1, und folglich darf man, um den Bruch $\frac{1}{y^s}$ zur poſitiven Dignität r zu erheben, nur ſimpel ſo, wie es im erſten Nummer dieſes § vorgeſchrieben worden iſt, mit dem Nenner deſſelben verfahren, ſo wird aus dieſem Bruche $\frac{1}{y^{rs}}$ werden. Es iſt aber $\frac{1}{y^{rs}} = y^{-rs}$ (§. 6.) Folglich iſt endlich y^s zur Dignität $-r$ erhoben $= y^{-rs}$ und wenn ihr die Reihe aller Gleichungen, die uns zu dieſer lezten geführt haben, zu beſitzen wünſchet, ſo müſſet ihr ſchreiben $yyyy\ldots^{-r} = \frac{1}{yyyy\ldots.^{r}} = \frac{1}{{y^s}^r}$* (Num. 1.) $= y^{-sr}$ (§. 6.) Eben

* Der Ausdruck ${y^s}^r$ zeiget an, daß die Gröſſe y^s zur Dignität r iſt erhoben worden.

Eben ſo iſt y^{-s}, zur negativen Dignität $-r$ erhoben, $= y^{rs}$. Denn $y^{-s} = \frac{1}{y^s}$ (§. 6.) Allein um den Bruch $\frac{1}{y^s}$ zur Dignität $-r$ zu erheben, ſo muß man ſeinen Zähler und Nenner zur Dignität $-r$ erheben und folglich $\frac{1^{-r}}{y^{-rs}}$ ſchreiben (Num. 2.) Es iſt aber $1^{-r} = 1$. Denn es iſt $1^{-r} = \frac{1}{1^r}$ (§. 6.) $= \frac{1}{1} = 1$. Folglich iſt $\frac{1^{-r}}{y^{-rs}} = \frac{1}{y^{-rs}} = y^{rs}$.

§. 12.

Man wird vielleicht fragen, was eine Gröſſe, die zu einer negativen Dignität erhoben iſt, bedeute? Es iſt dieſes eine Gröſſe, die kleiner wird als 1, und die alſo in einen Bruch verwandelt wird, wenn ſie vorher, ehe ſie zu dem beſtimmten Grade erhoben wurde, einen poſitiven Exponenten hatte, die aber im Gegentheil ihrem Werthe nach ein Ganzes wird, wenn ihr Exponent negativ war. Ihr habet z. E. die Gröſſe a^3, die ihr zur negativen Dignität -2 erheben wollet, ſo muß dieſe Gröſſe alsdenn a^{-6} werden (§. 11. Num. 2.) $= \frac{1}{a^6}$ (§. 6.) hier ſehet ihr daß die Gröſſe a^3, die einen poſitiven Exponenten hat, kleiner wird als die Einheit. Es ſey im Gegentheil die Gröſſe a^{-3} zur Dignität -2 zu erheben, ſo wird man a^6 bekommen (§. 11. Num. 2.); das heißt, die Gröſſe a^{-3} oder $\frac{1}{a^3}$, welche ein Bruch oder kleiner als die Einheit war, wird gröſſer als die Einheit. Denn wir ſetzen bey allem dieſem voraus daß $a > 1$ ſey.

§. 13.

§. 13.

Bemerket, daß es ein groſſer Unterſchied ſey, zwiſchen dem Ausdruck y^3 zur 4ten Dignität erhoben, und zwiſchen $y^3 \times y^4$. Denn es iſt $\overline{y^3}^4 = y^{3 \times 4}$ (§. 11.) $= y^{12}$; Hingegen iſt $y^3 \times y^4 = y^{3+4}$ (§. 3.) $= y^7$, welches ſehr von y^{12} unterſchieden iſt. Eben ſo iſt $\overline{pr}^s = p^{r \times s} = p^{rs}$. Es iſt aber $pr \times ps = pr+s$.

§. 14.

Nun werden wir leichtlich eine jede Gröſſe, die mit einem Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ verbunden iſt, wie z. E. $\sqrt[s]{y^p}$, von dieſem Zeichen befreyen können, ohne dennoch ihren Werth zu verändern; Es habe dieſes Wurzelzeichen auch einen Exponenten welchen es immer will. Denn, weil man, um eine Gröſſe zu irgend einer Dignität zu erheben, ihren Exponenten durch den Exponenten der geforderten Dignität multipliciren muß, und weil die Ausziehung der Wurzeln das entgegengeſetzte von dem Erheben zu Dignitäten iſt, ſo muß man, um die Wurzel s aus y^p zu ziehen, den Exponenten dieſer Gröſſe durch den gegebenen Exponenten s dividiren; und es iſt folglich $\sqrt[s]{y^p} = y^{\frac{p}{s}}$, wo kein Wurzelzeichen mehr iſt. Es iſt auch würklich $y^{\frac{p}{s}}$ zur Dignität s erhoben $= y^{\frac{p}{s} \times s}$ (§. 11.) $= y^p$, ſo wie es ſeyn mußte.

Auf gleiche Weiſe iſt $\sqrt[2]{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$, ſo wie man dieſes ohnehin ſchon weiß. $\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$. Auch dieſes erkennet man als eine gewiſſe Wahrheit. Eben ſo iſt $\sqrt[2]{x}$ oder $\sqrt{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$.

§. 15.

Man muß ſich bey der Multiplication dieſer Gröſſen, wie im §. 3 verhalten. Folglich iſt $y^{\frac{s}{p}} \times y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{s}{p}+\frac{m}{n}}$ (A) $= y^{\frac{ns+pm}{np}}$, wenn man nämlich die beyden Theile des Exponenten der Gröſſe A unter einerley Benennung bringt.

Wollet ihr auf eine gleiche Weiſe $y^{\frac{n}{s}}$ durch $y^{-\frac{m}{t}}$ multipliciren, ſo werdet ihr bekommen $y^{\frac{n}{s}-\frac{m}{t}}$ (§. 9.) $= y^{\frac{nt-sm}{st}}$. Und wenn ihr $y^{-\frac{n}{s}}$ durch $y^{-\frac{m}{t}}$ würdet zu multipliciren haben, ſo würde das Produkt ſeyn $y^{-\frac{n}{s}-\frac{m}{t}} = y^{\frac{-nt-sm}{st}}$.

§. 16.

Was die Diviſion ſolcher Gröſſen, die den vorigen ähnlich ſind, anbetrifft, ſo muß man ſich nach der Regel des § 4. richten. Man wird alsdann finden daß $y^{\frac{s}{p}}$ dividiret durch $y^{\frac{m}{n}}$ = ſey $y^{\frac{s}{p}-\frac{m}{n}} = y^{\frac{ns-pm}{pn}}$.

Eben ſo werdet ihr finden, daß $y^{\frac{s}{p}}$ dividirt durch $y^{-\frac{m}{n}}$ = ſey $y^{\frac{s}{p}+\frac{m}{n}} = y^{\frac{ns+pm}{pn}}$ und daß $y^{-\frac{s}{p}}$ dividiret durch $y^{\frac{m}{n}}$ gleich ſey $y^{-\frac{s}{p}-\frac{m}{n}} = y^{\frac{-ns-pm}{pn}}$. Endlich iſt $y^{-\frac{s}{p}}$ dividiret durch $y^{-\frac{m}{n}} = y^{-\frac{s}{p}+\frac{m}{n}} = y^{\frac{-ns+pm}{pn}}$.

§. 17.

Es iſt nützlich, daß man zum voraus wiſſe, daß es möglich ſey, daß man bey der Verwandlung ſolcher Gröſſen, die

mit einem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ bezeichnet ſind, in Gröſſen die kein ſolches Zeichen haben, wenn man z. E. macht, daß aus $\sqrt[3]{(a+b)}$ dieſe Gröſſe $(a+b)^{\frac{1}{3}}$ entſtehe daß es möglich ſey, ſich bey dieſer Verwandlung der Cubikwurzel von dieſer Gröſſe $(a+b)$ unendlich zu nähern, und daß man dabey auf diejenige Rechnung ſtoſſen könne, die man den Calcul der Reyhen zu nennen pfleget. Eine Rechnung, die ſo nützlich in der Geometrie iſt, wo man die Differential- und Integral-Rechnung anwendet. Da wir aber hier dieſe Kenntniſſe nicht nöthig haben, ſo gehe ich ſogleich zu der **Wurzel-Rechnung** fort, die in der analytiſchen Geometrie ſo bequem iſt.

Von der Wurzel-Rechnung.

§. 18.

Eine **Wurzel-Gröſſe** iſt diejenige Gröſſe, die mit dem hierbey ſtehenden Zeichen $\sqrt{}$ bezeichnet iſt. Zwiſchen den Armen dieſes Zeichens ſchreibet man irgend eine Gröſſe oder Zahl, welche man den Exponenten nennet, weil ſie anzeigt, von welchem Grade diejenige Wurzel ſey, die man als ausgezogen annimmt, oder ſo anſieht, daß ſie vermöge des Zeichens $\sqrt{}$ ſolte aus der Gröſſe ausgezogen werden. Folglich bedeutet $\sqrt[2]{x}$ oder ſchlechtweg $\sqrt{x}$ die Quadrat-Wurzel oder die zwote Wurzel von x. Eben ſo druckt $\sqrt[5]{(b^2 - x^2)}$ die Wurzel der 5ten Dignität von $(b^2 - x^2)$ aus. Mit einem Worte $\sqrt[s]{y}$ zeiget die unbeſtimmte Wurzel s von der Gröſſe y an, u. ſ. w.

§. 19.

Wenn der Exponent einer Wurzelgröſſe der nämliche iſt als der, den die poſitive Potenz, die unter dem Wurzelzeichen ſte-

ſtehet, hat, oder wann dieſe Gröſſe eine vollkommene Potenz und von einerley Grade mit dem Exponenten des Wurzelzeichens iſt, ſo kann dieſe Gröſſe von dem Wurzelzeichen befreyet werden. So iſt $\sqrt{xx}=x$; $\sqrt{16}$ oder $\sqrt[2]{4^2}=4$; $\sqrt[3]{27}$ oder $\sqrt[3]{3^3}=3$; $\sqrt{(aa-2ac+cc)}$ oder $\sqrt[2]{(a-c)^2}=a-c$. Dieſes alles iſt evident.

§. 20.

Es kann eine Gröſſe folglich die Form von irgend einer Wurzelgröſſe annehmen, ohne daß ſie ihren Werth verändert, indem man nämlich dieſe Gröſſe zur Dignität von dem nämlichen Grade erhebet, den der Exponent des Wurzelzeichens, womit man ſie bezeichnen wird, hat. Es ſey die Gröſſe b^2x, die ihr in eine Wurzelgröſſe von dem nämlichen Grade, als $\sqrt[3]{s}$, umformen wolltet. Erhebet deswegen b^2x zum Cubus oder zur 3ten Dignität und indem ihr ſie unter dem Zeichen $\sqrt[3]{}$ ſetzet, ſo werdet ihr dieſe Gleichung bekommen: $b^2x=\sqrt[3]{(b^6x^3)}$. Dieſe Gröſſe hat das nämliche Wurzelzeichen als $\sqrt[3]{s}$. Noch iſt alles ganz evident. (§. 19.)

§. 21.

Es folgt ferner aus dem (§. 19.) daß eine Gröſſe, deren Factores, das heißt, diejenigen Gröſſen, woraus ſie durch die Multiplication entſtanden iſt, ſo beſchaffen ſind, daß einige von ihnen den nämlichen Exponenten haben, den das Wurzelzeichen hat, einige aber nicht, es folgt aus dem vorigen, ſage ich, daß dieſe Gröſſe zum Theil von dem Wurzelzeichen könne befreyet werden.

So iſt alſo 1) $\sqrt[3]{(a^3b)}=a\sqrt[3]{b}$, wo nur noch der Factor b mit dem Wurzelzeichen bezeichnet iſt. Es ſind

nem-

nemlich zwo Gröſſen ſich einander gleich, wenn ſie zu gleicher Dignität erhoben worden ſind und alsdenn gleiche Producte geben; Wenn man nun $\sqrt[3]{(a^3 b)}$ zum Cubus oder zur 3ten Dignität erhebet, ſo hat man die Gröſſe $a^3 b$; weil der Ausdruck $\sqrt[3]{(a^3 b)}$ anzeiget, daß man die Cubicwurzel aus $a^3 b$ ausziehen ſoll. Man nimmt alſo an, daß dieſe Gröſſe ein Cubus iſt. Wenn man folglich das Wurzelzeichen $\sqrt[3]{}$ von dem Ausdruck $\sqrt[3]{(a^3 b)}$ wegnimmt, ſo wird dieſe Gröſſe blos dadurch zur 3ten Dignität erhöhet. Folglich iſt $a^3 b$ der Würfel von $\sqrt[3]{(a^3 b)}$.

Eben ſo behaupte ich 2) daß $a^3 b$ der Würfel von $a\sqrt[3]{b} = a \times \sqrt[3]{b}$ ſey, weil man keine Gröſſe zum Cubus erheben kann, wo nicht alle ihre Factores zum Würfel erhoben werden. So iſt z. E. $(bcx)^3 = b^3 c^3 x^3$; Es wird alſo in der Gröſſe $a \times \sqrt[3]{b}$, die man zum Cubus erheben will, aus a die Gröſſe a^3 und aus $\sqrt[3]{b}$ wird b. (Nro. 1.) Folglich iſt der Cubus von $a\sqrt[3]{b} = a^3 b$. Dieſe nämliche Gröſſe iſt aber auch der Würfel von $\sqrt[3]{(a^3 b)}$. Folglich iſt $\sqrt[3]{(a^3 b)} = a\sqrt[3]{b}$. Eben ſo werdet ihr finden, daß $\sqrt{8} = \sqrt{(4 \times 2)} = 2\sqrt{2}$ und daß $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{(27 \times 2)} = 3\sqrt[3]{2}$ ſey, u. ſ. w.

§. 22.

Man kann alſo eine Gröſſe, die kein Wurzelzeichen vor ſich hat und durch eine andere Wurzelgröſſe multiplicirt wird, mit unter dem Wurzelzeichen ſetzen, ohne daß das Product dieſer Gröſſen verändert wird. Man muß nur eine ſolche Gröſ-

ſe, die man unter dem Wurzelzeichen ſetzen will zu der nämlichen Dignität erheben, die durch den Exponenten des Wurzelzeichens angezeiget wird, und ſie alsdenn durch die unter dem Wurzelzeichen ſtehende multipliciren. Denn man hat kurz vorher geſehen (§. 21.) daß $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{(a^3b)}$ ſey. Eben ſo iſt $(a-b)^2\sqrt{c}=\sqrt{(aa-2ab+bb\times c)}=\sqrt{(a^2c-2abc+b^2c)}$. Man hat hier die Gröſſe $a-b$ unter das Wurzelzeichen gebracht, indem man ſie zur 2ten Dignität erhoben und durch die Wurzelgröſſe c multiplicirt hat. Auf dieſe Verwandelungen muß man wohl Achtung geben. Sie erleichtern die Wurzel Rechnung gar ungemein. Wenn ihr alſo die Gröſſe $4\sqrt{5}$ hättet, ſo werdet ihr folgende daraus machen können $\sqrt{(4^2\times5)}=\sqrt{(16\times5)}=\sqrt{80}$ ohne im geringſten etwas von dem Werthe $4\sqrt{5}$ zu verändern.

§. 23.

Es gibt aber Gröſſen, aus welchen man die Wurzel von irgend einem Grade weder ganz noch aus einem Theile von ihnen ziehen kann, das heißt, es gibt Gröſſen, die man nach aller Strenge nicht von ihrem Wurzelzeichen befreyen kann. Unter ſolche gehören $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ u. ſ. w. Dieſe heiſſen Irrational-Gröſſen, das heißt, ſolche Gröſſen, die kein gemeinſchaftliches Maaß mit der Einheit oder mit einigen Theilen der Einheit haben; ſo, daß man keine einzige Zahl habe, ſie ſey ganz oder gebrochen, die die Quadratwurzel von 5 ſey; wie ich dieſes in §. 72. der Algebra im erſten Theile meiner Inſtitutionen bewieſen habe. * Indeſſen ohngeachtet es Gröſ-

* Der Beweis iſt ungefehr dieſer: Es kann die Quadrat-Wurzel aus 5 weder 2 noch 3 ſeyn. Denn 2 wäre zu klein, weil 2 mal 2 nur 4 iſt, und 3 wäre zu groß; denn 3 mal 3 gibt ſchon 9. Es iſt folglich die wahre Wurzel zwiſchen 2 und 3 enthalten und folglich keine ganze Zahl. Sie wäre alſo, wenn man

Gröſſen gibt, wovon man mit aller Genauigkeit die Wurzel nicht haben kann, ſo habe ich doch in meinen Inſtitutionen gezeiget, daß man ſich derſelben unendlich nähern könne, und daß man alſo hierinn ein Supplement habe, welches gröſſer iſt als die Bedürfniſſe des gemeinen Lebens es verlangen.

§. 24.

Manchesmal findet man ſo gar Wurzelgröſſen, bey welchen die Annäherung zur wahren Wurzel unmöglich, und die Aufſuchung derſelben abſurd iſt. So iſt z. E. $\sqrt{-a^2}$ weder $+a$ noch $-a$ und ſie kann keines von beyden ſeyn. Denn

 wenn

man ſie anders genau beſtimmen könnte, 2 und überdieß noch ein gewiſſer Theil der Einheit, das heißt, ſie wäre $=2+$ einem Bruch. Allein auch dieſes iſt unmöglich. Warum? Sollte ſie ſo groß ſeyn als 2 nebſt einem Bruche, ſo müſte dieſe Gröſſe durch ſich ſelbſt multiplicirt endlich 5 geben. Es wird aber niemals eine ganze Zahl entſtehen, wenn man einen wirklichen Bruch durch ſich ſelbſt multiplicirt. Denn wenn man den Bruch zu ſeinem einfachſten Ausdruck bringt, ſo hat deſſen Zähler und Nenner keine Wurzel, die beyden gemeinſchaftlich wäre. Man multiplicire daher dieſen Bruch durch ſich ſelbſt, ſo bringt man ja dadurch keine neue Wurzeln hinzu. Folglich muß auch das Product noch ein Bruch ſeyn, deſſen Zähler und Nenner keine gemeinſchaftliche Wurzel hat. Will man nun zum Quotienten ein Ganzes, das heißt, einen Quotienten, wobey kein Bruch mehr iſt, haben, ſo muß ſich der Zähler durch den Nenner, ohne daß etwas übrig bliebe, dividiren laſſen, und hierzu wird erfordert, daß Zähler und Nenner gemeinſchaftliche Wurzeln haben. Da dieſes nun nicht iſt, ſo iſt der Quotient ein Bruch und folglich kann keine ganze Zahl, deren Wurzel kein Ganzes iſt, einen Bruch zur Quadrat-Wurzel haben: Folglich iſt das Quadrat eines vermiſchten Bruchs unmöglich eine ganze Zahl. Da nun die Zahl 5 weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl zu ihrer Wurzel haben kann, ſo folgt, daß man nach aller Strenge genommen von 5 oder von jeder andern Zahl, die zur Wurzel keine ganze Zahl hat, die Quadrat-Wurzel nicht beſtimmen könne. B.

wenn man $+a$ oder $-a$ zum Quadrat erhebet, ſo bekommt man niemals $-a^2$. Eben ſo iſt $\sqrt{-9}$ weder $+3$ noch -3, weil 3×3 oder -3×-3 beydes $+9$ nicht aber -9 geben. Deswegen heiſſen dieſe Arten von Gröſſen eingebildete oder unmögliche, und man muß eine Gröſſe für eine eingebildete halten, wenn ſie negativ iſt, und ſich unter einem Wurzelzeichen befindet, deſſen Exponent eine grade Zahl iſt. Z. E. $\sqrt[6]{-a^6}$, $\sqrt[4]{-a^4}$. u. ſ. w. Dieſes ſind eingebildete Gröſſen weil keine poſitive noch negative Gröſſe nach einer graden Anzahl durch ſich ſelbſt multiplicirt jemals ein negatives Product geben kann.

§. 25.

Allein was bedeutet eine eingebildete Gröſſe warum will man ſie in der Rechnung annehmen. Wenn man eine Aufgabe auflöſen will, ſo weiß derjenige, der dieſe Auflöſung ſucht vom Anfange noch nicht, ob er ſich eine mögliche oder unmögliche Sache vorgenommen habe? Er iſt folglich verbunden alle Bedingungen der Frage auszudrucken, ob es gleich ſeyn kann, daß ſie ſich unvermerkt widerſprechen. Kommt nun, nachdem man alles, was zur geſuchten Auflöſung führen kann, verglichen hat, ein Reſultat heraus, welches durch eine eingebildete Gröſſe ausgedruckt iſt, ſo iſt es gewiß und er kann es beweiſen, daß man ihm eine unmögliche Aufgabe vorgelegt habe und das Problem iſt alſo würklich aufgelöſet. Ich habe dieſes in meinen Inſtitutionen gezeiget. *

§. 26.

* In der Lehre von den eingebildeten Gröſſen ſind nicht alle Gelehrten von einerley Meinung. Verſchiedene halten ſie für wirkliche Gröſſen, die ſo gar ſich geometriſch conſtruiren lieſſen. Dieſe Gedanken äuſſert Herr Kühn in ſeinen *meditationibus de quantitatibus imaginariis.* Man leſe dieſe Schrift in dem 3ten Theil der Abhandlungen der Akademie zu Petersburg. Die gegründeten Erinnerungen, die der Herr Karſten dagegen gemacht hat, findet man in dem 3ten Stücke ſeiner Bey=

§. 26.

Eingebildete Gröſſen können und müſſen alſo in den Calcul kommen. Sie können ſo gar reelle Gröſſen werden, wenn man die Unmöglichkeit, die ſie daran verhindert, wegnimmt. Es iſt —4 eine reelle Gröſſe und ſehr möglich, weil man 4 weniger als 0 oder als Nichts haben kann. So iſt der Zuſtand eines Menſchen, der nichts beſitzt und 100 Gulden ſchuldig iſt. Er hat 100 Gulden weniger als Nichts, weil er, wenn man ihm 100 Gulden gäbe, noch im Zuſtande des Nichts ſeyn würde. Wenn man alſo aus —4 die Quadratwurzel auszuziehen forderte, wovon der Ausdruck folgender wäre, $\sqrt{-4}$, ſo würde man eine unmögliche Sache begehren und $\sqrt{-4}$ wäre eine eingebildete Gröſſe, die ei-

---

Beyträge zur theoret. Math. Kurz und artig hat dieſe Meynung Herr Holland in ſeiner kleinen Abhandlung über die Mathematik gleichfals widerleget. Andere Gelehrte geben zwar gerne zu, daß man ſie nicht geometriſch conſtruiren könne, daß es weder poſitive noch negative Gröſſen, am allerwenigſten aber Nullen ſind. Aber ſie wollen nicht haben, daß es contradictoriſche Gröſſen ſind. Sie ſollen vielmehr im philoſophiſchen Verſtande poſitive ſeyn, weil man ſie ſich vorſtellen und einbilden kann. Vielleicht habe ich Gelegenheit an einem andern Orte mich weitläuftiger über dieſe Meynung einzulaſſen, die mir aus verſchiedenen Gründen nicht vollkommen gefällt. Endlich halten die eingebildeten Gröſſen ſehr viele, wie ſie es auch in der That ſind, für ein metaphyſiſches Nichts. So ſagt Herr Holland: Sie ſind Begriffe, die aus lauter Widerſprüchen zuſammengeſetzt ſind. Sie ſind eine ungereimte Antwort des Calculs auf eine ungereimte Frage, wodurch wir etwas ſuchen, welches durch das angenommene bereits ausgeſchloſſen iſt. Dieſes iſt auch vollkommen die Meynung des Herrn de la Chapelle, und wo ich nicht irre, die vernünftigſte und beſte die man hierinn haben kann. Eben deswegen werden ſie auch von ſehr vielen unmögliche Gröſſen genennet. B.

ne reelle werden könnte, wenn man ſie durch ſich ſelbſt multiplicirte, das heißt, wenn man die Unmöglichkeit wegnähme, die ſie verhinderte eine reelle zu ſeyn. So iſt $\sqrt{-4}\times\sqrt{-4}=-4$. Denn da das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ allein die Unmöglichkeit des Ausdrucks $\sqrt{-4}$ macht, ſo wird allein die Unterdrückung deſſelben, die darunter ſtehende Gröſſe zu einer reellen machen. Man darf ſich alſo in der Folge nicht wundern, wenn man ſiehet, daß es ſich mit eingebildeten Gröſſen rechnen laſſe, ja daß ſie ſogar reelle werden.

§. 27.

Bemerket wohl, daß ein ſehr groſſer Unterſchied zwiſchen einer eingebildeten und einer ſolchen Gröſſe ſey, die dem Nichts oder dem Zero gleich iſt. Denn eine Gröſſe, die dem Nichts gleich iſt, iſt nicht unmöglich. Es iſt ja möglich, daß eine Gröſſe durch die andere aufgehoben werde. Eine eingebildete Gröſſe hingegen iſt unmöglich, oder enthält einen Widerſpruch. Ihr werdet nicht ſagen können, daß eine eingebildete Gröſſe als Nichts betrachtet werden könne. Sie iſt noch etwas geringeres. Eben ſo kann eine Gröſſe, die dem Zero gleich iſt, nicht für eine eingebildete genommen werden, weil es nicht unmöglich iſt, daß eine Gröſſe Nichts werde.

§. 28.

Vermittelſt der vorherigen Betrachtungen kann man zuweilen eine Wurzelgröſſe einfacher machen, oder ſie zu dem einfachſten Ausdrucke bringen. Es iſt z. E. $\sqrt{27}=\sqrt{(9\times3)}=\sqrt[2]{(3^2\times3)}=3\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{(27\times2)}=\sqrt[3]{(3^3\times2)}=3\sqrt[3]{2}$. Eben ſo iſt $\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{(64\times3)}=\sqrt[3]{(4^3\times3)}=4\sqrt[3]{3}$ (§. 21.). Auch iſt $\sqrt[4]{(a^4c-a^4b)}=\sqrt[4]{(a^4\times(c-b))}=a\sqrt[4]{(c-b)}$. Gleichfals iſt $\sqrt{(c^2s-2bcs+b^2s)}=\sqrt[2]{((c^2-2bc+b^2)\times s)}=(c-b)\sqrt{s}$, u. ſ. w. Um alſo

ſo eine Wurzelgröſſe zu ihrem einfachſten Ausdruck zu bringen, ſo muß man aus den Factoren der Gröſſen unter dem Wurzelzeichen, die Wurzel ausziehen und zwar aus denjenigen Factoren die Dignitäten von dem nämlichen Grade ſind, als der Grad des Exponentens des Wurzelzeichens iſt; * Man muß die andern Factores unter dem Wurzelzeichen laſſen und durch die gefundene Wurzel dieſes Zeichen multipliciren. Wie man dieſes im §. 21. gezeiget hat.

§. 29.

---

* Hier, dünkt mich, hätte der Herr Verfaſſer gar füglich vorhero zeigen können, wie man die Gröſſen zu dieſer Veränderung manchmal vorbereiten muß. Sie ſcheinen öfters gar nicht ſo beſchaffen zu ſeyn, daß man aus ihnen eine ſolche Wurzel ausziehen könne. Von der Art iſt z. E. folgende Gröſſe $\sqrt{(56\times4)}$ oder allgemein $\sqrt{(a^2y+2ayz+yz^2)}$. Hier muß man ſolche Gröſſen erſt in ſchickliche Factores zerlegen, wovon einer oder einige oder alle Dignitäten von dem nämlichen Grade ſind, den der Exponent des Wurzelzeichens hat. Die Exempel des Herrn Auctors führen zwar darauf. Allein wer kann von Anfängern verlangen, aus denſelben, ohne weitere Anweiſung darzu, ſich Regeln zu abſtrahiren. Man nehme nun die vorhin angeführten Beyſpiele. Man will dieſen Ausdruck $\sqrt[3]{(56\times4)}$ ſo einfach ausdrucken als möglich iſt, ſo kann man nach den Regeln des Herrn de la Chapelle hier nichts weiter vornehmen. Denn aus 56 und 4 als den beyden Factoren läßt ſich keine Cubikwurzel ausziehen. Man wende die itzt noch fehlende Regel an, daß man nämlich wenn es möglich iſt dieſe Factores in andere Factores zerlegt, die von einerley Grade der Dignität mit dem Wurzelzeichen ſind, z. E. 56 in 8 und 7 ſo iſt $56=8\times7$ und $\sqrt[3]{(56\times4)}=\sqrt[3]{(8\times7\times4)}$. Nun iſt $8=2^3$. Folglich iſt $\sqrt[3]{(8\times7\times4)}=\sqrt[3]{(2^3\times7\times4)}=2\sqrt[3]{(7\times4)}=2\sqrt[3]{28}$. Eben ſo iſt die unmittelbare Anwendung der Chapelliſchen Regel bey folgender Gröſſe $\sqrt[2]{(a^2y+2ayz+yz^2)}$ wenigſtens für Anfänger nicht ſchicklich. Man verändere erſt dieſe Gröſſe. Und

da

§. 29.

Dieſes zeiget uns, wie man eine Wurzelgröſſe, die unter dem Wurzelzeichen einen Bruch hat, in eine andere von dem nämlichen Werthe verwandeln könne, wovon die Potenz, die unter dem Wurzelzeichen ſtehet, eine ganze Zahl iſt. Denn man mache, daß der Nenner dieſes Bruchs eine vollkommene Potenz von dem nämlichen Grade mit dem Exponenten des Wurzelzeichens werde; Man wird alsdenn durch die Ausziehung der Wurzeln, oder indem man die Gröſſe auf den einfachſten Ausdruck bringt, die Gröſſe, die unter dem Wurzelzeichen ſtehet, von der Gröſſe befreyen, wodurch ſie beſtimmt wird ein Bruch zu ſeyn. So kann $\sqrt{\frac{5}{8}}$ ohne Veränderung des Werths eine ganze Zahl unter dem Wurzelzeichen haben. Man darf nur den Zähler und Nenner dieſes Bruchs durch 8 multipliciren, ſo wird man folgende Gleichungen bekommen

$$\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\left(\frac{5\times 8}{8\times 8}\right)} = \sqrt{\left(40\times\frac{1}{8\times 8}\right)} = \frac{1}{8}\sqrt{40} \quad (\text{§}.28.)$$

Durch eine ähnliche Methode werdet ihr die Gröſſe $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ verwandeln. Erhebet nur den Nenner dieſes Bruchs $\frac{2}{3}$ zum Cubus, das heißt, multiplicirt den Zähler und Nenner dieſes Bruchs durch das Quadrat ſeines Nenners, ſo iſt

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2\times 3\times 3}{3\times 3\times 3}\right)} = \sqrt[3]{\left(18\times\frac{1}{3\times 3\times 3}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$$

(§. 21.)

---

da a^2 und $2az$ und z^2 alle durch y multiplicirt worden ſind, ſo ſetze man ſtatt $\sqrt{(a^2y+2ayz+yz^2)}$ folgende Gröſſe $\sqrt{(a^2+2az+z^2)\times y)}$. Hier iſt der eine Factor ein vollkommenes Quadrat und es läßt ſich alſo auch die Quadratwurzel daraus leicht ausziehen, welche = iſt $a+z$. Nun iſt nach den im §. ſelbſt angeführten Regeln $\sqrt{(a^2+2az+z^2)\times y)} = (a+z)\sqrt{y}$ und dieſe Gröſſe iſt alſo auch zu dem einfach= ſte n Ausdruck gebracht worden. B.

(§. 21.). Es wird endlich aus $\sqrt[4]{\frac{bd}{c}}$ folgende Gröſſe werden können $\sqrt[4]{\left(\frac{bd \times c^3}{c \times c \times c \times c}\right)} = \sqrt[4]{\left(bc^3 dx \frac{1}{c^4}\right)} = \frac{1}{c}\sqrt[4]{(bc^3 d)}$ u. ſ. w.

§. 30.

Es kann auch geſchehen, daß eine Wurzelgröſſe ihren Werth nicht verändert, ohngeachtet der Exponent von ihrem Wurzelzeichen in einen andern verwandelt wird. Es darf nur die Gröſſe, die unter dem Wurzelzeichen ſtehet, zu gleicher Zeit zu dem Grade erhoben werden, welchen die Zahl anzeigt, wodurch man den Exponenten, um ihn zu verwandeln multipliciret hat. Wollt ihr z. E. daß der Exponent von der Gröſſe $\sqrt[3]{b}$ 6 ſey, ſo multipliciret den Exponenten 3 durch 2. Erhebt darauf die Gröſſe b zum Quadrat oder zur 2ten Dignität, ſo wird $\sqrt[3]{b} = \sqrt[3 \times 2]{b^2} = \sqrt[6]{b^2}$ ſeyn. Dieſes Wurzelzeichen hat verlangter maſſen 6 zum Exponenten. Eben ſo verfährt man bey der Veränderung der Gröſſe $\sqrt[3]{c}$ in eine andere die zum Exponenten 12 hat. Man multiplicire den Exponenten 4 durch 3 und erhebe die Gröſſe c zur 3ten Dignität; Dieſes gibt folgende Gleichung $\sqrt[4]{c} = \sqrt[4 \times 3]{c^3} = \sqrt[12]{c^3}$, wo man den verlangten Exponent erblickt.

Beweis. Es kommt darauf an, allgemein zu beweiſen, daß $\sqrt[s]{b} = \sqrt[sx]{b^x}$ ſey. Dieſes iſt aber evident. Denn es iſt $\sqrt[s]{b} = b^{\frac{1}{s}}$ (§. 14.) und $\sqrt[sx]{b^x} = b^{\frac{1}{s}}$. Ein Beweis der in die Augen fällt.

§. 31.

Dieſe Verwandelung iſt ſehr bequem, wenn man verſchiedenen Wurzelgröſſen, die nicht einerley Exponenten haben, einerley Exponenten geben will; Solche Gröſſen ſind $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[4]{f}$. Denn es iſt $\sqrt[3]{c}=\sqrt[3\times4]{c^4}$ und $\sqrt[4]{f}=\sqrt[4\times3]{f^3}$ (§ 30.) Wenn man folglich ſtatt der gegebenen Wurzelgröſſen nachſtehende Gröſſe $\sqrt[12]{c^4}$ und $\sqrt[12]{f^3}$ nimmt, die den vorigen gleich ſind, ſo wird man Wurzelgröſſen haben, deren Exponenten ſich gleich ſind. Damit folglich zwey Wurzelzeichen, die nicht einerley Exponenten haben, ſolche bekommen mögen, ſo muß man den Exponenten des erſten durch den Exponenten des zweyten multipliciren; darauf die Gröſſe, die unter dem erſten Wurzelzeichen ſtehet zu der Dignität erheben, die der Exponent des 2ten anzeigt; Umgekehrt muß man alsdenn den Exponenten des 2ten Zeichens durch den Exponenten des erſten multipliciren und die Gröſſe, die unter dem 2ten Zeichen ſtehet, zu derjenigen Dignität erheben, die der Exponent des erſten Zeichens anzeiget.

§. 32.

Dieſe Regel iſt nur in dem Falle einer Ausnahme unterworfen, wo man ſie einfacher machen kann, wenn die Exponenten der Wurzelgröſſen einen gemeinſchaftlichen Diviſor haben. Hier dividiret man dieſe Exponenten durch ihren gröſten gemeinſchaftlichen Diviſor, und durch die Quotienten multiplicirt man wechſelsweiſe die Exponenten der gegebenen Wurzelgröſſen: So werden die Gröſſen, die unter dem Wurzelzeichen ſtehen, zu dem Grade erhoben werden, der durch diejenige Zahl angezeiget wird, durch welche der Exponent ihres Wurzelzeichens wird multiplicirt worden ſeyn. Da z. E. die beyden Wurzelgröſſen $\sqrt[9]{b}$ und $\sqrt[9]{c}$ als den gröſten gemeinſchaft-

ſchaftlichen Diviſor 3 haben, ſo muß man 6 durch 3 dividiren ſo iſt der Quotient $=2$ und $9:3=3$. Wenn man darauf den Exponenten 6 des 1ſten Wurzelzeichens, durch den 2ten Quotienten 3 und den Exponenten 9 des 2ten Wurzelzeichens, durch den 1ſten Quotienten 2 multiplicirt, ſo bekommt man $\sqrt[6]{b}=\sqrt[6\times3]{b^3}=\sqrt[18]{b^3}$ und $\sqrt[9]{c}=\sqrt[9\times2]{c^2}=\sqrt[18]{c^2}$. Hierdurch werden $\sqrt[6]{b}$ und $\sqrt[9]{c}$ in $\sqrt[18]{b^3}$ und $\sqrt[18]{c^2}$ verwandelt, deren Wurzelzeichen einerley Exponenten haben, ohne daß die Wurzelgröſſen ſelbſt ihren Werth verändert hätten. (§. 30.)

Beweis. Was die Nenner anbetrift, nach welcher man in Anſehung der Gröſſen, die unter dem Wurzelzeichen ſind, verfährt, ſo liegt der Beweis darvon in §. 30. Es iſt alſo nur noch in Anſehung der Exponenten zu zeigen, daß 2 verſchiedene Gröſſen ſich gleich werden, wenn man ſie zuerſt durch ihren gröſten gemeinſchaftlichen Diviſor dividiret und darauf die erſte durch den 2ten Quotienten und die 2te durch den erſten Quotienten multiplicirt. Es mögen a und c zwo Gröſſen ſeyn und d ihr gemeinſchaftlicher gröſter Diviſor. Wir wollen ſetzen, es ſey $\frac{a}{d}=p$ und $\frac{c}{d}=r$. Es iſt alſo zu beweiſen, daß $a\times r=c\times p$. Dieſes iſt aber unlaugbar. Denn weil $\frac{a}{d}=p$ ſo iſt $a=dp$ und aus der nämlichen Urſache $c=dr$. Folglich iſt $a\times dr=c\times dp$; wenn man folglich mit d dividirt, ſo iſt $a\times r=c\times p$.

§. 33.

Das, was man ſo eben im §. 31. und 32 erklärt hat, kann darzu dienen, mit einer Leichtigkeit zu zeigen, ob zwo Gröſſen, die einzeln genommen irrational ſind, nicht unter ſich rational ſind, wenn man eine mit der andern vergleichet: Das will ſo viel ſagen, ob ſie ſich nicht zu einander verhalten, wie eine ganze oder gebrochene Zahl zu einer andern ganzen

gebrochenen. Denn, man gebe den Wurzelzeichen der gegebenen Gröſſen einerley Exponenten und bringe alles auf den einfachſten Ausdruck. Findet ſich nun unter den Wurzelzeichen die nämliche Gröſſe, ſo ſind dieſe Gröſſen rational, wo nicht, ſo ſind ſie irrational. Man wird z. E. auf dieſe Art finden, daß $\sqrt{27}$ und $\sqrt{12}$ die für ſich irrational ſind, dennoch unter einander rational ſind. Denn ſie verhalten ſich unter einander, wie 3 : 2. Denn es iſt $\sqrt{27}=\sqrt{(9\times3)}=3\sqrt{3}$ (28) und $\sqrt{12}=\sqrt{(4\times3)}=2\sqrt{3}$. Folglich iſt $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}$. Folglich verhält ſich $\sqrt{27} : \sqrt{12}=3:2$.

Wenn man aber der Vorſchrift im §. 31. folgt, ſo wird man finden daß die Wurzelgröſſen $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, die für ſich irrational ſind, auch unter einander irrational ſind. Denn aus den gegebenen Gröſſen wird $\sqrt[3]{(2^3\times2)}$, $\sqrt[2]{(3^2\times2)}$. Wenn dieſe in Wurzelgröſſen von einerley Exponenten verwandelt werden, ſo werden ſie $\sqrt[6]{(2^6\times4)}$, $\sqrt[6]{(3^6\times8)}$ [§. 31.] und haben den nämlichen Werth, als die gegebenen. Werden dieſe auf den einfachſten Ausdruck gebracht, ſo wird daraus $2\sqrt[6]{4}$ und $3\sqrt[6]{8}$ (§. 28.) Dieſe haben nicht einerley Gröſſen unter dem Wurzelzeichen und ſind daher irrational, weil, wenn ſie ſich unter einander verhalten ſollten, wie eine Zahl zur andern, man bey ihrer Vergleichung die Wurzelzeichen müßte verſchwinden laſſen können. Dieſes iſt nur in dem Falle möglich, wo die Gröſſen unter dem Wurzelzeichen ſich gleich ſind.

§. 34.

Von der Addition der Wurzelgröſſen.

Wir werden, ehe wir dieſe Operation anfangen, voraus ſetzen, daß man mit den Wurzelgröſſen, wenn es nöthig iſt,

dieſe Vorbereitung, die wir eben angezeiget haben, vorgenommen habe, damit man leichter die Aehnlichkeit der Gröſſen von dieſer Art beurtheilen könne. Auch muß man wohl bemerken, daß **ähnliche** Wurzelgröſſen ſolche ſind, die vollkommen die nämliche Gröſſe unter ihrem Wurzelzeichen haben, deren Exponent auch derſelbige iſt, und die auſſerdem noch ähnliche Coëfficienten haben. Solche Gröſſen ſind $3b\sqrt{cd}$ und $5b\sqrt{cd}$: Allein die Gröſſen $a\sqrt[3]{f}$ und $a\sqrt[4]{f}$ ſind ſich nicht ähnlich. Dieſes vorausgeſetzt, ſo verfährt man folgendermaſſen, wenn man nachſtehende Gröſſen addiren will: $2a\sqrt{(bc)} - 5b\sqrt{(df)} + c\sqrt{f} + s$ (A) und $3c\sqrt{f} - a\sqrt{(bc)} - r - b\sqrt{(df)}$ (B). Man muß dieſe Gröſſen ſo ordnen, daß die ähnlichen Glieder der einen unter den ähnlichen Gliedern der andern zu ſtehen kommen, wie man dieſes in der Operation ſelbſt ausgeübet ſiehet.

$$2a\sqrt{(bc)} - 5b\sqrt{(df)} + c\sqrt{f} + s \; (A)$$
$$-a\sqrt{(bc)} - b\sqrt{(df)} + 3c\sqrt{f} - r \; (B)$$

Summe. $a\sqrt{(bc)} - 6b\sqrt{(df)} + 4c\sqrt{f} + s - r.$ (D)

Wenn man hierauf die Reduction der ähnlichen Glieder vornimmt, ſo wird man finden, daß die Summe der vieltheiligen Gröſſen A und B die Gröſſe D ſey.

§. 35.

Von der Subtraction der Wurzelgröſſen.

Man muß hier eben ſo, wie in der vorhergehenden Operation verfahren, ausgenommen, daß man die Zeichen der Glieder der vieltheiligen abzuziehenden Gröſſe verwechſelt: Wenn man folglich die vieltheilige Gröſſe $2\sqrt[3]{(ad)} - b\sqrt{(fg)} - a\sqrt[4]{(fm)} + b$ (G) von der Gröſſe $3b\sqrt{(fg)} - 2a\sqrt[4]{(fm)} + 4\sqrt[3]{(ad)} - d$ (M) abziehet, ſo wird man die Gröſſe L für

die geſuchte Differenz erhalten: Wie dieſes die Operation zeiget:

$$3b\sqrt{(fg)} — 2a\sqrt[4]{(fm)} + 4\sqrt[3]{(ad)} — d \quad (M)$$
$$+ b\sqrt{fg} + a\sqrt[4]{(fm)} — 2\sqrt[3]{(ad)} — b. \quad (G)$$

Differ. $4b\sqrt{(fg)} — a\sqrt[4]{(fm)} + 2\sqrt[3]{(ad)} — d — b. \quad (L)$

§. 36.

Von der Multiplication der Wurzelgröſſen.

Wir werden in der Folge im Gegenſatze der Wurzelgröſſen oder Irrationalgröſſen, diejenigen Gröſſen Rationalgröſſen nennen, die mit keinem Wurzelzeichen bezeichnet ſind, oder die durch kein Wurzelzeichen multipliciret werden. Man muß auch darauf aufmerkſam ſeyn, daß man bey einer jeden Wurzelgröſſe, die keine Coefficienten hat, die Einheit zum Coefficienten annehmen müſſe. So iſt alſo $\sqrt{c} = 1\sqrt{c}$. Wenn man daher

I. eine Irrationalgröſſe durch eine Rationalgröſſe multipliciren will, ſo iſt man darinn einig geworden, die Rationalgröſſe unmittelbar vor der Irrationalgröſſe ohne das geringſte andere Zeichen zu ſchreiben, aber dennoch die Regeln der Multiplication in Abſicht auf die Zeichen + und — zu beobachten. Folglich iſt $\sqrt{(ab)} \times c$ oder $c \times \sqrt{(ab)} = c\sqrt{(ab)}$; Eben ſo iſt $— b \times \sqrt{(df)}$ oder $— \sqrt{(df)} \times b = — b\sqrt{(df)}$; Imgleichen iſt $(c — d) \times \sqrt{(f^2 — g^2)} = (c — d)\sqrt{(f^2 — g^2)}$. Um aber

II. zwo Irrationalgröſſen durch einander zu multipliciren, ſo macht man damit den Anfang, daß man ihren Wurzelzeichen einerley Exponenten gibt, wenn ſie ſolche nicht haben. Hierauf multiplicirt man diejenigen Gröſſen durcheinander, die auſſerhalb dem Wurzelzeichen ſich befinden, und durch daſſelbe multipliciret werden ſollen. Endlich multiplicirt man auch diejenigen Gröſſen, die unter dem Wurzelzeichen ſtehen, durcheinander und ſetzt vor dieſem Produkte das gemeinſchaftliche Wurzelzeichen, ſo, daß es zu dieſem ganzen Produkte

kte gehöre. Dieſe ganze ſo bezeichnete Gröſſe muß unmittelbar an dem Produkte der Gröſſen geſchrieben werden, die auſſerhalb dem Wurzelzeichen ſich befinden werden. Man muß dabey nur immer die Regeln in Anſehung der Zeichen + und — beobachten und nicht vergeſſen, alles auf den ſimpelſten Ausdruck zu bringen. Es iſt alſo $2b\sqrt{(cd)}\times 4b\sqrt{(cd)} = 8b^2\sqrt{(c^2d^2)} = 8b^2cd$ [§. 19.] Gleichermaſſen iſt $2c\sqrt{(bd)}\times -3b\sqrt{(bc)} = -6bc\sqrt{(b^2cd)} = -6b^2c\sqrt{(cd)}$ [§. 21.] Eben ſo iſt $-\sqrt{(c-d)}\times +\sqrt{(c-d)} = -\sqrt{(c-d)^2} = -1\times (c-d)$ [§. 19.] $= -c+d$. Auch wird man finden, daß $2a\sqrt{(3bc)}\times 3b\sqrt{(4ab)} = 6ab\sqrt{(12ab^2c)} = 6ab\sqrt{(4b^2\times 3ac)} = 12ab^2\sqrt{(3ac)}$ ſey [§. 21.] So iſt auch $-\sqrt[4]{c^3}\times -\sqrt[4]{c} = +\sqrt[4]{c^4} = +c$ [§. 19.] Wollet ihr wiſſen, welches das Product aus $\sqrt[2]{(cd)}\times\sqrt[3]{(c^2d)}$ ſey, ſo verwandelt dieſe Gröſſen zuerſt in ſolche, deren Wurzelzeichen einerley Exponenten haben; Dann werdet ihr bekommen: $\sqrt[6]{(c^3d^3)}\times\sqrt[6]{(c^4d^2)}$ [§. 31.] $= \sqrt[6]{(c^7d^5)} = \sqrt[6]{(c^6+cd^5)} = c\sqrt[6]{(cd^5)}$ [§. 21.] Soll man endlich folgende Irrationalgröſſen durcheinander multipliciren, nämlich $\sqrt[6]{(cd)}$ und $\sqrt[4]{(df)}$; So gebe man ihren Wurzelzeichen einerley Exponenten; alsdenn wird $\sqrt[12]{(c^2d^2)}$ und $\sqrt[12]{(d^3f^3)}$ daraus: [§. 32.] Und dieſe, durch einander multiplicirt, geben $\sqrt[12]{(c^2d^5f^3)}$ für das Produkt aus $\sqrt[6]{(cd)}\times\sqrt[4]{(df)}$. Hätte man inzwiſchen

III. eine eingebildete Gröſſe durch eine eingebildete oder reelle zu multipliciren, ſo wird es beſſer ſeyn, die Multiplication blos anzuzeigen, damit man während der Rechnung und am Ende derſelben jederzeit eine eingebildete Gröſſe wieder erkennen könne. Um alſo $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{-cc}$ zu multi-

tiplíciren, ſo ſchreibe man: $\sqrt{a}\times\sqrt{-cc}$; Eben ſo wird das Product aus $\sqrt{-c^2}$ und $\sqrt{-d^2}$ folgendes ſeyn: $\sqrt{-c^2}\times\sqrt{-d^2}$; So iſt auch $c\sqrt{(df)}\times -f\sqrt{-d^2} = -cf\sqrt{df}\times\sqrt{-d^2}$; Und endlich $2c\sqrt{-d^2}\times -3b\sqrt{-d^2} = -6bc\sqrt{-d^2}\times\sqrt{-d^2} = -6bc\times -d^2$ [§. 26.] $=6bcd^2$.

Beweis. Es kommt darauf an, zu zeigen, daß, wenn die Wurzelzeichen einerley Exponenten haben, man die Gröſſen, die unter dem Wurzelzeichen ſtehen, durch einander multipliciren und dieſes Produkt mit dem gemeinſchaftlichen Wurzelzeichen bezeichnen müſſe. Denn was die Gröſſen, die auſſerhalb dem Wurzelzeichen ſtehen, anbetrifft, ſo hat es nicht die geringſte Schwürigkeit. Folglich iſt zu beweiſen, daß $\sqrt[s]{c}\times\sqrt[s]{d}=\sqrt[s]{cd}$ ſey. Dieſes iſt aber evident. Denn, wenn ihr dieſe beyden Gröſſen zur Dignität s erhebet, ſo werdet ihr von der einen und der andern Seite das nämliche Produkt cd finden. (Beweis des §. 21.) Da

IV. polynomiſche Irrationalgröſſen nur aus uninomiſchen zuſammen geſetzet ſind, ſo iſt es ſichtlich, daß, wenn man zwo ſolche polynomiſche Gröſſen durch einander zu multipliciren gibt, man nur die uninomiſchen Gröſſen ſo oft multipliciren müſſe, als es nöthig iſt, und daß man hier folglich alles dasjenige beobachten müſſe, was man im § 36. geſagt und bewieſen hat. Wir ſetzen beſtändig voraus, daß man Sorge getragen habe, ehe man die Operation anfängt, allen Wurzelzeichen einerley Exponenten zu geben. Es wird folglich hinreichend ſeyn, Beyſpiele anzuführen.

$$
\begin{array}{llll}
2b\sqrt{c} & +\ d\sqrt{f} & & \\
 & \times & & \\
2b\sqrt{c} & +\ d\sqrt{f} & & \\
\hline
4b^2c & +2bd\sqrt{(cf)} & & \\
 & +2bd\sqrt{(cf)} & +\ d^2f & \\
\hline
4b^2c & +2bd\sqrt{(cf)} & +\ d^2f. &
\end{array}
$$

= dem ganzen Product.

$$
\begin{array}{l}
3c + \sqrt{-d^2} \\
\times \\
3c + \sqrt{-d^2} \\
\hline
9c^2 + 3c\sqrt{-d^2} \\
\quad -3c\sqrt{(-d^2)} - 1 \times -d^2 \\
\hline
9c^2 \quad * \quad + d^2.
\end{array}
$$

= dem ganzen Product.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{(fg)} - \sqrt{(cc-dd)} \\
\times \\
\sqrt{(fg)} - \sqrt{(cc-dd)} \\
\hline
fg - \sqrt{(c^2fg - d^2fg)} \\
\quad - \sqrt{(c^2fg - d^2fg)} + c^2 - d^2. \\
\hline
fg - 2\sqrt{(c^2fg - d^2fg)} + c^2 - d^2.
\end{array}
$$

= dem ganzen Product.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d} - \sqrt[3]{f} \\
\times \\
\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{f} \\
\hline
\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{(cd)} - \sqrt[3]{cf} \\
\quad - \sqrt[3]{(cd)} - \sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{df} \\
\quad\quad + \sqrt[3]{(cf)} + \sqrt[3]{(df)} - \sqrt[3]{f^2}. \\
\hline
\sqrt[3]{c^2} \quad * \quad - \sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{(df)} - \sqrt[3]{f^2}.
\end{array}
$$

= dem ganzen Product.

§. 37.

Von der Diviſion der Irrationalgröſſen.

Da die Diviſion das entgegengeſetzte der Multiplication iſt, ſo muß alles, was in der vorigen Operation durcheinander multiplicirt worden iſt, in dieſer dividiret werden. Um alſo

I.) eine uninomiſche Irrationalgröſſe durch eine uninomiſche Rational- oder Irrationalgröſſe zu dividiren, ſo muß man damit anfangen, ſie zu lauter Irrationalgröſſen zu machen. (§. 20.) Und nachdem man den Wurzelzeichen des Dividendus und des Diviſors einerley Exponenten gegeben hat, (§. 31.) ſo muß man ganz ſimpel die Gröſſen, die unter dem Wurzelzeichen des Dividendus ſeyn werden, durch die nämlichen Gröſſen des Diviſors dividiren. Hierdurch wird eine Gröſſe entſtehen, die, wenn ſie mit dem gemeinſchaftlichen Wurzelzeichen bezeichnet iſt, der geſuchte Quotient ſeyn wird. Wenn man folglich $c\sqrt{d}$ durch $-\sqrt{(cd)}$ dividiren ſoll, ſo ſchreibe man

$$\frac{c\sqrt{d}}{-\sqrt{(cd)}} = \frac{\sqrt{(c^2d)}}{-\sqrt{(cd)}} \text{ [§. 20.] } = -\sqrt{\left(\frac{c^2d}{cd}\right)}$$

$= -\sqrt{c}$. Dieſes iſt der geſuchte Quotient. Denn es iſt der Diviſor $-\sqrt{cd}\times$ durch den Quotienten $-\sqrt{c} = \sqrt{(c^2d)}$ [§. 36.] = dem Dividendus $c\sqrt{d}$ [§. 28.]

Wollet ihr 3 durch $\sqrt{5}$ dividiren, ſo ſchreibet $\frac{3}{\sqrt{5}}$ $= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}$ [§. 20.] $= \sqrt{\frac{9}{5}} = \sqrt{(9\times\frac{1}{5})} = \sqrt{(3\sqrt{\frac{1}{5}}}$ [§. 21.] Denn es iſt $3\sqrt{\frac{1}{5}}$ oder $\sqrt{(\frac{9}{5})}\times\sqrt{5} = \sqrt{9}$ [§. 36.] = dem Dividendus 3. Eben ſo, wenn man $\sqrt[3]{21}$ durch 7 dividiren ſoll, ſo muß man ſchreiben: $\frac{\sqrt[3]{21}}{7} = \frac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{7^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3\times7}{7\times7\times7}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3}{49}}$.

Wenn man uns $-\sqrt{(c^2-d^2)}$ durch $-\sqrt{(c+d)}$ zu dividiren giebt, ſo muß man ſchreiben $\frac{-\sqrt{(c^2-d^2)}}{-\sqrt{(c+d)}}$ $=+\sqrt{\frac{(c-d)\times(c+d)}{c+d}}=+\sqrt{(c-d)}$. Es ſey noch $\sqrt{(c^4d^2)}$ durch $\sqrt{(c^2d)}$ zu dividiren; So ſetze man $\frac{\sqrt{(c^4d^2)}}{\sqrt{(c^2d)}}=\sqrt{\frac{(c^4d^2)}{(c^2d)}}=\sqrt{(c^2d)}=c\sqrt{d}$. Dieſes iſt der geſuchte Quotient. [§. 28.]

Laſſet uns endlich annehmen, daß man $\sqrt[3]{(cd)}$ durch $\sqrt[2]{(cl)}$ dividiren wolle. So iſt $\frac{\sqrt[3]{(cd)}}{\sqrt[2]{(cd)}}=\frac{\sqrt[6]{(c^2d^2)}}{\sqrt[6]{(c^3d^3)}}$ [§ 31.] $=\sqrt[6]{\frac{(c^2d^2)}{(c^3d^3)}}=\sqrt[6]{\frac{1}{cd}}$. Dieſes alles beſtätigt ſich, wenn man den Quotienten durch den Diviſor multiplicirt. Denn man findet immer den Dividendus wieder. Wenn man aber

II.) eine eingebildete Wurzel durch eine eingebildete zu dividiren hat, ſo iſt es genug, die Diviſion derſelben anzuzeigen, indem man den gegebenen Gröſſen die Form eines Bruchs gibt, und ſie immer auf den einfachſten Ausdruck bringt. Dieſes geſchiehet deswegen, damit man die eingebildeten Gröſſen wieder erkennen könne. So iſt alſo $\sqrt{-aa}$ dividirt durch $\sqrt{-bb}=\frac{\sqrt{-aa}}{\sqrt{-bb}}$. Eben ſo $\sqrt{-4}$ dividirt durch $\sqrt{-2}=\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}}$; und $cd\sqrt{-cc}$ dividirt durch $d\sqrt{-cc}$ gibt $\frac{cd\sqrt{-cc}}{-d\sqrt{-cc}}=-c$ als den Quotienten. Auch wird man finden, daß $-d^2$ dividirt durch $\sqrt{-d^2}=$ ſey $\frac{-d^2}{\sqrt{-d^2}}$

$$=\frac{\sqrt{-d^2}\times\sqrt{-d^2}}{\sqrt{-d^2}}=\sqrt{-d^2}$$, als dem geſuchten Quotienten. Wenn

III.) der Dividendus eine vieltheilige Gröſſe iſt, und der Diviſor nur ein Glied hat, ſo muß man nach und nach jedes Glied des Dividendus durch den Diviſor dividiren. Alsdenn werden alle particulaire Quotienten den geſuchten Quotienten geben. Hier iſt ein Exempel:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{24}+\sqrt{48}-\sqrt{72} & \sqrt{6} \\ \hline (^*)-2\sqrt{6} \text{ oder } -\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{72} & 2+\sqrt{8}-\sqrt{12}. \text{oder} \\ \hline * \quad * \quad * & -2\sqrt{3}, \text{ als der Quotient.} \end{array}$$

Es ſey ferner $c\sqrt{cd}-f\sqrt{cf}-c\sqrt{df}$ durch $-\sqrt{c}$ zu dividiren. Man muß alsdenn damit den Anfang machen, daß man den Dividendus in eine vieltheilige Gröſſe verwandelt, deren Glieder insgeſammt alle ihre Buchſtaben unter dem Wurzelzeichen ſtehen haben, (§. 22.) wie man dieſes bey B ſiehet. Darnach verfährt man wie oben.

$$\begin{array}{r|l} (B)\sqrt{c^3d}-\sqrt{cf^3}-\sqrt{(c^2df)} & -\sqrt{c} \\ \hline -\sqrt{c^3d}+\sqrt{cf^3}-\sqrt{(c^2df)} & -c\sqrt{d}+f\sqrt{f}+\sqrt{(cdf)} \\ \hline * \quad * \quad * & \text{der Quotient.} \end{array}$$

IV.) Es iſt leicht möglich, daß ſowohl der Dividendus als der Diviſor vieltheilige Gröſſen ſind. Alsdenn muß man, wenn kein Hinderniß da iſt, ſo verfahren wie im §. 64. der Algebr.

(*) Man vergleiche hiermit den §. 35, in welchem von der Subtraction gehandelt wurde. Sonſt mögte man ſich wundern, daß man das Factum aus 2 und $\sqrt{6}$ als $-\sqrt{24}$ angegeben hätte, da es doch $+\sqrt{24}$ ſeyn ſollte. Es wurde nämlich in dem angezogenen §. von dem Herrn Verfaſſer die Regel gegeben, daß man die Zeichen der Glieder des Subtrahendus umkehren und alsdenn ſo, wie bey der Addition, verfahren ſolle. B.

Algebr. im I B. der Inſtit., allwo man die Methode angegeben hat, zuſammengeſetzte algebraiſche Gröſſen, unter welchen keine Irrationalgröſſe iſt, durcheinander zu dividiren.* Wir ſetzen hierbey immer die Vorbereitungen, wovon wir oben geredet ha-

* Die Regeln, wovon unſer Herr Auctor hier redet, ſind folgende. Geſetzt, man ſoll $3cy^2+c^3-3c^2y-y^3$ durch $c-y$ dividiren, ſo iſt das erſte, was man vorzunehmen hat, daß man die Gröſſen gehörig ordne. Dieſes geſchiehet, wenn man ſie ſo neben einander ſchreibet, wie es der Grad der Dignität erfordert. Man fängt nämlich allemal von der höchſten Dignität an. Dieſe iſt hier nun z. E. c^3 oder y^3. Daher können dieſe vorgegebene Gröſſen folgendermaſſen geſetzet werden, und alsdenn die Diviſion ſelbſt geſchehen.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
c^3 & -3c^2y & +3cy^2 & -y^3 & c-y \\
-c^3 & +c^2y & & & c^2-2cy+y^2. \text{ der Quotient.} \\
\hline
 & -2c^2y & +3cy^2 & & \\
 & +2c^2y & -2cy^2 & & \\
\hline
 & & +cy^2 & -y^3 & \\
 & & -cy^2 & +y^3 & \\
\hline
 & & * & * &
\end{array}
$$

Bey der Operation ſelbſt verfährt man alſo. Man fragt, wie oft der erſte Theil des Diviſors im erſten Theile des Dividendus z. E. hier in dieſem Exempel c in c^3 enthalten iſt? Man findet c^2. Dieſes ſchreibt man an der Stelle des Quotienten und nun multiplicirt man durch dieſen Quotienten den ganzen Diviſor $c-y$, wie in der gewöhnlichen Diviſion, und ſchreibt die einzelnen Produkte unter den ähnlichen Gröſſen mit verwechſelten Zeichen, z. E. hier $-c^3+c^2y$. Nun ziehet man einen Strich darunter und addirt, ſo entſteht $-2c^2y$. Hierzu nimmt man den nächſten Theil des Dividendus $3cy^2$ herunter und unterſucht wieder, wie oft c in $-2c^2y$ enthalten ſey? Nämlich $-2cy$ mal. Dieſe Gröſſe wird gehörig zum Quotienten geſchrieben, und der ganze Diviſor dadurch wieder multipliciret und die Producte, wie vorher, geſchrieben und alsdenn addiret, ſo bleibt noch $+cy^2$. Hierzu kommt der letzte Theil des Dividendus $-y^3$ herunter und nun verfährt man auf die nämliche Art, ſo wird ſich alles aufheben. Mehreres von

haben, voraus; denn dieſe gehören nur für die Irrationalgröſſen. Um alſo $c\sqrt{(bc)}-c\sqrt{(bd)}+d\sqrt{(cm)}-d\sqrt{(dm)}$ durch $\sqrt{c}-\sqrt{d}$ zu dividiren, ſo muß man anfänglich alle Buchſtaben, die auſſer den Wurzelzeichen ſtehen und durch die Multiplication damit verbunden ſind, unter die Wurzelzeichen bringen. Darauf muß man ſo verfahren, wie man es in G ſiehet, allwo der Dividendus die nöthige Vorbereitung bekommen hat.

$$(G)\ \sqrt{bc^3}-\sqrt{bc^2d}+\sqrt{cd^2m}-\sqrt{d^3m} \quad \Big| \quad \sqrt{c}-\sqrt{d}$$
$$-\sqrt{bc^3}+\sqrt{bc^2d}-\sqrt{cd^2m}+\sqrt{d^3m} \quad \Big| \quad c\sqrt{b}+d\sqrt{m}$$

* * * *

V.) Da es inzwiſchen in der Befolgung dieſer Methode öfters geſchiehet, daß man die Diviſion der Irrationalgröſſen nicht gänzlich zu Ende bringen kan, ſo hat man ſeine Zuflucht zu andern Veränderungen genommen, die zuweilen dieſem Uebel abhelfen. Um das Kunſtſtück davon begreiflich zu machen, ſo ſey die Gröſſe $4\sqrt{7}+3\sqrt{5}$ durch $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ zu dividiren. Setzet man dieſe Gröſſe in der Form eines Bruchs, ſo wird man bekommen $\frac{4\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$. Es iſt aber unſtreitig, daß dieſer Bruch nichts von ſeinem Werthe verändert, wenn man den Zähler und Nenner deſſelben durch einerley Gröſſe multipliciret. Wenn man folglich beyde durch $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ multiplicirt, ſo wird man dieſen neuen Bruch finden $\frac{12\sqrt{14}+9\sqrt{10}-8\sqrt{21}-6\sqrt{15}}{6}$, der einerley Werth mit dem vorigen hat. Wenn man nun die Diviſion vollen-

von dieſer Diviſion, wobey noch verſchiedene Anmerkungen und Cautelen gegeben werden könnten, auszuführen, erlaubet der Raum hier nicht. Man leſe den angeführten §. der Inſtitut. des Herrn Verfaſſers oder irgend eine andere algebraiſche Anweiſung, deren wir ja eine ziemliche Menge haben. B.

enden will, ſo muß man ein jedes Glied des Zählers durch den Nenner 6 dividiren, alsdenn wird man zum geſuchten Quotienten bekommen: $2\sqrt{14}+\frac{3}{2}\sqrt{10}-\frac{4}{3}\sqrt{21}-\sqrt{15}$.

Die ganze Kunſt, auf ſolche Art zu dividiren, beſtehet augenſcheinlich darinn, zu machen, daß der Diviſor von den Irrationalgröſſen befreyet werde, wodurch alsdenn die Operation ſehr ſimpel wird. Allein dieſes iſt nicht immer ſehr leicht, ſondern zuweilen iſt es ſehr ſchwer und mühſam, eine Gröſſe zu finden, die geſchickt iſt, die Wurzelzeichen des Diviſors wegzuſchaffen. Dieſes iſt eines von den Geheimniſſen einer ſehr feinen Kunſt, die man die Analyſis * nennet, wovon ich aber in dieſem Werke gar nicht handeln werde.

§. 38.

Eine Irrationalgröſſe zu irgend einer gegebenen Dignität zu erheben.

Da die Operation gar nicht von der Multiplication unterſchieden iſt, ſo muß man in dieſem Betracht allem folgen, was man im §. 36. gelehret und bewieſen hat. Man wird folglich eine Irrationalgröſſe zur 2ten Dignität erheben, indem man ſie einmal durch ſich ſelbſt multipliciret. Man muß ſie zweymal durch ſich ſelbſt multipliciren für die 3te Dignität, und dreymal für die 4te Dignität. Wollet ihr das Quadrat von $\sqrt[s]{d}$ haben, ſo ſchreibet $\sqrt[s]{d}\times\sqrt[s]{d}=\sqrt[s]{d^2}$ [§. 36.] Dieſes iſt das Quadrat oder die 2te Dignität von der gegebenen Irrationalgröſſe. Der Cubus davon oder die 3te Dignität wird folgende Gröſſe ſeyn: $\sqrt[s]{d}\times\sqrt[s]{d}\times\sqrt[s]{d}=\sqrt[s]{d^3}$ u. ſ. w. Ueberhaupt wird man eine Irrationalgröſſe zu einer Dignität p erheben, wenn man die Gröſſe, die unter dem Wurzelzeichen

---

* Analyſis heißt eigentlich die Kunſt aufzulöſen oder die Gröſſen zu finden, die zur Formirung einer Gröſſe etwas beygetragen haben.

zeichen ſtehet, zu dieſer Dignität erhöhet. Folglich iſt $\sqrt[s]{y}$ zur Dignität p erhoben $=\sqrt[s]{y^p}$. Denn es iſt $\sqrt[s]{y}=y^{\frac{1}{s}}$ [§. 4.] Nun iſt aber $y^{\frac{1}{s}}$ zur Dignität p erhoben $=y^{\frac{p}{s}}$ [§. 11.] $=\sqrt[s]{y^p}$. [§. 14.] Folglich ꝛc.

Eben ſo iſt $\sqrt[s]{y^p}$ zur Dignität n erhoben $=y^{\frac{pn}{s}}$ [§. 11.] $=\sqrt[s]{y^{pn}}$ [§. 14.] Folglich ꝛc.

§. 39.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus Irrationalgröſſen.

Man darf bey dieſer Operation nur an der Stelle des Exponenten der gegebenen Irrationalgröſſe das Product aus dieſem Exponenten und aus dem Exponenten der geſuchten Wurzel ſetzen, und darauf alles auf den einfachſten Ausdruck bringen. Um alſo die 2te Wurzel aus $\sqrt[3]{c}$ zu bekommen, ſchreibe man: $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{c}\,*)}=\sqrt[3\times2]{c}=\sqrt[6]{c}$. Denn es iſt $\sqrt[3]{c}=c^{\frac{1}{3}}$ [§. 14.] Folglich aus dem nämlichen Grunde iſt $\sqrt[2]{c^{\frac{1}{3}}}=c^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{c}$; Folglich iſt auch $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{c})}=\sqrt[6]{c}$.

Es

(*) Dieſer Ausdruck $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{c})}$ zeiget die 2te Wurzel aus der 3ten Dignität von c an.

Es iſt gleichfalls die Cubikwurzel aus $\sqrt[5]{8} = \sqrt[5\times3]{8} = \sqrt[15]{8}$

Denn, weil $\sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}}$, und weil $\sqrt[3]{8^{\frac{1}{5}}} = 8^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{8}$ iſt,

ſo iſt auch $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[15]{8}$.

Eben ſo iſt $\sqrt[2]{\sqrt[3]{c^2}} = \sqrt[3\times2]{c^2} = \sqrt[6]{c^2} = \sqrt[3]{c}$ wenn man die Gröſſe zu dem einfachſten Ausdruck bringt. Dieſes läßt ſich thun, indem man den Exponenten des Wurzelzeichens und der Gröſſe, die unter demſelben ſtehet, durch einerley Gröſſe dividiret. Auſſerdem iſt es leicht einzuſehen daß $\sqrt[6]{c^2}$ auf das ſimpelſte ausgedrucket $= \sqrt[3]{c}$ ſey. Denn es iſt $\sqrt[6]{c^2} = c^{\frac{2}{6}} = c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$ [§. 14.]

Ueberhaupt iſt die Wurzel r aus $\sqrt[s]{c^3} = \sqrt[rs]{c}$. Denn es iſt $\sqrt[s]{c} = c^{\frac{1}{s}}$; Folglich iſt $\sqrt[r]{(\sqrt{c})} = \sqrt[r]{c^{\frac{1}{s}}} = c^{\frac{1}{rs}} = \sqrt[rs]{c}$ [§. 14.]

Endlich iſt die Wurzel r aus $\sqrt[s]{c^r} = \sqrt[r\times s]{c^r} = \sqrt[s]{c}$. Denn es iſt $\sqrt[s]{c^r} = c^{\frac{r}{s}}$. Folglich iſt $\sqrt[r]{(\sqrt[s]{c^r})} = \sqrt[r]{c^{\frac{r}{s}}} = c^{\frac{r}{rs}} = c^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{c}$ [§. 14.]

§. 40.

Hieraus erkennet man, daß es ſehr leicht ſey, einer Gröſſe nur ein einziges Wurzelzeichen zu verſchaffen, wenn ſie meh-

rere

rere derſelben haben ſollte. Man darf hierzu nur an der Stelle des Exponenten des Wurzelzeichens, unter welchem die Rationalgröſſe ſtehet, das Product aus allen Exponenten dieſer Wurzelzeichen ſetzen. Folglich iſt $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{(\sqrt[4]{a^3})})}=\sqrt[2\times3\times4]{a^3}$ $=\sqrt[24]{a^3}=\sqrt[8]{a}$. Denn es iſt $\sqrt[3]{(\sqrt[4]{a^3})}=\sqrt[12]{a^3}$ [§. 39.] Folglich iſt $\sqrt[12]{(\sqrt[3]{(\sqrt[4]{a^3})})}=\sqrt[2]{(\sqrt[12]{a^3})}=\sqrt[24]{a^3}$ [§. 39] $=a^{\frac{3}{24}}$ [§. 14.] $=a^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{a}$.

Eben ſo werdet ihr finden, daß $\sqrt[2]{(x^2\sqrt[4]{(x^3\sqrt[5]{x^4})})}$ $=\sqrt[2\times4\times5]{x^{59}}=\sqrt[40]{x^{59}}$ ſey. Laſſet anfänglich diejenigen Gröſſen, die auſſerhalb dem Wurzelzeichen ſtehen und durch die Multiplication mit demſelben verbunden ſind, unter die Wurzelzeichen gehen. (§. 22.) Multiplicirt darauf alle Exponenten der Wurzelzeichen durcheinander, damit das Product aus denſelben der Exponent des einzigen noch übrigen Wurzelzeichens ſeyn möge. (§. 39.)

Wir werden nicht tiefer in dieſe Rechnung hineingehen, ob man gleich darinn viele andere ſchöne Entdeckungen gemacht hat, die von einer unentbehrlichen Brauchbarkeit für diejenigen ſind, die ſich der Analyſis widmen wollen. Sie ſind aber für unſer jetziges Object überflüßig.

Von der Parabel.

§. 1.

Erklårungen.

Man n hme irgend einen Triangel HDC (Fig. 1.) Man ſtelle ſich vor, daß durch deſſen eine Seite HC Linien wie BS g o en ſind, die mit der Grundlinie CD parallel laufen. Wenn man ſich itzund e nbildet, daß der Triangel HDC ſich um ſeine Seite HD, wie um ein Gewinde herum dre e, ſo daß er einen Umkreiß mache, ſo wird er einen Raum beſchreiben, der, wenn man ihn als voll annimmt, den Namen Kegel führt. HD iſt die Axe deſſelben; CHF der Triangel, der entſtehet, wenn man den Kegel nach der Axe durchſchneidet *; Der Cirkel CLF iſt die Gründfläche deſſelben; H deſſen Spitze.

Es iſt klar, daß bey dieſem herumwälzen die Linien CD und BS parallele Cirkel beſchreiben, weil man voraus ſetzt, daß ſie ihre parallele Lage während der ganzen Bewegung behalten. Wenn man nun annimmt, daß man einen Kegel durch eine Fläche, die mit ſeiner Baſis parallel iſt, durchſchneidet, ſo wird dadurch ein Parallel-Cirkel entſtehen, und der Axentriangel, der dieſe beyden Cirkel durchſchneidet, wird verurſachen, daß ihre gemeinſchaftlichen Durchſchnitte BM und CF parallel ſeyn werden. (369. Inſtitut II Band). Nun hat man aber den verſchiedenen Durchſchnitten, die man durch einen Kegel machen kann, den Namen der Kegelſchnitte gegeben. Und ob zwar der Triangel und Cirkel mit zu dieſen Kegelſchnitten gehören,

* Wir wollen dieſen in Zukunft im teutſchen immer der Kürze weg n den Axentriangel nennen. B.

gehören, ſo rechnet man ſie doch ordentlicher Weiſe nicht hieher, weil man vorausſetzet, daß man deren Eigenſchaften ſchon aus der Elementargeometrie kennet. Wir werden hier alſo beſonders nur diejenigen Kegelſchnitte abhandeln, die vom Triangel und Cirkel verſchieden ſind. Man wird in der Folge ſehen, daß man deren nur 3 haben kann.

Die Geſchichte lehret uns nicht, ob die erſten Geometer ſich durch den Zug einer Curioſität oder durch den Zwang der Bedürfniſſe auf die feinen Unterſuchungen dieſer Schnitte geleget haben. (a) Allein wenn auch dieſe Speculationen im Anfange eine Würkung der Bewegungsgründe der erſtern Art waren, ſo ſind ſie itzt doch eine Frucht der letztern geworden.

Man

(a) Die Geometrie ſcheint mir von der äuſſerſten Nothwendigkeit zu ſeyn, das heißt, es hat dieſe Geometrie, die zur Erhaltung unſers Wohls in der menſchlichen Geſellſchaft durchaus nöthig iſt, ſehr bald erfunden werden müſſen. So viele Perſonen haben an dergleichen Entdeckungen ein ſo dringendes Intereſſe gehabt, daß man ſich gar nicht wundern darf, daß die nützlichſten Erfindungen auch zugleich die älteſten ſind. Allein was die Geometrie der krummen Linien anbetrifft, ſo ſiehet man nicht, daß die erſten Bedürfniſſe der Menſchen ſie dahin geführet haben. Denn die bloſſe Nothwendigkeit fordert keine ſo tiefe Betrachtungen. Folglich muß ihr Urſprung der Curioſität des menſchlichen Verſtandes zugeſchrieben werden, welcher beſtändig durch neue Empfindungen gerührt zu werden ſuchet.

Der erſte Erfinder der Kegelſchnitte und der genaue Zeitpunkt ihrer Erfindung ſind gleich unbekannt. Man weiß nur dieſes, daß die krummen Linien ſehr alt ſind. Archimedes, der für mehr als 2000 Jahren lebte, gedenket in ſeinen Schriften der Lehre der Kegelſchnitten nnd erwähnet ihrer, als ſolcher krummen Linien, die ſchon ſeinen Vorgängern bekannt waren. Kurze Zeit nach ihm arbeitete Apollonius Pergaeus über dieſe Kegelſchnitte mit ſolchem Erfolg, daß er deswegen den Namen des groſſen Geometers erhalten hat. Durch die

Neuern

Man hat entdeckt, daß die Natur in vielen Fällen nach den Geſetzen der krummen Linien, die dieſe Schnitte hervorbringen, ſich richte, und daß ſie zur Erreichung der Vollkommenheit in den Künſten unentbehrlich ſind. Man muß alſo die Eigenſchaften derſelben ſelbſt zur Vermehrung unſers Wohlſeyns ſtudieren.

§. 2.

Erſter Satz. Eine Linie DA (Fig. 2.) die auf einer Ebene BM perpendiculair ſtehet, iſt nothwendig gegen alle Linien dieſer Fläche AB, AC, AM, und gegen andere, die durch den Endpunkt A dieſer Perpendiculairlinie gezogen ſind, gleichfals perpendiculair.

Beweis. Denn eine Linie, die auf einer Ebene perpendiculair ſtehet, iſt eine ſolche Linie, welche von keiner Seite gegen ihre Ebene, über welcher ſie aufgerichtet iſt, mehr geneigt iſt, als von einer andern. Wäre nun dieſe Linie AD nicht gegen alle dieſe Linien, die durch den Endpunkt A auf der Ebene BM gezogen ſind, perpendiculair, ſo müßte ſie nothwendig gegen eine Seite ſich mehr neigen, welches wider die Vorausſetzung iſt. Folglich . . . . W. z. E. W.

§. 3.

Zweyter Haupt-Satz. Aus einem Punkte A, den man auf einer Ebene annimmt, kann man über dieſe Ebene nur

---

Neuern iſt indeſſen Apollonius in Vergeſſenheit gerathen. Gregorius von St. Vincent hat ſich durch die Deutlichkeit in ſeinen Beweiſen beſonders hervorgethan, und ich weiß nicht, warum unſere Zeitgenoſſen ihn ſo wenig ſuchen. Heut zu Tage ſcheint man in Frankreich nur den Herrn de la Hire und vornämlich den Herrn Guisnee und von Hoſpital zu kennen. Ohne Zweifel, weil dieſe letzte zu ihren Unterſuchungen die Algebra gebrauchen. Ein Mittel, das zu Entdeckungen das bequemſte, das geſchwindeſte, das allgemeinſte und folglich das ſchönſte iſt, was der menſchliche Verſtand jemals erfunden hat.

nur eine Perpendiculairlinie AD aufrichten. Es iſt auch nicht möglich zwo Perpendiculairlinien aus einem Punkte D, der über einer Ebene angenommen iſt, auf dieſe Fläche fallen zu laſſen.

Beweis I. Weil AD auf der Fläche BM perpendiculair ſtehet, ſo macht ſie mit allen Linien dieſer Fläche, welche durch den Punkt A gehen rechte Winkel. Folglich wird eine jede Linie AS, die von AD unterſchieden iſt, gröſſere oder kleinere Winkel machen, und folglich nicht perpendiculair ſeyn.

II. Aus der nämlichen Urſache kann jede andere Linie DO auf der Ebene BM nicht perpendiculair ſeyn. Denn wäre ſie es, ſo würde ſie es auch gegen AB ſeyn, welche durch den Punkt O gezogen iſt, und es würde der Winkel AOD, ſo wie der Winkel DAO, ein rechter Winkel ſeyn. Folglich würden die drey Winkel in einem Triangel mehr als zween rechte Winkel betragen, welches unmöglich iſt. Folglich iſt es auch unmöglich daß die Linie DO eine Perpendiculairlinie ſey. W. z. E. W.

§. 4.

Dritter Haupt-Satz. Der gemeinſchaftliche Durchſchnitt DA von zween Flächen BM, CT, die auf einer 3ten Ebene OS perpendiculair ſtehen, iſt auch gegen dieſe 3te Ebene perpendiculair.

Beweis. Laſſet uns aus dem Punkte A über die Ebene OS eine Perpendiculair-Linie aufrichten. Dieſe muß ſich nothwendig in der Fläche BM und in der Fläche CT befinden. Denn eine Perpendiculairlinie auf einer Ebene neiget ſich gegen keine Seite. Wenn ſie ſich alſo nicht in beyden Ebenen BM und CT befinde, ſo müßten ſich dieſe Ebenen davon entfernen und ſie müßten nothwendig auf die Ebene OS mehr gegen die eine als gegen die andere Seite ſich neigen, welches wider die Bedingung iſt. Folglich befindet ſich

die Perpendiculairlinie, die aus dem Punkte A über die Ebene OS aufgerichtet iſt, nothwendig in den beyden Flächen BM und CT. Nun gibt es aber nur eine einzige ſolche Perpendiculairlinie. (§. 3.) Sie kann ſich alſo nur in der gemeinſchaftlichen Ausdehnung dieſer Ebenen, das heißt, in ihrem gemeinſchaftlichen Durchſchnitt befinden. Folglich iſt ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt nicht von der Perpendiculairlinie unterſchieden, die man aus dem Punkt A auf die Ebene OS aufrichtet. Folglich iſt dieſer gemeinſchaftliche Durchſchnitt gegen die Ebene OS perpendiculair. W. z. E. W.

§. 5.

Erklärungen. Laſſet uns annehmen, daß der Triangel HCF (Fig. 4.) der Durchſchnitt eines graden oder ſchiefen Kegels ſey, daß dieſer Durchſchnitt durch die Axe dieſes Körpers gehe, und daß man von einem Punkte A der Seite HC dieſes Triangels die Linie AB innerhalb ſeiner Fläche parallel mit der andern Seite HF ziehe, und daß man durch dieſe Linie AB eine Fläche gehen laſſe, die perpendiculair gegen die Ebene des Triangels HCF iſt, ſo wird dieſe Ebene in dem Körper des Kegels eine neue Oberfläche DMATS machen, welcher man den Namen **Parabel** gegeben hat. (*a*) Die Linie AB iſt die Axe derſelben, der Punkt A ihr **Scheitelpunkt**; Eine jede Linie MP oder DB, die von einem Punkte D oder M des Umkreiſes perpendiculair auf die Axe gezogen iſt, heißt die **Ordinate** gegen dieſe Axe. Ein jeder Theil dieſer Axe, welcher zwiſchen der Spitze und zwiſchen dem Punkt, wo eine Ordinate die Axe durchſchneidet, enthalten iſt, heißt eine **Abſciſſe**. Folglich ſind die Linien AB, AP Abſciſſen. Zuweilen nennet man ſie auch **Abſchnitte** oder **Pfeile** **Sagittae** (*b*).

(*a*) Man wird bald die Urſache davon ſehen.

(*b*) Aus dem Verhältniſſe aller dieſer Linien gegen einander iſt man auf die Beſtimmung der Eigenſchaften dieſer krummen Linien gekommen.

§. 6.

Vierter Haupt-Satz. In einer Parabel verhalten ſich die Quadrate der Ordinaten, wie die ihnen zugehörige Abſciſſen. Das heißt: $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$.

Beweis. Wir wollen uns einbilden, daß man durch irgend einen Punkt M des Umkreiſes der Parabel eine Fläche durchgehen laſſe, welche den Körper des Kegels parallel mit ſeiner cirkelförmigen Grundfläche durchſchneide, ſo wird dieſe Fläche, deren Durchſchnitt auch ein Cirkel iſt (§. 1.) perpendiculair gegen die Fläche des Axentriangels und zwar deswegen ſeyn, weil man die Grundfläche des Kegels perpendiculair auf der Fläche dieſes nämlichen Triangels angenommen hat. Folglich ſind die Parabel DAS und der Cirkel CDFS gegen die nämliche Ebene HCF perpendiculair. Folglich iſt ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt DBS auch gegen dieſe Ebene perpendiculair. (§. 4.) Folglich iſt dieſer Durchſchnitt auch gegen den Diameter CF und gegen die Axe AB perpendiculair, weil dieſe beyde Linien durch deſſelben äuſſerſten Punkt B gehen. (§. 2.) Denn dieſe Linien liegen in der Ebene des Axentriangels. Folglich iſt DB eine Ordinate gegen die Axe AB (§. 5.) und DB = BS (vermöge der Natur des Cirkels). Und wenn wir auf eben die Art in Abſicht auf den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt MPT der Parabel und des Cirkels OMGT ſchlieſſen, ſo werden wir finden, daß MPT ſowohl perpendiculair gegen den Diameter OG als gegen die Axe AB ſey; daß folglich MP eine andere Ordinate der Parabel und MP = PT ſey.

Wenn man dieſes hier wohl verſtanden hat, ſo laßt uns die ähnlichen Triangel APO und ABC betrachten. Es verhält ſich alsdenn AP : AB = PO : BC und PO : BC = PO × PG : BC × BF. Denn es iſt PG = BF wegen die Parallellinien AB und HF und PG und BF (conſtr.) Folglich verhält ſich AP : AB = PO × PG : BC × BF. Es iſt

aber

aber $PO \times PG = \overline{PM}^2$ und $BC \times BF = \overline{BD}^2$ (nach der Natur des Cirkels); Folglich wenn man dieſe letzten Werthe ſubſtituirt, ſo haben wir folgendes Verhältniß: $AP : AB = \overline{PM}^2 : \overline{BD}^2$ oder $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$. W. z. E. W.

* §. 7.

Wenn umgekehrt der Durchſchnitt eines Kegels, der perpendiculair gegen den Axentriangel dieſes Körpers HCF und weder parallel noch antiparallel mit ſeiner cirkelförmigen Grundfläche iſt (*a*) ein ſolcher Durchſchnitt iſt, daß die Quadrate der Ordinaten der Axe dieſes Durchſchnitts ſich zu einander verhalten wie die ihnen zugehörige Abſciſſen, ſo wird dieſer Durchſchnitt eine Parabel ſeyn; Das heißt, wenn man in dieſem Falle das Verhältniß hat: $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$, ſo wird die Axe dieſes Durchſchnitts mit der Seite HF des Triangels HCF parallel ſeyn.

Beweis. Laſſet uns annehmen, daß, wie man dieſen Durchſchnitt machte, alle Cirkel, die perpendiculair gegen die Ebene des Axentriangels dieſes Kegels ſind, ſchon beſchrieben waren, ſo iſt es klar, daß dieſer Durchſchnitt durch die Fläche mehrerer dieſer Cirkel habe gehen müſſen; z. E. durch die Cirkel OMGT und CDFS, und daß folglich die gemeinſchaftlichen Durchſchnitte PM und BD, die der Schnitt dieſer Ebene macht auf die Fläche des Triangels HFC perpendiculair ſind. (§. 4.) Da alſo PM und BD deswegen perpendiculair gegen die Axe AB des Durchſchnitts und gegen die Diameter OG und CF der Cirkel ſind (§. 2.), ſo ſiehet man, daß dieſe Linien zu gleicher Zeit Ordinaten gegen die Axe des Schnittes und Ordinaten gegen die Diameter der

(*a*) Man ſehe im § 4. der Ellypſe, was ein antiparalleler Durchſchnitt ſey.

Cirkel ſind. Folglich iſt $\overline{PM}^2 = OP \times PG$ und $\overline{BD}^2 = CB \times BF$; Es verhält ſich aber nach der Bedingung $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$ Wenn man folglich in dieſem Verhältniſſe den Werth von $\overline{PM}^2$ und $\overline{BD}^2$ ſetzet, ſo bekommt man $OP \times PG : CB \times BF = AP : AB$. Nun verhält ſich wegen der Aehnlichkeit der Triangel APO und ABC $AP : AB = OP : CB$. Folglich auch $OP \times PG : CB \times BF = OP : CB$. Folglich iſt $OP \times PG \times CB = CB \times BF \times OP$. Wenn man folglich mit $(OP \times CB)$ dividiret, ſo wird man finden, daß $PG = BF$ ſey. Folglich, weil die Cirkel OMG und CDF parallel ſind (conſtr.), ſo ſind auch ihre gemeinſchaftliche Durchſchnitte OG, CF, die durch die Ebene HCF gemacht ſind, gleichfals parallel, (§. 369. Inſtit. T. II.) Folglich ſind auch die Linien AB, HF, die durch die äuſſerſten Punkte gleicher Parallel-Linien PG, BF gehen und in der nämlichen Ebene ſind, parallel und folglich iſt der angenommene Kegelſchnitt eine Parabel. (*a*)

§. 8.

(*a*) Wenn man von einem Axentriangel eines Kegels redet, ſo muß man nicht glauben, daß das, was man davon behauptet, einzig und allein eine beſondere Eigenſchaft dieſes beſtimmten Triangels ſey und daß dieſes nicht noch unzählig andern Triangeln dieſes nämlichen Kegelſchnitts zukomme. Denn der erzeugende Triangel dieſes Körpers gehet beſtändig durch ſeine Axe, und wird ſo vielmal wiederhohlet als man in der Baſis des Kegels Punkte hat.

Wenn inzwiſchen ein Axentriangel einmal beſtimmt iſt, ſo gehört der Kegelſchnitt der perpendiculair durch ſeine Ebene gehet, nur ihm zu, das heißt, wenn man die 4te Figur wieder vor ſich nimmt, es iſt von allen möglichen Axentriangeln dieſes Kegels, wenn man ſich einmal für den Triangel HCF beſtimmt hat, er allein derjenige, auf welchem der gemeinſchaftliche Durchſchnitt DBS perpendiculair fallen kann. Es iſt nämlich klar, daß eine Linie, die gegen eine von zwoen

oder

§. 8.

Anmerkung. Der Axentriangel HCF, der auch ein Kegelſchnitt durch die Axe iſt, zeigt, daß der Umfang eines Kegelſchnittes nicht allemal eine krumme Linie ſey. Man kann es alſo nicht ohne Beweis annehmen daß die äuſſere Einfaſſung der Parabel eine krumme Linie ſey.

§. 9.

Erſter Zuſatz. Ein jedes Stück AMD von dem Umfange der Parabel iſt eine krumme Linie. Denn, wenn die Linie AMD grade wäre, ſo würde man folgendes Verhältnis haben: $PM : BD = AP : AB$. Es verhält ſich aber nach § 6. $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$. Folglich $PM : BD = \overline{PM}^2 : \overline{BD}^2$. Daher iſt $PM \times BD \times BD = PM \times$

oder mehreren Flächen, die ſich durchſchneiden, perpendiculair iſt, nicht zugleich auch perpendiculair gegen alle übrigen ſeyn könne.

Dieſes heißt ſo viel, daß durch den Schnitt einer Ebene, welche nicht gegen den ausgeſuchten Axentriangel perpendicudiculair wäre, kein Kegelſchnitt entſtehen könne. Denn, wenn die ſchneidende Fläche nicht gegen einen erwählten Axentriangel perpendiculair wäre, ſo würde ſie es nothwendig gegen einen andern ſeyn. Daher iſt der Grund, wodurch man bewegt wird, den Kegel durch eine Ebene, die gegen die Fläche des einmal angenommenen Axentriangels perpendiculair iſt, durchſchneiden zu laſſen, dieſer, weil dieſe Art des Schnitts zu den nöthigen Beweiſen geſchikter als jede andere iſt, und weil ſonſt ohne dieſe Bedingung die gemeinſchaftlichen Durchſchnitte wie DBS und MPT durch die Diameter CF, OG nicht in 2 gleiche Theile getheilet wären. Dieſes kann nur in dem Falle geſchehen, wo DBS und MPT perpendiculair gegen dieſe Diameter ſind. Daß aber dieſe Linien perpendiculair ſind, hängt von dem ab, daß die durchſchneidende Fläche gegen den Axentriangel perpendiculair ſey. Dieſes iſt evident.

PM×BD. (*a*) Wenn man folglich mit (PM×BD) dividiret, ſo findet man daß BD=PM und alſo AB=AP ſey. Dieſes iſt aber unmöglich. Es kann alſo die Linie AMD keine grade Linie ſeyn. Folglich iſt ſie nothwendig eine krumme.

Weil die Parabel, ihre Axe, und ihre Ordinaten ſich in der nämlichen Fläche befinden, ſo können wir dieſe krumme Linie unabhänglich von dem Kegel betrachten, aus welchem ſie entſtanden iſt. Wir können ſie auf eine ebene Fläche tragen und ihre andern Eigenſchaften, die ſie charakteriſiren, aufſuchen, ſo daß alle zu dieſer Abſicht gezogene Linien beſtändig in der Fläche dieſer Parabel angenommen werden.

§. 10.

Zweyter Zuſatz. Folglich entfernt ſich eine Parabel immer mehr und mehr von ihrer Axe. Denn es verhält ſich $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$. Wenn nun AB gröſſer als AP iſt, ſo muß auch $\overline{BD}^2$ gröſſer als $\overline{PM}^2$ ſeyn, und folglich, je mehr die Axe ſich verlängert, deſto mehr wachſen die Ordinaten, das heißt, ihre äuſſerſten Punkte ſind weiter von der Axe entfernet. Dieſe äuſſerſten Punkte ſind aber in der Parabel. Folglich entfernt ſich die Parabel immer weiter von ihrer Axe.

§. 11.

Dritter Zuſatz. Hieraus folgt, wenn man mit der Axe der Parabel eine Parallel-Linie OV (Fig. 5.) ziehet, daß dieſe Parallel-Linie mit der krummen Linie nothwendig in einem

(*a*) Ich mache ein für allemal bekannt, daß, wenn ich aus einer Proportion eine Gleichung ſchlieſſe, es deswegen geſchehe, weil ich das Produkt der äuſſerſten und mittelſten Glieder gemacht habe.

einem einzigen Punkte zuſammen ſtoſſen muß und daß ſie in den paraboliſchen Raum hineingehen werde, oder beſtimmt ſey, hineinzugehen. Denn eine Linie, die mit der Axe parallel iſt, iſt beſtändig in gleicher Weite von der Axe. Wir haben aber ſo eben gezeigt, daß die Parabel ſich immer weiter davon entferne. Sie muß alſo über dieſe Parallel-Linie hinausgehen und kann nur einen einzigen Punkt mit ihr gemein haben.

§. 12.

Vierter Zuſatz. Wenn man die Punkte D und M durch eine Sehne mit einander vereiniget, ſo wird dieſe nothwendig in irgend einem Punkte T ſich mit der Axe vereinigen; denn wäre ſie mit der Axe parallel, ſo könnte ſie die krumme Linie nur in einem Punkte durchſchneiden. (§. 11.) Dieſe ſchneidet ſie aber, vermöge der Bedingung in zween Punkten, folglich iſt ſie mit der Axe nicht parallel; Folglich iſt ſie beſtimmt in irgend einem Punkte T mit ihr zuſammen zu ſtoſſen.

§. 13.

Fünfter Zuſatz. Eine Tangente an der Parabel wird auch nothwendig mit der Axe dieſer krummen Linie zuſammen kommen. Denn entweder wird ſie beſtimmet ſeyn mit der Axe zuſammen zu ſtoſſen oder ſie wird mit ihr parallel ſeyn. Wäre ſie mit derſelben parallel, ſo würde ſie in den Raum der Parabel hineingehen (§. 11.). Dieſes iſt unmöglich, weil man ſie als eine Tangente annimmt; Folglich wird eine Tangente endlich die Axe dieſer krummen Linie berühren.

§. 14.

Sechster Zuſatz. Jede 2 Tangenten an einem Arme der Parabel TRG und CHL durchſchneiden ſich nothwendig, oder, ſind beſtimmt in irgend einem Punkte I ſich zu durchſchneiden. Denn, wenn eine von den Tangenten CHL

gegen die andere parallel wäre, ſo müßten nothwendig, da einer von ihren Punkten H in Anſehung der Axe unter der andern Tangente TRG iſt, alle ihre Punkte unterhalb dieſer Tangente ſeyn und folglich müßte ſie in die paraboliſche Fläche gehen. Dieſes iſt aber unmöglich. Denn man hat ſie als eine Tangente angenommen. Wenn nun CHL nicht mit TRG parallel iſt, ſo ſchneidet ſie die e letztere nothwendig oder iſt beſtimmt ſie in einem Punkte I zu durchſchneiden.

§. 15.

Siebender Zuſatz. Wenn man folglich von einem Punkte K der Parabel eine Linie KS parallel mit einer Tangente TRG dieſer krummen Linie ziehet, ſo wird dieſe Parallellinie nothwendig die krumme Linie in einem andern Punkte Q ſchneiden. Denn, wenn man durch irgend einen Punkt H unterhalb R eine andere Tangente CHL zöge, ſo würde dieſe nothwendig die vorige in einem Punkt I ſchneiden (§. 14.) Folglich ſchnitte ſie auch deren Parallellinie KS. Sie würde dieſe aber nicht anders als auſſerhalb der krummen Linie ſchneiden. Es müßte alſo dieſe Parallellinie über die Parabel heraus gehen und folglich zum zweytenmal ſie durchſchneiden.

§. 16.

Erklärung. Suchet eine dritte Proportionallinie zu einer Abſciſſe AP und der ihr zugehörigen Ordinate PM, das heißt, ſetzet das Verhältnis an: AP : PM = PM : zu einem 4ten Gliede. Dieſe Linie, die ihr auf dieſe Art finden werdet, iſt diejenige, die die alten Geometer das *Latus rectum* nannten, und die die neuern Parameter nennen. Wir werden ſie in Zukunft mit dem Buchſtaben p bezeichnen, weil dieſe 4te Proportional-Gröſſe eine beſtändige Gröſſe iſt, das heißt, weil man für ſie immer den nämlichen Werth findet, man mag ſich einer Abſciſſe bedienen, welcher man will. Wir werden dieſes ſogleich zeigen.

§. 17.

Achter Zuſatz. Setzet man demnach das Verhältniß an: AP : PM = PM : *p*. und AB : BD = BD. *m*. (die Punkte B und P mögen in der Axe liegen, wo ſie wollen) ſo behaupte ich, daß man jederzeit dieſes finden werde, daß $p = m$ ſey. Den es iſt $\overline{PM}^2 = AP \times p$ und $\overline{BD}^2 = AB \times m$ und folglich $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP \times p : AB \times m$. Allein es verhält ſich nach §. 6. $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$. Folglich verhält ſich auch $AP \times p : AB \times m = AP : AB$. Folglich iſt $AP \times AB \times p = AP \times AB \times m$ und folglich, wenn man durch $(AP \times AB)$ dividiret, $p = m$ (*a*).

* §. 18.

Andere Art den Parameter zu finden.

Dieſes iſt ſehr leicht, wenn die Parabel und die Axe gegeben iſt. Man ziehe auß der Spitze A eine beliebige Sehne AN (Fig 19.) Ueber dieſe richte man aus dem Punkte N die Perpendiculairlinie NB auf, die in einem Punkte B die Axe durchſchneiden wird. Wenn man nun darauf zu dem Punkte N die Ordinate NF ziehet, ſo wird FB der Parameter ſeyn. (§. 16.) Weil AF : NF = NF : FB. (*b*).

*§. 19.

(*a*) Da dieſe dritte Proportional-Linie zu einer jeden Abſciſſe und der ihr zugehörigen Ordinate immer dieſelbige iſt, ſo iſt dieſes der Grund geweſen, warum man ihr den Namen Parameter gegeben hat: Weil dieſe Linie eine Art von Maaß iſt, welches die Weite der Parabel in jedem angenommenen Punkte, beſtimmt. Ohne dieſe Linie, die durch die Natur des Durchſchnitts beſtimmt wird, würde es ſchwer ſeyn, dieſe krumme Linie unabhänglich von einem Kegel zu conſtruiren, und wenigſtens würde man davon die Abmeſſungen nicht beſtimmen können, weil die Abſciſſen und Ordinaten unbeſtimmt ſind.

(*b*) Denn AFN und FNB ſind ähnliche Triangel, worinnen der Winkel ANF = NBF und NAF = BNF: Wie dieſes

* §. 19.

Die dritte Art den Parameter zu finden.

Ziehet aus der Spitze der Axe eine Sehne, welche mit der Axe die Hälfte eines rechten Winkels oder 45 Grade macht und von dem Punkt M, wo dieſe Sehne die krumme Linie durchſchneidet, ziehet eine Perpendiculairlinie oder Ordinate gegen die Axe: So wird dieſe Ordinate oder die ihr zugehörige Abſciſſe dem Parameter gleich ſeyn. Denn vermöge der Conſtruction iſt $AP = PM$. Folglich iſt $AP \times AP = PM \times PM = AP \times p$. (§. 16.) Folglich iſt $p = AP = PM$.

§. 20.

Neunter Zuſatz. Weil der Parameter p eine beſtändige Gröſſe iſt, und weil er immer eine dritte Proportional-Linie zu einer jeden Abſciſſe und ihrer correſpondirenden Ordinate iſt, ſo iſt es klar, daß das Quadrat einer jeden Ordinate in einer Parabel beſtändig dem Rectangulum aus dem Parameter und ihrer correſpondirenden Abſciſſe = ſey. Wenn man würklich die Verhältniſſe $AP : PM = PM : p$ und $AB : BD = BD : m$ aus dem §. 17. (Fig. 5.) wieder vor ſich nimmt, und wenn man p an der Stelle von m ſetzet, (§. 17.) ſo wird man beſtändig finden, daß $\overline{PM}^2 = AP \times p$ und $\overline{BD}^2 = AB \times p$ ſey und ſo bey den übrigen gleichfalls. Setzet man daher eine jede Ordinate $PM = y$ und die ihr zugehörige Abſciſſe $= x$, ſo bekommt man die Gleichung $yy = px$. Dieſes iſt eine Gleichung, die die **Parabel** charakteriſirt und woher ſie ihren Namen bekommen hat; denn das griechiſche Wort παραβάλλειν bedeutet gleich machen. Wenn es ſich folglich in der Auflöſung eines Problems zuträgt, daß

ſes aus der Elementar-Geometrie bekannt ſeyn muß. Folglich ſtehen die angegebenen Linie würklich in dem beſtimmten Verhältniſſe. B.

daß das Quadrat einer Ordinate oder einer jeden andern perpendiculairen Linie PM gegen eine Linie AB, deren Anfang A veſt iſt, dem Rectangel aus der Abſciſſe AP und einer beſtändigen Gröſſe gleich iſt, ſo kann man ſicher behaupten, daß die äuſſerſten Punkte M aller dieſer Ordinaten ſich in einer Parabel befinden, und daß man, um die ganze Auflöſung des Problems zu haben, dieſe krumme Linie conſtruiren müſſe. Denn, wenn man eine andere Ordinate $BD = z$ und deren Abſciſſe $AB = u$ ſetzet, ſo wird man nach der Bedingung haben $yy = px$ und $zz = pu$. Es verhält ſich folglich $yy : zz = px : pu = x : u$, indem man die beyden letzten Glieder mit p dividiret, das heißt, die Quadrate der Ordinaten yy und zz verhalten ſich unter einander wie die ihnen zugehörigen Abſciſſen x und u. Wenn nun dieſes ſich eräugnet, ſo iſt die Linie, die durch die äuſſerſten Punkte dieſer Ordinaten gehet, eine Parabel (§. 7.) Folglich drücket die Gleichung $yy = px$ oder $zz = pu$ eine Parabel aus, und es iſt die Ordinate y oder $PM = \sqrt{px}$.

* §. 21.

Zehenter Zuſatz. Laſſet von irgend einem Punkte der Parabel H (Fig. 6.), der von der Spitze A verſchieden iſt, auf die doppelte Ordinate MC eine Perpendiculairlinie fallen, ſo werdet ihr beſtändig die Gleichung finden $MD \times DC = HD \times p$.

Beweis. $MD \times DC = (MP + PD) \times (PC - PD) = (MP + PD) \times (MP - PD)$ (denn es iſt $PM = PC$) $= \overline{MP}^2 - \overline{PD}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$ (weil $HG = PD$); Folglich iſt $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$. Nun iſt $\overline{MP}^2 = AP \times p$ und $\overline{HG}^2 = AG \times p$. (§. 20.) Folglich $\overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 = AP \times p - AG \times p = (AP - AG)p = GP \times p = HD \times p$. Folglich iſt $\overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 = HD \times p$. Folglich weil $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$ (wie man dieſes geſehen hat) ſo iſt es klar, daß $MD \times DC = HD \times p$. W. z. E. W.

* §. 22.

Eilfter Zuſatz. Hieraus folgt, daß $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$. Denn es iſt $\overline{MP}^2 = AP \times p$. (§. 20.) Und $MD \times DC = HD \times p$. (§. 21.) Folglich verhält ſich $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP \times p : HD \times p = AP : HD$ (wenn man mit p dividiret); Folglich $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$.

* §. 23.

Wenn im umgekehrten Falle eine Linie MC, die durch eine Perpendiculairlinie AP in zweene gleiche Theile getheilet wird, ſo beſchaffen iſt, daß, wenn ſie in einem jeden andern Punkte D durch eine Perpendiculairlinie HD getheilet wird, man immer das Verhältniß finde: $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$, ſo ſage ich, daß die Punkte M. H. A. C. in einer Parabel ſind, deren Axe AP iſt.

Beweis. Wir wiſſen ſchon, daß $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$ (Beweis des §. 21.) und $HD = AP - AG$. Nun verhält ſich nach der Annahme $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$. Folglich $\overline{MP}^2 : \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 = AP : AP - AG$. Folglich $\overline{HG}^2 : \overline{MP}^2 = AG : AP$ (*a*).

Folg-

(*a*) Dieſes Verhältniß entſtehet aus dem vorhergehenden ſo, wenn man ſpricht: Die Differenz des erſten und zweyten Gliedes verhält ſich zum erſten, wie die Differenz des dritten und vierten Gliedes zum dritten; Und es iſt dieſe Art zu verfahren richtig. Dieſes ſiehet man, wenn man einen allgemeinen Ausdruck einer geometriſchen Proportion nimmt, ihn auf vorbenannte Art verändert und alsdenn das Factum der beyden mittelſten und äuſſerſten Glieder macht. Es werden dieſe

Folglich verhalten ſich die Quadrate der Ordinaten HG und MP unter einander, wie die ihnen zugehörigen Abſciſſen AG, AP. Folglich ſind die Punkte M. H. A. in einer Parabel, deren Axe AP iſt, (§. 7.) da auch noch PC = PM iſt, (Beding.) ſo iſt auch der Punkt C in der nämlichen Parabel.

Dieſer Zuſatz und derjenige, der aus deſſen Umkehrung entſtanden iſt, ſind in der Lehre von dem Bombenwerfen nützlich.

§. 24.

Aufgabe. Wenn nach der 5ten Figur die Linie BD als der Parameter einer Parabel gegeben iſt, dieſe krumme Linie zu zeichnen.

Auflöſung. Nehmet eine Linie AB von unbeſtimmter Länge an, auf welcher ihr den Anfang oder die Spitze A beſtimmen müſſet und betrachtet dieſe als die Axe der zu conſtruirenden krummen Linie. Theilet dieſe Linie in ſo viele gleiche oder ungleiche Theile als ihr wollet. Machet ſie aber ſo klein als möglich. Auf den Theilungspunkten P. E richtet die Perpendiculair-Linie PM, EN auf. (Man ziehet hier nur zwo derſelben um die Verwirrung der Linien zu vermeiden.) Eine jede derſelben ſey die mittlere Proportionallinie zwiſchen ihrer Abſciſſe und dem gegebenen Parameter BD. Laſſet endlich durch die äuſſerſten Punkte M, N dieſer Perpendiculair-Linien eine krumme Linie gehen. Dieſe wird die verlangte Parabel ſeyn.

Beweis.

ſe Produkte alsdenn noch immer ſich gleich ſeyn; Ein Beweis, daß in dem Verhältniſſe nichts verändert worden iſt. Es ſey dieſer allgemeine Ausdruck folgender: $a : am = b : bm$ ſo iſt er verändert dieſer: $a - am : a = b - bm : b$ und die Produkte ſind $(a - am)\, b$ und $a\,(b - bm)$ oder $ab - amb$ und $ab - amb$; folglich ſind ſie einander gleich. In Zahlen ſiehet man es noch deutlicher: $12 : 6 = 8 : 4$: verändert: $12 - 6 : 12 = 8 - 4 : 8$ oder $6 : 12 = 4 : 8$, welches ein jeder für eine wahre Proportion erkennen wird. B.

Beweis. Es verhält ſich vermöge der Conſtruction AP : PM = PM : BD. Folglich iſt $AP \times BD = \overline{PM}^2$. Eben ſo AE : EN = EN : BD. Folglich iſt $AE \times BD = \overline{EN}^2$. Und ſo bey allen übrigen Punkten. Man findet alſo in jedem Punkte, daß das Quadrat der Ordinate PM gleich ſey dem Rectangel aus der Abſciſſe AP und dem Parameter BD; Folglich hat man die geſuchte Parabel. (§. 20.)

§. 25.

Andere Art. Es ſey die Linie von unbeſtimmter Länge AL (Fig. 7.) deren Theil AC dem gegebenen Parameter gleich iſt. Aus dem Punkte C laſſet uns die unbeſtimmte Perpendiculairlinie *ds* aufrichten. Alsdenn laſſet uns aus einem gewiſſen Punkte D der auf der Linie AL angenommen iſt, und mit einem Radius DA, der gröſſer iſt als BA und alſo gröſſer iſt als die Helfte von AC den Cirkel H*m*A beſchreiben. Laſſet uns bey den Punkten F. G. C. u. ſ. w. eben ſo mit den Halbmeſſern FA, GA, CA u. ſ. w. verfahren. Wir werden alsdenn Cirkel bekommen, die die unbeſtimmte Linie *ds* in den Punkten *m*, *o*, *p*, *r*. u. ſ. w. durchſchneiden. Laſſet uns endlich aus den beyden Linien C*m*, CH das Rectangel C*t* conſtruiren, um den Punkt *t* zu bekommen, welcher in der geſuchten Parabel ſeyn wird. Verfahren wir eben ſo mit den beyden Linien CO, CI; wie auch mit den Linien C*p*, CK oder auch noch mit C*r*, CL, ſo werden wir auf dieſer Art Punkte *u*. *x*. *y*. u. ſ. w. finden, welche in der Parabel ſeyn werden.

Beweis. Es ſey der Parameter $AC = p$, ſo verhält ſich vermöge der Natur des Cirkels $CH : Cm = Cm : AC$ oder p. Folglich iſt $\overline{Cm}^2 = CH \times p$. Nun iſt aber $\overline{Cm}^2 = \overline{Ht}^2$; Folglich iſt $\overline{Ht}^2 = CH \times p$; Folglich iſt (§. 20.) der Punkt *t* in einer Parabel, deren Parameter = AC iſt. Eben ſo muß man ſich bey dem Beweiſe verhalten, daß die andern Punkte *u*. *x*. *y*. u. ſ. w. in dieſer Parabel ſind. W. z. T. und z. E. W.

§. 26.

§. 26.

Jch habe mich über die erſten Begriffe, die uns die Grundeigenſchaften oder charakteriſtiſchen Eigenſchaften der Parabel haben entdecken laſſen und uns auf die Conſtruction derſelben geführet haben, ſehr weit ausgebreitet. Allein, da dieſes ein ähnlicher Gang für die übrigen Kegelſchnitte iſt, ſo iſt dieſes hier ein für allemal bewieſen. Es müſſen daher die Anfänger, welche den Geiſt der Geometrie, das heißt, die Methode recht erlernen wollen, nach welcher man verfährt, um daſelbſt Entdeckungen zu machen, herzhaft bey dieſen Grundwahrheiten ſtehen bleiben, und müſſen überzeugt ſeyn, daß etwas gut wiſſen, ſo viel ſey, als vieles wiſſen.

§. 27.

Aufgabe. Wenn eine Parabel DAH (Fig. 5.) und ihr Scheitelpunkt A gegeben iſt, die Axe, ihren Parameter, die Ordinate und doppelte Ordinate, die dem Parameter gleich iſt, zu finden.

Auflöſung. 1.) Aus dem Punkte A beſchreibe man mit einer willkührlichen Eröfnung des Cirkels einen Cirkelbogen, der die Parabel in zween Punkten M und R durchſchneidet und ziehe die Sehne MR. Ziehet durch die Mitte derſelben P eine Linie von unbeſtimmter Länge AB aus dem Punkte A. So iſt klar, daß PM = PR perpendiculair gegen AB und daß folglich (§. 5.) AB die Axe und PM oder PR eine Ordinate ſeyn werde.

2) Setzet das Verhältniß an AP : PM = PM zu einer 4ten Linie, ſo bekommet ihr den Parameter p. (§. 16.)

3.) Nehmet die Abſciſſe AP, die dem gefundenen Parameter p gleich iſt und ziehet die Ordinate PM. Dieſe wird dem Parameter gleich ſeyn. Denn, weil $\overline{PM}^2 = AP \times p$ (§. 20.) $= pp$ (vermöge der Bedingung), ſo iſt $PM = p$.

F 4.) Man

4.) Machet AP $=\frac{p}{4}$ und ziehet die Ordinate PM, die ihr bis R, wo ſie mit dem andern Arm der Parabel zuſammenſtößt, verlängern müſſet, ſo wird MR $= p$ ſeyn. Denn es iſt $\overline{PM}^2 = AP \times p$. (§. 20.) $= \frac{p}{4} \times p$ (Beding.) $= \frac{pp}{4}$. Folglich iſt PM $= \frac{p}{2}$. Folglich 2PM oder MR $= p$.

§. 28.

Erklärungen. Wir haben ſchon geſehen, (§. 13.) daß eine Tangente an der Parabel NT (Fig. 8.) nothwendig mit der Axe dieſer krummen Linie in einem Punkt zuſammen kommen müſſe. Wenn man folglich von dem Berührungspunkt N eine Ordinate NE ziehet, ſo werden die Tangente NT, die Ordinate NE und das Stück der Axe TE, welches man die Subtangente nennet, ein rechtwinklichtes Dreyeck TEN machen. Man weiß aber, daß, wenn zwo Seiten eines rechtwinklichten Triangels beſtimmt ſind, die dritte es nothwendig auch ſey. Wenn man folglich forderte, daß man eine Methode erfinden ſollte, eine Tangente zu irgend einem Punkt N einer Parabel oder andern krummen Linie zu ziehen, worinn man das Verhältniß der Abſciſſen und Ordinaten gegen einander kennet; ſo ſiehet man, daß wenn man zu dem Punkt N die Ordinate gezogen hat, es nur darauf ankomme, die Subtangente TE zu beſtimmen, das heißt, das Verhältniß zu finden, welches dieſe gegen die Abſciſſe AE oder gegen eine andere bekannte Linie hat. Dieſes iſt nun die allgemeine Methode, welcher ich mich bediene, und die kein anderer, ſo viel ich weiß, gegeben hat. Sie iſt ſehr ſimpel; Doch das folgende Beyſpiel wird ſie beſſer verſtehen lehren als das bloſſe Raiſonnement.

§. 29.

Fünfter Hauptſatz. In der Parabel iſt die Subtangente TE allemal doppelt ſo groß, als die Abſciſſe AE.

Beweis. Wenn man ſich nach der 5ten Figur gleich anfangs die Sekante TMD vorſtellet, die durch den

Punkt M oder wo man ſonſt eine Tangente haben will, durchgehet. Wenn man nun die Linie TMD ſich um den Punkt T gegen die linke Hand drehen lieſſe, bis ſie aufhörte die krumme Linie zu durchſchneiden, ſo iſt es klar, daß die Durchſchnittspunkte M und D, wovon ſich der leztere immer dem erſtern nähert, endlich zuſammen flieſſen werden, wenn nämlich TMD die Tangente wird, und daß alsdenn PT die Subtangente ſeyn wird. Es ſey nun $AP = x$; $PB = d$. Folglich $AB = x + d$, $PT = s$ und $\overline{PT}^2 = ss$. Folglich $BT = s + d$ und $\overline{BT}^2 = ss + 2sd + dd$.

Dieſes vorausgeſezet, ſo haben wir folgendes Verhältniß (§ 6.) $\overline{BD}^2 : \overline{PM}^2 = AB\,(x + d) : AP\,(x)$ und wegen der ähnlichen Triangel TBD und TPM, $\overline{BD}^2 : \overline{PM}^2 = \overline{BT}^2\,(ss + 2ds + dd) : \overline{PT}^2\,(ss)$. Folglich $x + d : x = ss + 2ds + dd : ss$. Wenn man folglich das 2te Glied vom erſten und das 4te vom 3ten ſubtrahiret, $d : x = 2ds + dd : ss$. Folglich iſt $dss = 2dsx + ddx$ Folglich, wenn man mit d dividiret $ss = 2sx + dx$ (A) oder $2s + d : s = s : x$. Folglich iſt das Verhältniß von s zu x, das heißt der Subtangente zur Abſciſſe dem Verhältniß $2s + d$ zu s gleich, wenn man nämlich annimmt, daß TMD eine Sekante ſey. In dem Augenblick aber, wenn TMD die Tangente wird, ſo fallen die Punkte D und M in einander und es wird der Unterſchied der Abſciſſen PB oder $d = 0$. Laſſet uns alſo in der Gleichung A, das Glied wo d ſich findet ausſtreichen, ſo wird die Gleichung folgende werden: $ss = 2sx$ oder, wenn man mit s dividiret $s = 2x$. Dieſes zeiget an, daß die Subtangente PT das Duplum der ihr zugehörigen Abſciſſe AP ſey. Und da dieſes in einem jeden Punkte der krummen Linie geſchiehet, ſo erkennet man, daß wenn man in der 8ten Figur TN für die Tangente annimmt, man die Subtangente TE bekomme, die doppelt ſo groß iſt, als die Abſciſſe AE. W. z. E. W.

§. 30.

Wenn man umgekehrt aus dem Punkt N einer Parabel eine Ordinate NE auf die Axe ziehet, und nun AT=AE machet, um das Duplum der Abſciſſe AE zu bekommen, ſo behaupte ich, daß TN von dem Punkte T an den äuſſerſten Punkt N der Ordinate NE gezogen, die Tangente der Parabel ſeyn werde.

Beweis. Sie wird entweder eine Tangente oder eine Sekante ſeyn. Nun iſt es aber unmöglich, daß ſie eine Sekante ſey. Denn ſonſt würde man aus dem Punkte N eine Tangente NS ziehen können, welche die Axe in einem Punkte *s* über oder unter T durchſchneiden würde. (§. 13.) Allein, wenn NS eine Tangente iſt, ſo haben wir augenblicklich geſehen, daß die Subtangente das Duplum der Abſciſſe AE ſey. Folglich würde ES=2AE ſeyn. Nun iſt aber nach der Bedingung TE=2AE. Folglich müßte ES=TE, das heißt, der Theil dem ganzen gleich ſeyn, welches unmöglich iſt. Folglich iſt TN unmöglich eine Sekante. Folglich muß ſie eine Tangente ſeyn.

§. 31.

Erſter Zuſatz. Hieraus folgt, daß, wenn man aus dem Berührungspunkt N auf der Tangente NT die Perpendiculairlinie NL aufrichtet, dieſe mit der Axe in einem Punkt L zuſammenſtoſſen werde, und zwar ſo, daß die Subnormallinie EL (*a*) der Helfte des Parameters gleich ſey. Es iſt alſo zu beweiſen daß EL=$\frac{p}{2}$ ſey.

Beweis. Wenn wir NE=y ſetzen, AE=x. TE=$2x$ (§. 29.) ſo werden wir dieſes Verhältnis haben: $2x$ (TE) : y (NE)=y (NE) : EL (weil der Triangel TNL

(*a*) Eine Subnormallinie iſt dasjenige Stück der Axe EL, welches zwiſchen der Normallinie LN und der Ordinate EN lieget. B.

TNL bey N einen rechten Winkel hat und weil NE perpendiculair auf TL ſtehet, (nach der Conſtruction.) Folglich iſt $EL = \frac{yy}{2x}$. Nun iſt aber $yy = px$. (§. 20.) Folglich iſt $EL = \frac{px}{2x} = \frac{p}{2}$.

* §. 32.

Zweyter Zuſatz. Aus irgend einem Punkt der Parabel ziehet eine Ordinate MPQ auf die Axe AO dieſer krummen Linie (Fig. 9.); Jngleichem eine Tangente MG und aus dem Punkte Q eine Perpendiculairlinie QG. Wenn man hernach eine Linie MT oder Mt ziehet, biß ſie die krumme Linie in einem Punkt T oder t über oder unter MQ durchſchneidet und biß ſie auf die Linie QG in einem Punkte R oder r ſtößt; Wenn man ferner von dem Punkte T oder t die Perpendiculairlinie TS oder ts auf MQ, die im Nothfall verlängert wird, ziehet: So behaupte ich, daß, wenn die Linie MT über oder unter MQ fällt und man verbindet die beyden Punkte S und R oder s und r durch eine grade Linie SR oder sr, daß alsdenn die Linie SR nothwendig mit der Tangente MG parallel ſey.

Beweis des erſten Falls. Man muß folgendes Verhältniß beweiſen: $MQ : QG = QS : QR$. Es ſey $AP = x$, $PL = 2x$ (§. 29.); der Parameter $= p$, $PQ = MP = \sqrt{(px)}$ (§. 20.) $MQ = 2\sqrt{px}$; $QG = 4x$. (Denn es iſt $MQ = 2MP$; Folglich $QG = 2PL = 4x$); $PS = d$, $MS = MP + PS = \sqrt{(px)} + d$; $QS = PQ - PS = \sqrt{(px)} - d$. Ziehet man nun die Ordinate $TO = PS = d$, ſo iſt $AO \times p = \overline{TO}^2 = dd$ (§. 20.) Folglich $AO = \frac{dd}{p}$. Daher $PO = AP - AO = x - \frac{dd}{p} = ST$. Es verhält ſich aber $MS : ST = MQ : QR$, das heißt, (wenn man in dieſem Verhältniſſe die analytiſchen Werthe für MS, ST und

und MQ ſetzet), $\sqrt{(px)}+d : x-\frac{dd}{p}=2\sqrt{px} : QR$.

Daher iſt $QR=\frac{(x-\frac{dd}{p})\times 2\sqrt{px}}{\sqrt{(px)}+d}$. Hier folgen nun die analytiſchen Werthe von den vier Gröſſen MQ, QG, QS, QR: $2\sqrt{px}$, $4x$, $\sqrt{(px)}-d$, $\frac{(x-\frac{dd}{p})\times 2\sqrt{px}}{\sqrt{(px)}+d}$. Nun behaupte ich aber folgendes Verhältniß als richtig: $2\sqrt{px} : 4x=\sqrt{(px)}-d : \frac{(x-\frac{dd}{p})\times 2\sqrt{px}}{\sqrt{(px)}+d}$ oder (wenn man die beyden letzten Glieder durch $[\sqrt{(px)}+d]$ multiplicirt) $=px-dd : (x-\frac{dd}{p})\times 2\sqrt{px}$.) Dieſes iſt ganz gewiß, weil das Product der beyden äuſſerſten Glieder dem Product der beyden innerſten Glieder gleich iſt, oder $2\sqrt{(px)}\times(x-\frac{dd}{p})\times 2\sqrt{px}=4x\times(px-dd)$; Denn man hat an beyden Seiten $4pxx-4ddx$. Folglich verhält ſich MQ : QG=GS : QR und folglich iſt SR parallel mit MG. W. z. E. W.

Beweis des zweyten Falls. Wenn rs parallel mit MG iſt, ſo ſind die Triangel sQr und MQR ſich ähnlich. Es muß alſo folgendes Verhältniß bewieſen werden; MQ : QG=Qs : Qr.

Es ſey alles wie oben, $Ps=d$; Folglich $Qs=Ps-PQ=d-\sqrt{px}$; und wenn man die Ordinate $to=Ps=d$ ziehet, ſo iſt $Ao=\frac{dd}{p}$. Folglich $Po=Ao-AP=\frac{dd}{p}-x=st$. Es verhält ſich aber $Ms : st=MQ : Qr$ oder $\sqrt{(px)}+d : \frac{dd}{p}-x=2\sqrt{px} : \frac{(\frac{dd}{p}-x)\times 2\sqrt{px}}{\sqrt{(px)}+d}=Qr$.

Qr. Folglich kommt es darauf an folgendes Verhältniß zu beweiſen: $2\sqrt{px} : 4x = d - \sqrt{px}. | \frac{(\frac{dd}{p} - x) \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{(px)} + d}$ oder (wenn man die leztern zwey Glieder durch $[\sqrt{(px)} + d]$ multiplicirt) $= dd - px : (\frac{dd}{p} - x) \times 2\sqrt{px}$. Dieſes iſt aber ohnfehlbar, weil $(2\sqrt{px} \times (\frac{dd}{p} - x) \times 2\sqrt{px}) = (4x \times (dd - px))$ Folglich verhält ſich MQ : QG = $Qs : Qr$. Folglich iſt rs mit MG parallel. W. z. E. W.

* §. 33.

Umgekehrt, wenn man MR oder Mr oberhalb oder unterhalb der Horizontallinie MQ ſo weit ausziehet, bis ſie in einem Punkte R oder r die auf MQ perpendiculair ſtehende Linie GQr berühret, und wenn man RS oder rs parallel mit der Tangente MG ziehet, und wenn man aus den Punkten S oder s, wo dieſe Linie die doppelte Ordinate MQ durchſchneidet, die perpendiculaire Linie ST oder st ziehet; ſo werden dieſe die krumme Linie in den nämlichen Punkten T, t durchſchneiden, in welchen die ſchiefen Linien MR oder Mr, die nach Erforderniß verlängert werden, mit der Parabel zuſammenſtoſſen.

Beweis. Wenn die Perpendicularlinien ST, und st die krumme Linie in den Punkten T, t nicht durchſchnitten, ſo würden ſie dieſelbe in andern Punkten durchſchneiden. Wenn man folglich aus den Punkten T, t auf MQs Perpendicularlinien fallen lieſſe, ſo würden ſie auf Punkte ſtoſſen, die von S, s unterſchieden wären. Wenn man alſo von dieſen neuen Punkten nach R und r Linien zöge, ſo würden dieſe lezten Linien mit MG parallel laufen, wie man oben geſehen hat. Allein es iſt vermöge der Bedingung RS oder rs auch mit MG parallel. Folglich würde man aus den nämlichen Punkten R

oder *r* zwo Linien haben die mit einer Linie parallel wären. Dieſes iſt unmöglich. Von dem §. 32. 33 macht man beym Bombenwerfen Gebrauch.

§. 34.

Sechster Hauptſatz. Es ſey, wie oben, die Tangente TM, die Ordinate PM (Fig. 10.) und man ziehe aus dem Berührungspunkt M die Linie ME mit der Axe parallel. Wenn man nun durch den Punkt A eine Linie AG, die auf der Axe perpendiculair ſtehet, ſo weit ausziehet, bis ſie die Linie ME, die nach G zu verlängert iſt, berühret, ſo wird der Triangel TOA dem Triangel OMG gleich ſeyn.

Beweis. Denn es ſind die Triangel TOA und OMG offenbar ſich ähnlich. Folglich verhält ſich AT : MG = AO : OG. Nun iſt aber AT = AP (§. 29.) und AP = MG nach der Conſtruction. Folglich iſt AT = MG. Folglich auch AO = OG. Folglich iſt der Triangel TOA = OMG.

§. 35.

Siebender Hauptſatz. Es iſt der Triangel TPM dem Rectangel APMG gleich, und wenn man AQ mit TM parallel ziehet, ſo findet man auch, daß der Triangel AQG dem Parallelogramm AQMT gleich ſey.

Beweis I. Weil der Triangel TOA = OMG (§. 34.), ſo iſt TOA + AOPM = OMG + AOPM, das heißt, der Triangel TMP iſt dem Rectangel APMG gleich.

II. Es iſt der Triangel AQG dem Parallelogramm AQMP gleich. Denn dieſe beyden Figuren haben den Theil QMOA gemeinſchaftlich und die zwey andern Theile TOA und OMG, die noch zu ihnen gehören, wenn ſie vollſtändig ſeyn ſollen, ſind ſich gleich (§. 34.). Folglich u. ſ. w.

§. 36.

Achter Hauptſatz. Laſſet uns durch einen Punkt x der Axe, der zwiſchen A und P iſt, mit der Tangente AG eine Parallellinie ziehen, und durch den Punkt u, wo ſie die krumme Linie durchſchneidet, ziehe man SuK mit der Tangente TM parallel, ſo wird der Triangel Sxu dem Rectangel AxeG gleich ſeyn.

Beweis. Es iſt klar, daß die Triangel TPM und sxu ſich ähnlich ſind. Folglich verhält ſich $TPM : sxu = \overline{PM}^2 : \overline{xu}^2$ (*a*). Nun verhält ſich aber (§. 6.) $\overline{PM}^2 : \overline{xu}^2 = AP : Ax$. Folglich $TPM : sxu = AP : Ax = AP \times PM : Ax \times xe$. (weil $PM = xe$). Folglich $TPM : sxu = AP \times PM : Ax \times xe$, oder verwechſelt, $TPM : AP \times PM = sxu : Ax \times xe$. Es iſt aber $TPM = AP \times PM$ (§. 35.) Folglich iſt der Triangel $sxu =$ dem Rectangel $Ax \times xe$. W. z. E. W.

§. 37.

Neunter Hauptſatz. Der Triangel SAi iſt = dem Trapez iueG $= udoi + ode$G.

Beweis. Es iſt der Triangel $sxu =$ AxeG (§. 36.) Wenn man folglich von beyden Seiten den gemeinſchaftlichen

(*a*) Denn die beyden Triangel TMP und sxu ſind ſich einander ähnlich, weil bey x und P vermöge der Conſtruction rechte Winkel ſind, und weil der Winkel bey S dem Winkel bey T gleich iſt. Es ſind nämlich nach der Conſtruction TM und Su Parallellinien, die von einer dritten graden Linie xT durchſchnitten werden. Folglich iſt der äuſſere Winkel S dem innern Winkel T gleich. Sind dieſe Triangel aber ähnlich, ſo verhalten ſie ſich gegen einander, wie die Quadrate ihrer gleichnamigten Seiten. Folglich $TPM : Sxu = \overline{PM}^2 : \overline{xu}^2$. B.

Theil AxuI wegnimmt, ſo findet man, daß der Triangel SAI $=$ dem Trapez IueG $=$ udoI $+$ OdeG ſey. W. z. E. W.

§. 38.

Zehenter Hauptſatz. Wenn man die Parallellinie Sr ſo lange verlängert, bis ſie mit der krummen Linie in einem Punkte K zuſammen kommt (§. 15.), und wenn man aus dem Punkte K eine Ordinate KDB auf die Axe ziehet, ſo wird dadurch ein Triangel rDK entſtehen, welcher dem Triangel reu gleich ſeyn wird.

Beweis. Weil die Triangel sxu und SBK ſich ähnlich ſind, ſo verhält ſich $sxu : SBK = \overline{xu}^2 : \overline{BK}^2$ (§. 306. Inſtit. B. II.) Nun verhält ſich aber $\overline{xu}^2 : \overline{BK}^2 = Ax : AB$ (§. 6.) $= Ax \times xe : AB \times BD$ (weil $xe = BD$); Folglich verhält ſich der Triangel sxu zum Triangel SBK, wie das Parallelogramm AxeG zum Rectangel ABDG, oder wenn man die Glieder verwechſelt, sxu : AxeG $=$ SBK : ABDG. Es iſt aber sxu $=$ AxeG (§. 36.) Folglich SBK $=$ ABDG. Allein dieſe beyden letzten Flächen haben den Theil BDrIA gemeinſchaftlich. Folglich iſt die Summe der übrigen ungleichen Theile von einer Seite der Summe der übrigen Theile von der andern Seite gleich, das heißt, SAI $+$ rDK $=$ reu $+$ IueG. Es iſt aber SAI $=$ IueG. Folglich iſt endlich rDK $=$ reu. W. z. E. W.

§. 39.

Erſter Zuſatz. Weil der Triangel rDK dem Triangel reu gleich iſt, und weil dieſe Triangel noch auſſerdem augenſcheinlich ſich ähnlich ſind, ſo folgt, daß $ur = r$K (a) das heißt, daß

(a) Ich behaupte, daß zwey ähnliche Triangel rDK und reu, die ſich auch den Flächen nach gleich ſind, auch lauter Seiten ha-

daß die Sehne *u*K, die mit der Tangente TM parallel iſt, durch die Linie ME, die durch den Berührungspunkt M mit der Axe parallel gezogen iſt, in zwene gleiche Theile getheilet werde. Und weil *ur* nach Belieben angenommen worden iſt, ſo iſt es klar, daß alle Parallellinien mit einer Tangente einer Parabel, die durch einen Punkt dieſer krummen Linie gezogen und ſo lange verlängert worden ſind, bis ſie in einem andern Punkt K mit der Parabel zuſammen treffen (§. 15.) durch eine Linie, die wie ME gezogen iſt, in zwey gleiche Theile getheilet werden. Dieſes iſt die Urſache, warum die Linie ME oder jede andere ähnliche Linie die parallel mit der Axe gezogen wird, ein **Diameter** genennet worden iſt und weswegen *ur* oder *r*K, die durch einen Punkt *r* des Diameters mit der Tangente TM an dem Scheitelpunkt, parallel gezogen ſind, **Ordinaten** genennet werden.

§. 40.

Zweyter Zuſatz. Eine jede Sehne A*z*, (Fig. 10. 11.) die durch einen Puukt *y* eines Diameters NH unterwärts dem Scheitelpunkt N, mit der Tangente an dieſem Scheitelpunkte nicht parallel gezogen wird, kann durch dieſen Diameter nicht in zweene gleiche Theile getheilet werden. Denn, wenn A*z* in *y* in 2 gleiche Theile getheilet wäre, ſo würde, wenn man aus dem Punkt A die Linie AC mit der Tangente TN parallel zöge, dieſe Parallellinie, ſie mögte oberhalb A*z* (Fig. 10.) oder unterhalb A*z* (Fig. 11.) fallen, gleichfals in dem Punkte *r*, durch den Diameter NH in zwey gleiche Theile getheilet werden. (§. 39.) Man würde alſo

---

haben, die in beyden Triangeln einander gleich ſind. Denn, wenn ſich die Triangel ähnlich ſind, ſo verhalten ſich $DK : eu = rD : re$, und weil man vorausſetzt, daß die Oberflächen ſich gleich ſind, ſo iſt $rd \times DK = eu \times re$, oder es verhält ſich $rD : re = eu : DK$. Folglich $DK : eu = eu : DK$. Folglich $\overline{DK}^2 = \overline{eu}^2$ oder $DK = eu$. Folglich auch $rD = re$ und $rK = ru$.

alſo dieſes Verhältnis bekommen: $Ay : yz = Ar : rc$. Wenn man folglich die Sehne cz zöge, ſo würde dieſe mit yr oder mit der Axe AB parallel ſeyn. (a). Folglich könnte eine Linie, die mit der Axe der Parabel parallel wäre, dieſe krumme Linie in zwey Punkten durchſchneiden. Welches unmöglich iſt. (§. 11.)

§. 41.

Dritter Zuſatz. Folglich wird eine Sehne AC, die durch den Diameter NH in zwey gleiche Theile getheilet worden iſt, nothwendig mit der Tangente an dem Scheitelpunkte N dieſes Diameters parallel laufen.

Laſſet uns annehmen, ſie ſey nicht mit derſelben parallel; Man würde folglich aus dem Punkte A eine andere Parallellinie mit Az ziehen können. Dieſe mögte nun oberhalb oder unterwärts AC fallen, ſo würde ſie dieſe Gleichung geben $ay = yz$. (§. 38.) Wenn man aber annimmt, daß AC in zwey gleiche Theile gethellet worden iſt, ſo iſt es unmöglich, daß $Ay = yz$ ſey. (§. 40.) Folglich kann eine Sehne durch einen Diameter der Parabel nicht in zwey gleiche Theile getheilet werden, ohne parallel mit dem Scheitelpunkte dieſes Diameters zu ſeyn.

§. 42.

Vierter Zuſatz. Ziehet durch den Scheitelpunkt M (Fig. 10.) mit einer Ordinate ur an den Diameter ME eine Parallellinie MT; ſo behaupte ich, daß dieſe Parallellinie nothwendig die Tangente dieſer krummen Linie an dem Punkt M ſeyn werde.

Wäre

(a) Denn ſollte das angegebene Verhältniß ſtatt haben, ſo müßten die beyden Triangel Ayr und Azc ſich ſo ähnlich ſeyn, daß der Winkel Ayr dem Winkel Azc gleich ſey. Dieſes könnte aber nicht anders geſchehen, als wenn mit der Baſis zc eine Parallellinie yr gezogen würde. Folglich müßten yr und zc parallel ſeyn. B.

Wäre ſie es nicht, ſo könnte man nothwendig durch dieſen Punkt eine Tangente ziehen, gegen welche die Ordinate *ur* parallel wären, es würde (§. 41.) folglich aus einem Punkt zwo Parallellinien mit der nämlichen Linie gezogen werden können, welches unmöglich iſt. Folglich ꝛc.

§. 43.

Fünfter Zuſatz. Wenn zwey Sehnen AH, und *u*K einer Parabel, (Fig. 12.) die unter ſich parallel ſind in dem Punkte Q und *r* in zwey gleiche Theile getheilet ſind, ſo behaupte ich, daß die Linie Q*r*, die durch die Theilungspunkte gezogen iſt, nothwendig parallel mit der Axe der krummen Linie ſey, das heißt, daß ſie eine von ihren Diametern ſey.

Denn geſetzt Q*r* ſey kein Diameter oder nicht parallel mit der Axe TB, ſo könnte man durch die Mitte *r* der Sehne *u*K, die Linie *sr*P mit TB parallel ziehen. Und alsdenn würde die Sehne *u*K parallel mit der Tangente *s*T ſeyn, die durch den Scheitelpunkt *s* des Diameters *s*P gezogen wäre; (§. 41.) Es würde folglich auch AH mit dieſer Tangente parallel ſeyn. Folglich würde auch AH in dem Punkt *x* durch den Diameter *sx*P in zwey gleiche Theile getheilet ſeyn. (§. 39.) Sie iſt aber auch, vermöge der Bedingung, in dem Punkt Q in zwey gleiche Theile getheilet. Es müßte folglich AQ=A*x* ſeyn, welches unmöglich iſt. Folglich iſt eine Linie, die zwey parallellaufende Sehnen einer Parabel in zwey gleiche Theile theilet, nothwendig einer von den Diametern dieſer krummen Linie.

§. 44.

Aufgabe. In einer gegebenen Parabel einen von den Diametern derſelben, ihre Axe und ihren Scheitelpunkt zu finden.

Auflöſung. 1.) Ziehet in der Parabel zwey parallellaufende Sehnen AH und *u*K (Fig. 12.) Theilet eine jede die-

dieſer Linien in zwey gleiche Theile in den Punkten Q und *r* und ziehet durch dieſe Punkte die Linie Q*r*; Verlängert dieſe, bis ſie in einem Punkte M die krumme Linie durchſchneidet; ſo wird die Linie MQ eine von den Diametern der Parabel ſeyn. (§. 43.)

2.) Von irgend einem Punkte K (Fig. 10.), wo eine von den Parallellinien *u*K die krumme Linie durchſchneidet, laſſet auf dem Diameter MQ, der nach Erforderniß verlängert werden muß, eine Perpendiculairlinie KD fallen. Verlängert dieſelbe, bis ſie die Parabel in einem andern Punkt *q* durchſchneidet. Aus der Mitte dieſer neuen Sehne K*q* richtet eine Linie BT von unbeſtimmter Länge auf. Dieſe wird die verlangte Axe, und der Punkt A, wo ſie die krumme Linie durchſchneidet, der Scheitelpunkt derſelben ſeyn.

§. 45.

Aufgabe. Den Diameter zu finden, welcher durch einen gegebenen Punkt N einer Parabel gehet; wie auch die Lage der Ordinaten gegen dieſen Diameter. (Fig. 11.)

Auflöſung. 1.) Suchet nach Belieben einen andern Diameter MQ, (§. 44.) und ziehet durch den Punkt N die Linie NH mit MQ parallel, ſo werdet ihr den geſuchten Diameter haben. Denn MQ iſt mit der Axe der krummen Linie parallel, (§. 39) Folglich iſt auch NH mit derſelben parallel und alſo ein Diameter.

2.) Um die Lage der Ordinaten gegen dieſen Diameter zu bekommen, ſo nehmet einen gewiſſen Punkt C unter N an. Ziehet die Sehne CN und verlängert ſie bis NT = CN; ziehet durch den Punkt T mit NH eine Parallellinie TH und durch den Punkt A, wo dieſe Parallellinie die krumme Linie berühret, die Linie AC. Dieſe Linie wird in *r* in zwey = Theile getheilet werden. Denn es verhält ſich CN : NT = C*r* : *r*A. Nun iſt aber, vermöge der Conſtruction, CN = NT. Folglich auch C*r* = *r*A. Folglich AC eine Sehne,

die

die durch den Diameter NH in zwey gleiche Theile getheilet iſt, und folglich iſt AC parallel mit der Tangente, die an dem Scheitelpunkte N dieſes Diameters gezogen worden iſt. Dieſes beſtimmet aber die Lage der Ordinaten gegen den Diameter NH. (§. 39).

§. 46.

Aufgabe. Durch einen beliebigen Punkt M einer gegebenen Parabel eine Tangente zu ziehen, ohne ſeine Zuflucht zur Axe zu nehmen. (Fig. 10.)

Auflöſung. Suchet gleich Anfangs den Diameter ME, welcher durch den Punkt M der gegebenen Parabel gehen muß; Suchet auch die Lage der Ordinaten gegen dieſen Diameter. (§. 45) Ziehet durch den Scheitelpunkt M mit einer dieſer Ordinaten des Diameters ME eine Parallellinie MT. Dieſe Parallellinie wird die Tangente dieſer Parabel an dem Punkte M ſeyn. (§. 42.)

§. 47.

Aufgabe. An einer gegebenen Parabel den Diameter NH (Fig. 10.) zu finden, der mit ſeinen Ordinaten A*r* ꝛc. ſo wie mit ſeiner Tangente N*t* an dem Scheitelpunkte N einen Winkel A*r*N macht, der einem gegebenen ſchiefen Winkel *g* gleich iſt.

Auflöſung. 1.) Suchet nach Belieben einen Diameter AB (§. 44.) an dem Punkte A, wo dieſer Diameter die Parabel durchſchneidet, ſetzet einen Winkel *r*AB=*g*. Verlängert A*r*, bis ſie die krumme Linie in einem andern Punkt C durchſchneidet; durch den Mittelpunkt *r* der Linie AC ziehet N*r*H mit AB parallel, ſo wird NH ein Diameter ſeyn (§. 39.) woran A*r* eine Ordinate ſeyn wird (§. 39. 41.) dieſe wird mit ihrem Diameter einen Winkel A*r*N=*g* machen. Denn wegen der Parallellinien AB und NH iſt der Winkel A*r*N=*r*AB. Nun iſt vermöge der Conſtruction *r*AB=*g*. Folglich iſt A*r*N=*g*. W. Z. 1ſte zu Th. W.

2.) Wenn man folglich durch den Scheitelpunkt N dieſes Diameters mit der Ordinate Ar eine Parallellinie Nt ziehet, ſo wird man eine Tangente bekommen (§. 42.) welche mit der Axe oder einem jeden andern Diameter einen Winkel macht, der einem gegebenen Winkel gleich iſt.

§. 48.

Eilfter Hauptſatz. Der Triangel reu oder der Triangel rDK der ihm gleich iſt (§. 38.), iſt = dem Parallelogramm rmTS (Fig. 10.)

Beweis. Es haben dieſe beyden Figuren den gemeinſchaftlichen Theil rMdu. Folglich iſt noch übrig zu beweiſen, daß der Triangel dMe von der einen Seite gleich ſey von der andern Seite udTS $=$ udOI $+$ IOTS. Es iſt aber der Triangel MGO oder dMe $+$ deGO $=$ TAO oder SAI $+$ IOTS. (§. 34.) Addirt man nun zu dem einen und dem andern Theile das Viereck udOI, ſo iſt dMe $+$ deGO $+$ udOI $=$ SAi $+$ IOTS $+$ udOI. Nun iſt aber (§. 37.) udOI $+$ deGO $=$ SAI. Folglich iſt dMe $+$ IOTS $+$ udOI $=$ udTS und alſo dMe $+$ rMdu $=$ udTS $+$ $rmdu$, das heißt, der Triangel reu oder rDK iſt = dem Perallelogramm rMTS. W. z. E. W.

§. 49.

Zwölfter Hauptſatz. Die Quadrate der Ordinaten AQ und ur eines jeden Diameters einer Parabel, verhalten ſich zu einander, wie die correſpondirenden Abſciſſen MQ und Mr. Es iſt alſo zu beweiſen, daß $\overline{AQ}^2 : \overline{ur}^2 = MQ : Mr$.

Beweis. Wenn man die beyden ähnlichen Triangel AQG und reu miteinander vergleichet, ſo verhält ſich AQG : $reu = \overline{AQ}^2 : \overline{ur}^2$ (306. Inſtit. B. 11.) (a) Es iſt aber der

(a) Man ſehe meine Anmerkung zum §. 36. B.

der Triangel $AQG =$ dem Parallelogramm $AQMT$ (§. 35.) und der Triangel $reu =$ dem Parallelogramm $rMTS$ (§. 48.) Folglich verhält ſich $AQMT : rMTS = \overline{AQ}^2 : \overline{ur}^2$. Es haben aber die beyden Parallelogramme $AQMT$ und $rMTS$ gleiche Höhen, weil ſie zwiſchen den nämlichen Parallellinien AT und QM liegen. Folglich verhalten ſie ſich zu einander wie ihre Grundlinien MQ und Mr, das heißt, $AQMT : rMTS = MQ : Mr$. Folglich verhält ſich $\overline{AQ}^2 : \overline{ur}^2 = MQ : Mr$. W. z. E. W.

§. 50.

Erklärung. Eine dritte Proportionallinie (Fig. 11.) zur Abſciſſe Nr von einem Diameter NH einer Parabel, und zu der correſpondirenden Ordinate Ar, heißt der **Parameter** dieſes Diameters. (*a*)

§. 51.

Zuſatz. Es iſt vermöge des zwölften Hauptſatzes klar, daß dieſer Parameter eine beſtändige Linie iſt, das heißt, daß man immer die nämliche dritte Proportionallinie finden wird, welcher Abſciſſe man ſich auch bedienet. Wie dieſes ſchon in Anſehung des Parameters von der Axe gezeiget iſt. (§. 17.)

§. 52.

Dreyzehnter Hauptſatz. Das Quadrat einer jeden Ordinate AQ eines Diameters MD iſt = dem Rectangel aus der Abſciſſe MQ und dem Parameter t dieſes Diameters (Fig. 10.)

Beweis. Denn weil (§. 51.) beſtändig folgendes Verhältniß ſtatt hat $MQ : AQ = AQ : t$, ſo iſt $\overline{AQ}^2 = MQ$

(*a*) Aus der nämlichen Urſache, wie bey der Axe.

$=MQ\times t$. Und wenn man eine andere Ordinate ur annimmt, ſo verhält ſich $Mr : ur = ur : t$ (§. 51.) Hieraus ziehet man die Gleichung $\overline{ur}^2 = Mr \times t$. u. ſ. w. Folglich iſt das Quadrat einer Ordinate gleich dem angegebenen Rectangel. W. z. E. W.

* §. 53.

Erſter Zuſatz. Wenn man folglich eine Linie von unbeſtimmter Länge annähme, auf welcher man den Anfangspunkt N beſtimmt; Wenn man dieſe Linie in eine groſſe Anzahl gleicher oder ungleicher Theile theilte; Wenn man ſie in den Theilungspunkten durch die Parallellinien Ar ꝛc. durchſchnitte, die mit derſelben einen ſolchen Winkel machten, daß ſie die mittlere Proportionallinie zwiſchen ihren Abſciſſen Nr und einer beſtändigen Linie t ausmachten, ſo würde die krumme Linie, die man durch alle äuſſerſte Punkte A, C ꝛc. dieſer mittlern Proportionallinien gehen lieſſe, eine ſolche Linie ſeyn, daß das Quadrat einer jeden Ordinate dem Rectangel aus ihrer Abſciſſe und dem Parameter gleich wäre, und ſie würde folglich eine Parabel ſeyn. Denn alsdann würden ſich die Quadrate der Ordinaten zu einander verhalten, wie die ihnen zugehörigen Abſciſſen. Denn wäre dieſes nicht, ſo würde man eine von der Parabel unterſchiedene krumme Linie haben, in welcher alle Punkte gegen die nämliche Linie die nämlichen Eigenſchaften, wie die Parabel, zeigte. Dieſes iſt aber unmöglich, weil alle Punkte dieſer krummen Linie in dieſem Falle die äuſſerſten Punkte der nämlichen Linie wären oder ſeyn könnten, und folglich alle Punkte dieſer 2 krummen Linien auf einander fallen und ſie alſo nur eine einzige krumme Linie ausmachen müßten. Folglich iſt die angenommene krumme Linie nicht von der Parabel unterſchieden.

§. 54.

Dieſer Zuſatz iſt der umgekehrte dreyzhente Satz und er iſt bloß deswegen wahr, weil überhaupt alle Punkte

der

der krummen Linie die nämlichen Eigenſchaften haben. Denn wenn dieſe Eigenſchaften nur in Anſehung einiger Punkte bewieſen wären, ſo könnte man nicht grade zu darau. ſchlieſſen, daß es eine Parabel ſeyn würde, weil eine andere rumme Linie, indem ſie die erſte in den nämlichen Punkten durchſchnitte, in Anſehung dieſer Punkte die nämlichen Eigenſchaften als die erſte haben, aber doch in andern Punkten durch andere Eigenſchaften charakteriſirt ſeyn könnte. Ich werde dieſes weiter unten zeigen.

Anmerkung. Hieraus erkennet man, wie unumgänglich nothwendig es ſey, die **umgekehrten Sätze** zu beweiſen. Weil dieſe beſtändig ſolche Sätze ſind, die zur Auflöſung der Aufgaben dienen.

* §. 55.

Aufgabe. Wenn die Linie von unbeſtimmter Länge AB (Fig. 13.), deren Anfang in A iſt, als der Diameter einer Parabel, ſo wie das verlängerte Stück AP als der Parameter dieſes Diameters gegeben iſt, eine ſolche Parabel zu beſchreiben, daß der Winkel, den die Ordinaten mit dieſem Diameter machen, einem gegebenen Winkel PAO gleich ſey.

Auflöſung. Ziehet aus dem Punkt A die Linie von unbeſtimmter Länge Ah und aus einem Punkt K, der ſo angenommen iſt, daß $KP > KA$ ſey, beſchreibet mit KP einen Cirkel Peb. Beſchreibet ferner aus dem Punkt I weiter unterwärts und ſo nahe bey K als möglich iſt, einen andern Cirkel Pfc und ſo weiter fort, indem ihr immer unterhalb K und ſo nahe als möglich bey einander Punkte annehmet, und beſtändig P in der Peripherie ſeyn laſſet. Wenn ihr nun aus den Punkten b, c, d ꝛc. in welchen dieſe Cirkel den Diameter AB durchſchneiden, die Linien br, cs, dt ꝛc. ziehet, die mit dem Diameter einen ſolchen Winkel machen, der dem gegebenen PAO gleich iſt, und wenn ihr endlich $br = Ae$ machet und $Cs = Af$, $dt = Ag$ ꝛc. ſo behaupte ich, daß

die Linie *Arst* ꝛc. welche durch die äuſſerſten Punkte der vorigen Linien gehet, eine Parabel ſey.

Beweis. Es verhält ſich nach der Natur eines Cirkels AP : $Ae = Ae : Ab$ Es iſt aber $Ae = br$. (construct.); Folglich verhält ſich AP : $br = br : Ab$. Eben ſo verhält ſich AP : $Af = Af : Ac$. Es iſt aber $Af = cs$. Folglich verhält ſich AP : $cs = cs : Ac$, und ſo auch mit den übrigen Parallellinien. Dieſe ſind demnach die mittlern Proportionallinien zwiſchen den ihnen zugehörigen Abſciſſen, und einer beſtändigen Linie AP. Folglich ſind ihre äuſſerſten Punkte *r*, *s*, *t* ꝛc. in einer Parabel. (§. 53.) worinn AB einer von den Diametern iſt, welcher mit ſeinen Ordinaten einen Winkel macht, der dem gegebenen PAO gleich iſt. (conſtr.)

* §. 56.

Zweyter Zuſatz. Wenn man folglich von allen Punkten *m*, *n*, *o* ꝛc. der graden Linie von unbeſtimmter Länge AO, deren Anfang in A iſt, Parallellinien *mr*, *ns*, *ot* ꝛc. ziehet, die ſich unter einander verhalten, wie die Quadrate $\overline{Am}^2$, $\overline{An}^2$, $\overline{Ao}^2$ ihrer correſpondirenden Abſciſſen, ſo ſind die äuſſerſten Punkte *r*, *s*, *t* ꝛc. dieſer Parallellinien auch in einer Parabel.

Denn, wenn man die unbeſtimmte Linie AB parallel mit *mr* ziehet, und $Ab = mr$ machet und $Ac = ns$ und $Ad = ot$ ſo iſt $\overline{br}^2 = \overline{Am}^2$; $\overline{cs}^2 = \overline{An}^2$; $\overline{dt}^2 = \overline{Ao}^2$; Folglich da $\overline{Am}^2 : \overline{An}^2 = mr : ns = Ab : Ac$ (Beding.); ſo verhält ſich auch $\overline{br}^2 : \overline{cs}^2 = Ab : Ac$. Folglich ſind die Punkte *r*, *s*, *t* ꝛc. in einer Parabel (§. 53.)

§. 57.

Dritter Zuſatz. Erinnert euch wieder an den fünften Hauptſatz (§. 29.) worinn man bewieſen hat, daß in Anſe-

hung der Axe die Subtangente jederzeit das Duplum einer Abſciſſe ſey, wenn man eine Tangente als gezogen annimmt; und daß man im umgekehrten Falle nothwendig eine Tangente bekomme, wenn man die Subtangente doppelt ſo groß, als die Abſciſſe annimmt; Ihr werdet alsdenn, ohne daß es nöthig wäre den Beweis zu wiederhohlen, erkennen, daß, wenn man in der eilften Figur von einem Punkt f eine Tangente fO ziehet, die mit dem Diameter in O zuſammen ſtößt, und wenn man von dem nämlichen Punkt f die Ordinate fS an dieſen ziehet (§. 45) ſo werdet ihr erkennen, ſage ich, daß die Subtangente OS das Duplum der Abſciſſe MS oder daß $OM = MS$ ſey.

Denn man hat dieſe Eigenſchaft in Abſicht auf die Axe nur daher bewieſen, weil die Quadrate der Ordinaten der Axe ſich unter einander verhielten, wie die ihnen zugehörigen Abſciſſen. Nun findet aber bey jedem Diameter der Parabel gleichfalls das Verhältniß zwiſchen den Quadraten der Ordinaten und den ihnen zugehörigen Abſciſſen ſtatt (§. 49.) Folglich kann man daraus ſchlieſſen, wie in dem fünften Satze, daß $OS = 2MS$ und umgekehrt daß, wenn $OS = 2MS$ oder $OM = MS$ und wenn man die Ordinate Sf ziehet, (§. 45.) die Linie Of die Tangente ſeyn werde.

* §. 58.

Aufgabe. Von einem Punkte O auſſerhalb der Parabel eine Tangente an dieſe krumme Linie zu ziehen. (Fig. 11.)

Auflöſung. Habt ihr weder die Axe noch einen andern Diameter, ſo ſuchet einen derſelben (§. 44.) Ich will annehmen, daß es NH ſey. Darauf müſſet ihr aus dem Punkt O die Linie OQ von beliebiger Länge, doch parallel mit NH ziehen. Dieſe wird in einem Punkte M mit der Parabel zuſammen ſtoſſen, (§. 11.) und ein Diameter von derſelben ſeyn. (§. 39.) Nun müſſet ihr $MS = MO$ machen und durch den Punkt S müſſet ihr die Ordinate Sf zie-

hen (§. 45.), ſo wird alsdenn die Linie Of, die durch den Punkt O an den Punkt f gezogen iſt, die Tangente ſeyn. (§. 57.); Denn die Subtangente OS iſt das Duplum der Abſciſſe MS (conſtruct.)

* §. 59.

Vierter Zuſatz. Wenn man folglich von den äuſſerſten Punkten einer Sehne ED (Fig. 14.) die Tangenten EK und KD ziehet, ſo werden dieſe in dem nämlichen Punkt K mit dem verlängerten Diameter Kr, der durch die Mitte der Sehne gehet, zuſammenſtoſſen müſſen.

Denn nach der Conſtruction ſind die Linien EL und LD mit der Tangente an dem Scheitelpunkt N dieſes Diameters parallel (§. 41.) und folglich Ordinaten dieſes Diameters. (§. 39.) Folglich wird NL die Abſciſſe der beyden Ordinaten ſeyn. Nun iſt aber die Subtangente das Duplum der Abſciſſe (§. 57 und 29.) Folglich wird die Subtangente in beyden Fällen ſich gleich ſeyn, das heißt, ſie wird ſich in dem nämlichen Punkt K des Diameters Kr endigen.

* §. 60.

Nun wollen wir ſogleich durch Hülfe der folgenden Aufgabe die Quadratur eines jeden paraboliſchen Segments geben. Es iſt dieſes ein jedes Stück von der Oberfläche einer Parabel, wie ANCA (Fig. 14.), welches von einem Bogen ANC der krummen Linie und von der Sehne AC die unter demſelben gezogen iſt, eingeſchloſſen iſt. Auch ſagt man, daß ein Triangel in einem paraboliſchen Segmente eingezeichnet ſey, wenn er zur Grundlinie die Sehne AC dieſes Segments hat und wenn ſeine Spitze in einem Punkt N des Bogens ANC iſt.

* §. 61.

Aufgabe. In dem Segmente einer Parabel ANCA den gröſten möglichen Triangel zu beſchreiben. (Fig. 15.)

Auflö-

Aufloͤſung. Ziehet durch die r der Sehne AC, den Diameter Nr (§. 44.), und von dem Punkt N, wo er die krumme Linie durchſchneidet, ziehet die graden Linien NA, NC: Alsdenn behaupte ich, daß der Triangel ANC der groͤſte Triangel ſey, den man in dem Abſchnitte ANCA beſchreiben kann.

Beweis. Vermoͤge der Conſtruction iſt Ar oder Cr eine Ordinate des Diameters Nr, das heißt, dieſe Linie iſt nothwendig parallel mit der Tangente NT an dem Scheitelpunkt N dieſes Diameters. (§. 41.) Folglich iſt von allen Punkten des Bogens ANC der Punkt N derjenige, der am weiteſten von der Grundlinie AC entfernet iſt; Alle uͤbrige Punkte befinden ſich unterhalb der Tangente NT. Folglich haben die verſchiedenen Triangel NAC, die man hinein zeichnen kann, die naͤmliche Grundlinie als dieſer Triangel, aber eine kleinere Hoͤhe. Sie ſind alſo nothwendig kleiner. Folglich iſt der Triangel ANC der groͤſte.

* §. 62.

Fuͤnfter Zuſatz. Der groͤſte Triangel, der in dem Segmente eingezeichnet werden kann, ANC iſt allemal groͤſſer als die Helfte des Abſchnitts ANCA, in welchem er verzeichnet iſt. Denn wenn wir die Tangente TP an dem Scheitelpunkt N ziehen und die Linien AT und CP parallel mit dem Diameter ND machen, ſo iſt es evident, daß der Triangel ANC, die Helfte des Parallelogramms CATP ſey, mit welchem er gleiche Grundlinie und Hoͤhe hat; Nun iſt aber CATP groͤſſer, als der Abſchnitt ANCA. Folglich iſt der Triangel ANC groͤſſer als die Helfte des Abſchnitts.

* §. 63.

Sechster Zuſatz. Wenn man folglich fortfuͤhre die groͤſten moͤglichen Triangel in den neuen Abſchnitten NCN und NAN zu verzeichnen, ſo wuͤrde man auf dieſe Art mehr, als

die Helfte von einem jeden Segmente wegnehmen, und wenn man beſtändig fortfahren würde, dieſe Triangel hinein zu zeichnen, ſo würde man endlich ſo, wie man immer neue Abſchnitte bekommen würde, das heißt, indem man von dem Abſchnitte ANCA immer mehr als die Helfte von dem Reſte wegnehmen würde, ſo würde man, ſage ich, endlich auf eine Gröſſe kommen die kleiner als eine jede gegebene Gröſſe wäre (*a*). Dieſes zeiget an, daß die Summe aller dieſer Triangel von dieſem paraboliſchen Segmente, um weniger als eine jede noch ſo klein angenommene Gröſſe unterſchieden ſeyn würde. Wenn man folglich das Verhältniß der Summe aller dieſer Triangel gegen eine bekannte und zu quadrirende Gröſſe beſtimmen könnte, ſo iſt es klar, daß man die Quadratur des paraboliſchen Segmentes haben würde, welche nichts anders iſt, als die Summe aller dieſer Triangel. Dieſes Verhältniß werde ich ſogleich im folgenden Zuſatze beſtimmen.

* §. 64.

Siebender Zuſatz. Wenn man in dem Segmente ANCA (Fig. 14.) den gröſten möglichen Triangel ANC (§. 61.) beſchreibet, ſo wird dieſer Triangel viermal ſo groß ſeyn, als die Summe der beyden gröſten Triangel CEN und ADN, die man in den Abſchnitten CENC und ADNA beſchreiben kann, oder welches einerley iſt, der Triangel N*r*C, welcher die Helfte von dem groſſen Triangel CNA iſt, wird viermal ſo groß ſeyn, als der Triangel CEN, und ſeine andere Helfte A*r*N wird viermal ſo groß ſeyn, als ADN.

Beweis.

(*a*) Es iſt klar, daß wenn man von irgend einer Gröſſe z. E. einem Schuh die Helfte nimmt; Darauf die Helfte von der Helfte, und immer die Helfte von dem, was übrig bleibt, ſo iſt es klar, ſage ich, daß man durch dieſe Theilung endlich auf einen Reſt komme, der kleiner iſt, als eine jede gegebene Gröſſe. Noch ſchneller wird man dahin kommen, wenn man immer mehr, als die Helfte wegnimmt.

Beweis. Ziehet die Tangente EK bis ſie in irgend einem Punkt K mit dem verlängerten Diameter Nr zuſammenſtößt (§. 13.). Ziehet auch durch den Scheitelpunkt N die Tangente NI, biß ſie in einem Punkt I den verlängerten Diameter EQ berühre. Endlich ziehet durch die Punkte E und F die Linien EL und FM mit der Tangente NI parallel und erwäget, daß, da EQ vermöge der Conſtruction mit Kr parallel iſt, auch EK mit FN parallel ſey (§. 41.); ſo werdet ihr finden, daß EF=KN. Nun iſt aber KN=NL (§. 57.) und NL=EI, weil ELNI ein Parallelogramm iſt; Folglich iſt EF=EI. Folglich iſt FI das Duplum von FE. Folglich iſt der Triangel NFI das Duplum von dem Triangel NFE, weil dieſe beyden Triangel gleiche Höhe in N haben, und der erſte eine doppelt ſo groſſe Grundlinie hat, als der zweyte. Es iſt aber auch der Triangel CEN das Duplum vom Triangel NFE (conſtr) Folglich iſt der Triangel CEN=NFI. Nun iſt NFI=NFM, weil die Figur FMNI ein Parallelogramm iſt; Folglich iſt CEN=NFM. Es iſt aber NFM nur der vierte Theil vom Triangel NrC (*a*), weil die Seiten des erſtern Triangels nur halb ſo groß ſind, als die correſpondirenden Seiten des zweyten (conſtr.); Folglich iſt CEN auch nur der vierte Theil von NrC, oder NrC iſt viermal ſo groß als CEN.

Wenn man in Anſehung des Triangels ADN die nämliche Conſtruction macht, das heißt, wenn man die Tangente DK ziehet (§. 59.) ꝛc. ſo wird man durch eine, dem vorigen ähnliche Art zu ſchlieſſen finden, daß der Triangel ArN viermal ſo groß ſey als ADN Folglich, daß der ganze Triangel ANC viermal ſo groß ſey, als die Summe der beyden Triangel CEN und ADN. W. z. E. W.

G 5 Das,

(*a*) Das heißt: Es verhält ſich der Triangel NFM zum Triangel NrC wie $\overline{NF}^2 : \overline{NC}^2$ oder wie das Quadrat von 1. zu dem Quadrate von 2. und folglich wie 1. zu 4.

Das, was man den Augenblick von dem Triangel ANC in Anſehung der beyden Triangeln CEN und ADN bewieſen hat, dieſes wird man auch von dem Triangel CEN in Anſehung der gröſten Triangel die in den Segmenten CEC und ENE können verzeichnet werden, und von dem Triangel ADN in Anſehung der gröſten Triangel die in den Abſchnitten ADA und DND können beſchrieben werden, und ſo beſtändig fort beweiſen können, indem man immer, ſo, wie neue Abſchnitte entſtehen, die gröſten Triangel darinn verzeichnet.

* §. 65.

Achter Zuſatz. Man wird demnach eine Progreßion oder eine Reihe von Triangeln haben, die in dem gegebenen paraboliſchen Segmente eingezeichnet ſind, die immer mehr als die Helfte von den Segmenten, worinn ſie gezeichnet ſind, (§. 62.) abſchneiden, und eine Summe geben werden, die für die Oberfläche des paraboliſchen Abſchnitts wird angenommen werden können (§. 63.). Es iſt aber dieſe Progreßion ſo beſchaffen, daß ihr erſtes Glied viermal ſo groß iſt, als das zweyte, das zweyte viermal ſo groß, als das dritte und das dritte viermal ſo groß, als das vierte, und ſo ins unendliche fort (§. 64.) Nun verhält ſich aber die Summe aller Glieder einer ſolchen Progreßion zu dem erſten oder gröſten Gliede wie 4 : 3 (*a*). Folglich verhält ſich das paraboliſche Segment ANCA

(*a*) Folgende Erläuterung hierüber wird vielen nicht unangenehm ſeyn. Was eine geometriſche Progreßion ſey, wird ein jeder wiſſen, der dieſes Buch lieſet. Abnehmend heiſſet ſie, wenn die vorhergehenden Glieder immer gröſſer als die nachfolgenden ſind. Z. E. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. ꝛc. Unendlich heißt ſie, wenn man die Anzahl ihre Glieder ohne Aufhören vermehret. Die Summe einer ſolchen Progreßion entſtehet aus der Addition aller der einzelnen Glieder. Nun fragt ſich, wie kann man auf eine leichte Art die Summe einer abnehmenden Pro-

ANCA zu dem gröſten Triangel ANC, welches das gröſte Glied iſt, wie 4 : 3, das heißt, ein ſolches paraboliſches Se-

---

Progreßion finden, deren Anzahl der Glieder unendlich iſt? Wir wollen die Antwort auf folgende Art zu erfinden ſuchen. Es ſey die Progroßion $a:b = b:c = c:d = d:e \ldots$ oder kürzer: $a.\ b.\ c.\ d.\ e \ldots$ In dieſer Progreßion ſind $a.\ b.\ c.\ d.$ die vorhergehenden Glieder und $b.\ c.\ d.\ e.$ die nachfolgenden. Nun ſey die Summe S zu finden. Man erkennet ohne Schwürigkeit, daß die Summe aller vorhergehenden Glieder aus der Summe alle Glieder weniger dem lezten beſtehe; und die Summe der nachfolgenden Glieder aus der Summe aller Glieder der Progreßion weniger dem erſten. Es ſey nun das letzte Glied e; So iſt folglich die Summe der vorhergehenden Glieder $= S - e$ und die Summe der nachfolgenden $= S - a$. Es ſey z. E. die Progreßion in Zahlen 16. 8. 4. 2. 1. ſo iſt die Summe aller vorhergehenden Glieder $= 16 + 8 + 4 + 2$ und Summe der nachfolgenden Glieder $= 8 + 4 + 2 + 1$. Die Summe aller Glieder $= 16 + 8 + 4 + 2 + 1$. Folglich iſt die Summe der vorhergehenden Glieder $= (16 + 8 + 4 + 2 + 1) - 1$ das heißt = der ganzen Summe weniger dem lezten Gliede und die Summe aller nachfolgenden Glieder $= (16 + 8 + 4 + 2 + 1) - 16 =$ der ganzen Summe weniger dem erſten Gliede. Es verhält ſich aber die Summe aller vorhergehenden Glieder zur Summe aller nachfolgenden Glieder, wie das erſte Glied zum zweyten. Folglich in unſer Progreßion $(a+b+c+d):(b+c+d+e) = a:b$. Die Richtigkeit dieſes Verhältniſſes kann folgender Geſtalt erkannt werden: Das Verhältniß iſt ein wahres Verhältniß, wenn man darthun kann, daß das Produkt der äuſſern Glieder = ſey dem Produkt der mittlern Glieder (nach der Arith.). Es iſt folglich zu beweiſen, daß $(a+b+c+d)b = (b+c+d+e)a$, oder daß $ab+bb+cb+db = ab+ca+da+ea$ ſey. Dieſes erhellet aber folgendermaſſen: Denn es iſt

1.) $ab = ab$
2.) $bb = ca$ (Denn in der Progroßion iſt folgende Proportion $a:b = b:c$. Folglich iſt $ca = bb$).
3.) $cb = da$ (Denn in einer Progreßion verhalten ſich alle Glieder auf einerley Art zu einander. Folglich auch $a:b = c:d$. Folglich $da = cb$).
4.) $db = ea$. (Aus vorigen Gründen).

Segment iſt jederzeit $\frac{4}{3}$ von dem gröſten Triangel, der in demſelben beſchrieben werden kann. Der Innhalt dieſes Trian-

gels

Folglich iſt $ab+bb+cb+db=ab+ca+da+ea$. Folglich $(a+b+c+d)b=(b+c+d+e)a$. Folglich verhält ſich $(a+b+c+d):(b+c+d+e)=a:b$. Folglich verhält ſich auch nach dem obigen $S-e:S-a=a:b$. Folglich iſt auch $bS-be=aS-aa$, und da es eine abſteigende Progreßion iſt und alſo $a>b$, ſo iſt auch $aa-be=aS-bS=(a-b)S$. Folglich iſt $\frac{aa-be}{a-b}=S$. Setzet man nun die Progreßion ins unendliche fort, ſo wird, da die Glieder immrr kleiner werden, man endlich auf ein Glied kommen, das kleiner iſt, als jede angebliche Gröſſe. In dieſem Falle kann man das leztere Glied oder $e=0$ ſetzen. Alsdenn wird aus der vorigen Gleichung $\frac{aa-be}{a-b}=S$ folgende werden $\frac{aa-b0}{a-b}=S$. Allein wenn man eine 0 auch noch ſo vielmal nimmt, ſo iſt das Produkt immer $=0$. Folglich iſt auch $b0=0$. Folglich iſt $\frac{aa-0}{a-b}=S$. Folglich $\frac{a\,a}{a-b}=S$. Nun wird man die hier folgende Anmerkung des Herrn Verfaſſers verſtehen. V.

Da man die Summe S einer unendlich abnehmenden Progreßion, deren beyde erſten Glieder a, b ſind durch dieſe Formel ausdrücket $S=\frac{a\,a}{a-b}$, und da in dem gegenwärtigen Exempel das zweyte Glied b nur der vierte Theil des erſten Gliedes a iſt, das heißt, da $b=\frac{a}{4}$, ſo wird man ſtatt der Formel $S=\frac{a\,a}{a-b}$, wenn man den Ausdruck $\frac{a}{4}$ an der Stelle von b ſetzt, folgende bekommen $S=\frac{a\,a}{a-\frac{a}{4}}$

gels kann aber genau gefunden werden. Folglich hat man auch die Quadratur der Parabel (*a*).

* §. 66.

Neunter Zuſatz. Wenn man daher die Grundlinie AC des Triangels ANC in drey gleiche Theile theilet und alsdenn dieſe Grundlinie um den dritten Theil verlängert, ſo hat man einen Triangel, welcher $\frac{4}{3}$ von ANC und folglich dem paraboliſchen Abſchnitte gleich iſt. (§. 65.)

* §. 67.

Zehnter Zuſatz. Wenn man ferner aus den Punkten A und C mit dem Diameter N*r* die Parallellinien AZ und CV ziehet und ſie ſo lange verlängert, bis ſie in den Punkten Z und V mit der Tangente an dem Scheitelpunkte N dieſes Diameters zuſammenſtoſſen, ſo wird man das von auſſen beſchriebene Parallelogramm ACVZ bekommen, wovon der paraboliſche Abſchnitt $\frac{2}{3}$ enthalten wird. Denn es iſt evident, daß der Triangel ANC nur die Helfte des Parallelogramms ACVZ iſt. Nun enthält aber das paraboliſche Segment (§. 65.) $\frac{4}{3}$ des Triangels ANC. Folglich enthält es nur $\frac{2}{3}$ von dem Duplum des Triangels, das heißt, von dem äuſſern Parallelogramm.

Anmerkung Dieſe Methode, die Parabel zu quadriren oder das Verhältniß derſelben gegen das äuſſere Parallelogramm zu beſtimmen, iſt ſehr weitläuftig und beſchwerlich, ob ſie gleich ſehr ſinnreich iſt. Da

---

$= \frac{aa}{\frac{3}{4}a} = \frac{4aa}{3a} = \frac{4a}{3}$. Folglich iſt $S = \frac{4a}{3}$ oder $S \times 3 = 4 \times a$ und folglich verhält ſich $S : a = 4 : 3$. W. z. E. W.

(*a*) Dem Archimedes hat man dieſe Quadratur der Parabel zu verdanken.

Da ich mich nun bemühete, eine andere Auflöſung dieſer Aufgabe zu ſuchen, ſo habe ich das Glück gehabt, eine zu finden, die auf alle zu quadrirende krumme Linien anzuwenden iſt, und die zugleich ſo zierlich iſt, daß vermittelſt einer einzigen Proportion die Sache geendet iſt. Ich gründe dieſe Methode auf einen einzigen Lehnſatz, den man beynahe begreiſt ſo bald man ihn hört.

§. 68.

Lehnſatz für die Quadratur der Parabel oder eine jede andere zu quadrirende krumme Linie. (Fig. 16.) Es ſey AC eine krumme Linie oder ein Theil einer krummen Linie, die immer nach einer Seite zu hohl oder erhaben iſt. Es ſey BC die Axe derſelben, und AB eine Ordinate. Laſſet uns aus dieſen zwoen Linien das Rectangel BD machen und AB oder DC in eine ſehr groſſe Anzahl gleicher Theile theilen; Aus den Theilungspunkten *b*, *g*, *h*... laſſet uns mit BC die Parallellinien *bf*, *gk*, *ht* ziehen Durch die Durchſchnittspunkte *r*, *x*, *y*.... die dadurch in der krummen Linie gemacht werden, laſſet uns mit AB Parallellinien ziehen, damit dadurch Rectangel entſtehen, wovon einige in dem Raum ACDA und ABCA eingezeichnet, andere aber um demſelben verzeichnet ſind. So iſt zum Exempel das Rectangel *b*A ein ſolches Rectangel, von welchem ich behaupte, daß es um dem Raum ADCA beſchrieben ſey. Das Rectangel *bn* aber nenne ich ein in dieſem Raume verzeichnetes Rectangel. So iſt *gr* ein um dieſem Raum beſchriebenes Rectangel und *og* ein in dem nämlichen Raume beſchriebenes Rectangel.

Wenn man dieſes wohl eingeſehen hat, ſo behaupte ich, daß man DC in eine ſo groſſe Anzahl gleicher Theile theilen könne, daß die Summe der innerhalb des Raums verzeichneten Rectangel von der Summe der äuſſern um weniger unterſchieden ſey, als jede angebliche Gröſſe, ſie mag ſo klein ſeyn, als ſie will.

Beweis. Es iſt aus der Conſtruction der 16ten Figur klar, daß der Unterſchied der Summe der, in dem Raume ADCA verzeichneten Rectangel, und der Summe derjenigen, die um demſelben beſchrieben ſind, das Rectangel *b*A ſey (*a*). Wenn man nun die Eintheilungen von DC auſſerordentlich klein macht, ſo kann dieſes Rectangulum kleiner werden als jede angebliche Gröſſe. Folglich . . .

Die nämliche Figur zeigt auch augenſcheinlich, daß der Unterſchied zwiſchen der Summe, der in dem Raum ADCA eingezeichneten und der Summe der um demſelben beſchriebenen Rectangel gleichfals das Rectangulum *b*A ſey. Folglich iſt dieſer Satz wahr, man mag dieſe krumme Linie nach ihrer erhabenen oder nach ihrer hohlen Seite nehmen.

§. 69.

Erſter Zuſatz. Man wird leicht erkennen, daß die Summe der innerhalb des Raums verzeichneten, die Summe der auſſerhalb verzeichneten Rectangel und die Fläche ADCA oder ABCA, in welchem und um welchen ſie beſchrieben ſind, drey vollkommen gleiche Gröſſen ſind, oder daß ſie nur um eine Gröſſe unterſchieden ſind, die kleiner iſt, als jede angebliche Gröſſe.

§. 70.

Eine ſehr einfache Quadratur der Parabel (Fig. 17.) Es ſey die halbe Parabel ABC; AB die Grundlinie derſelben; AT ihre Tangente an dem Punkte A und folglich BC = CT (§. 29.); BD ein Parallellogramm, das um dieſelbe beſchrieben iſt; Es ſey ferner DC in eine ſehr groſſe Anzahl gleicher Theile getheilet wie D*b* und durch die Theilungspunkte *b* ſeyen mit AD Parallellinien gezogen, wie *bf* um

(*a*) Man leſe darüber die Abhandlung nach, die ich nach dem §. 72. einrücken werde. B.

um durch die Durchſchnittspunkte r in der krummen Linie mit AB eine Parallellinie nM zu ziehen. Dadurch werden die Rectangel DAfb und nABM entſtehen, wovon jenes um dem Raum DACD, dieſes um die paraboliſche Fläche ABCA beſchrieben iſt.

Dieſe Conſtruction vorausgeſetzt betrachte man das kleine Stück der krummen Linie Ar als einen Theil der Tangente AT, ſo ergibt ſich wegen der ähnlichen Triangel rAf und ABT folgendes Verhältniß: BT : BA = rf : fA; Nun iſt aber BT = 2CB (§. 29.) und rf = BM. Folglich verhält ſich 2BC : AB = BM : fA. Folglich iſt $fA = \frac{AB \times BM}{2CB}$ und weil CB = fb, ſo iſt $fA \times bf = \frac{AB \times BM \times CB}{2CB} = \frac{AB \times BM}{2}$, das heißt, das Rectangulum $fA \times bf$, welches um den Raum DACD umſchrieben iſt, iſt nur die Helfte des Rectangels AB×BM, welches um dem paraboliſchen Raum ABCA umſchrieben iſt. Das nämliche wird man in jedem andern Punkte der krummen Linie finden, der wie der Punkt r determinirt iſt. Es iſt folglich die Summe der Rectangel, die um dem Raum DAC beſchrieben ſind, nur die Helfte der Summe derjenigen, die um dem Raum ABCA umſchrieben ſind. Setzet man aber die Theilung ſehr weit fort, ſo kommt jede Summe mit dem Raum überein (§. 69.). Folglich iſt der Raum DACD die Helfte der Oberfläche der halben Parabel ABCA Wenn man folglich den Raum DACD = 1 ſetzt, ſo wird die Oberfläche der halben Parabel ABCA = 2 ſeyn, und das Rectangulum BD = 3, das heißt, es wird die halbe Parabel ABCA $\frac{2}{3}$ des um ſie beſchriebenen Parallelogramms BD ſeyn. Dieſes nämliche hat man im §. 67. aber durch einen viel beſchwerlichern Weg gefunden. W. z. E. und z. Th. W. (*a*).

* §. 71.

(*a*) Dieſe Auflöſung iſt offenbar viel einfacher als diejenige, die man durch die Integralrechnung findet, die ohne das noch die Diffe-

* §. 71.

Zweyter Zuſatz. Um alſo die Fläche des paraboliſchen Abſchnitts ANC zu finden (Fig. 15.) muß man den gröſten möglichen Triangel in demſelben beſchreiben (§. 61.), und nachdem man den Innhalt deſſelben ausgerechnet hat, noch $\frac{1}{3}$ ſeines Innhalts hinzufügen. Hierdurch wird man $\frac{4}{3}$ des Triangels ANC bekommen. Dieſe ſind dem Innhalte des Abſchnitts ANCA gleich. (§. 65.)

Oder beſſer: Man beſchreibe um dieſes Segment ein Parallellogramm ACPT und nehme $\frac{2}{3}$ ſeines Innhalts. (§. 70.) (*).

Die

Differential-Rechnung vorausſetzet. Nimmt man darzu noch die Deutlichkeit der Methode der Gränzen oder der Erſchöpfung, deren ich mich bediene, ſo zweifle ich nicht, daß dieſe Art zu quadriren nicht nach dem Geſchmacke der Kenner in dieſer Materie ſeyn ſollte.

(*) Ich rücke hier folgende Aufgabe ein, die meiner Meynung nach keinen Mißfallen bey jemand erregen wird, und die bey ihrer Nutzbarkeit ohne Schwierigkeit verſtanden werden kann. Es ſey (Fig. 17.) die halbe Parabel ABC gegeben, und man ſollte auf einer andern Baſis AB (Fig. 16), die der vorigen gleich wäre, eine halbe Parabel beſchreiben, die zur erſten ein gewiſſes Verhältniß hätte: Wie iſt dieſes zu machen? Es ſey das Verhältgiß wie 2 : 3. Man richte an dem Endpunkt B (Fig. 16.) eine Perpendiculairlinie BC auf. Man theile BC (Fig. 17.) in 2 gleiche Theile und trage dieſe Helfte von B in C (Fig. 16.) 3 mal. Nun ſuche man zu CB und BA (Fig. 16.) eine dritte Proportionallinie, ſo wird dieſe der Parameter der geſuchten Parabel ſeyn. (§. 16), mit welchem man nun leicht eine halbe Parabel auf AB wird beſchreiben können. Der Beweis dieſer Auflöſung iſt ſimpel. Die halbe Parabel ABC (Fig. 17.) iſt $= \frac{2}{3}$ des Rectangels DCAB (§. 70.) und ABC (Fig. 16.) $= \frac{2}{3}$ DCAB. Vermöge der Bedingung haben aber dieſe beyden Rectangel einerley Baſis und folglich verhalten ſie ſich wie ihre Höhen. Folglich verhält ſich die $\frac{1}{2}$ Parabel (Fig. 17.) zur $\frac{1}{2}$ Parabel (Fig. 16.) wie 2 : 3. W. z. E. W.

Die im §. 68. angegebene Methode iſt ſehr geſchickt uns den körperlichen Innhalt eines paraboliſchen Afterkegels oder eines ſolchen Körpers anzugeben, der durch Herumwälzung einer Parabel um ihre Axe erzeuget wird.

* §. 72.

Die Cubatur eines paraboliſchen Afterkegels oder ſeinen körperlichen Innhalt zu finden (Fig. 18.) Theilet die Axe CB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile *cd*, *dl*, *lg* ..... Dieſe Theile müſſen ſo klein, als möglich iſt, ſeyn. Verzeichnet aus denſelben auſſerhalb des paraboliſchen Raums und in demſelben Rectangel wie es die Figur zeiget. Es iſt evident, daß der Unterſchied der äuſſern und innern Rectangel, das Rectangulum *d*D ſey, welches kleiner werden kann als jede angebliche Gröſſe. Jtzt wollen wir uns vorſtellen, daß die Parabel ſich um ihre Axe wälze; ſo wird ſie einen paraboliſchen Afterkegel erzeugen und ſowohl die auſ-

ſerhalb

Ueberhaupt laſſen ſich noch folgende Sätze bemerken, die aus dem §. 70. flieſſen, in welchem bewieſen wurde, daß Parabeln $\frac{2}{3}$ der Rectangel ſind, die um ſie verzeichnet werden. Es müſſen ſich alſo 2 Parabeln zu einander verhalten wie dieſe Rectangel. Es verhalten ſich daher

1.) Parabeln, die gleiche Baſes haben, wie ihre Höhen.

2.) Parabeln, die gleiche Höhen haben, wie ihre Baſes.

3.) Parabeln, die ungleiche Höhen und Baſes haben, ſtehen in zuſammen geſezter Verhältniß der Höhen und Grundlinien.

4.) Bey Parabeln, die bey ungleichen Höhen und Grundlinien, ſich dennoch gleich ſind, verhalten ſich die Baſes umgekehrt wie die Höhen.

Wie alle dieſe Sätze mit Nutzen zu gebrauchen und die nöthigen Conſtructionen zu verfertigen ſind, wird ein jeder leicht begreifen. B.

ſerhalb als innerhalb beſchriebenen Rectangel, werden Cylinder erzeugen, von welchen die Halbmeſſer der Grundfläche Ordinaten der Parabel ſeyn werden. Es wird folglich der Unterſchied zwiſchen der Summe der äuſſern Cylinder und der Summe der innern Cylinder derjenige Cylinder ſeyn, der durch das Rectangulum *dD* beſchrieben wird. Es kann folglich dieſer Cylinder kleiner als jede Gröſſe werden. Man wird folglich den paraboliſchen Afterkegel für die Summe der äuſſern und innern Cylinder nehmen können, weil der Unterſchied, der zwiſchen ihm und den äuſſern oder innern Cylindern iſt, offenbar kleiner iſt, als der Unterſchied zwiſchen den äuſſern und innern Cylindern ſelbſt.

Wenn wir folglich das Verhältniß der Summe der äuſſern oder innern Cylinder gegen irgend eine bekannte Gröſſe beſtimmen können, deren körperlichen Innhalt wir leicht finden könnten, ſo iſt es augenſcheinlich, daß wir auch den Innhalt des paraboliſchen Afterkegels haben würden. Nun verhält ſich aber der Cylinder, der durch das Rectangulum *dk* beſchrieben iſt, zu dem Cylinder, der durch das Rectangulum *li* beſchrieben iſt, welcher alſo vermöge der Bedingung gleiche Höhe mit ihm hat, wie die cirkelförmige Grundfläche des erſten, zur cirkelförmigen Grundfläche dieſes leztern. Dieſe Grundflächen verhalten ſich aber zu einander wie die Quadrate ihrer Halbmeſſer *ds*, *lt* oder wie $\overline{ds}^2 : \overline{dl}^2$. Es verhält ſich aber $\overline{ds}^2 : \overline{dl}^2 = cd : cl$ (§. 6.) $= 1 : 2$ (nach der Conſtruct.); Folglich verhält ſich der Cylinder, der durch das Rectangulum *dh* beſchrieben iſt, zu dem Cylinder, der durch das Rectangulum *li* beſchrieben iſt, wie 1 zu 2. Eben ſo wird man beweiſen, daß der Cylinder, der durch das Rectangulum *dh* beſchrieben iſt, ſich zu dem Cylinder, der durch das Rectangulum *gf* beſchrieben iſt, verhalte wie 1 zu 3 u. ſ. w. Es machet folglich die Summe aller Cylinder, die um den paraboliſchen Raum beſchrieben ſind eine arithmetiſche Progreſſion, deren Glieder ſind 1. 2. 3. 4.... oder 0. 1. 2. 3. 4....

Man findet aber, daß die Summe einer ſolchen Progreßion, das heißt, die Summe aller dieſer äuſſern Cylinder, welche zuſammen genommen nicht von dem paraboliſchen Afterkegel unterſchieden ſind, man findet dieſe Summe der Progreßion, wenn man das gröſte Glied, das heißt in dieſem Falle, wenn man den Cylinder, der durch das Rectangulum B*m* entſtanden iſt, durch die Helfte der Anzahl der Glieder (*a*), oder durch die

(*a*) 1.) Ich habe anderer Orten bewieſen, daß in einem arithmetiſchen Verhältniſſe die Summe der äuſſerſten Glieder, der Summe der mittelſten Glieder gleich ſey.

2.) Folglich iſt in einer jeden arithmetiſchen Progreßion $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g. \ldots$ die Summe $c + e$ jeder zwey Glieder c und e, die gleich weit von den äuſſerſten Gliedern abſtehen, der Summe $a + g$ der äuſſerſten Glieder gleich. Denn wenn man die Progreßion zergliedert, ſo verhält ſich arithmetiſch $a - b = b - c = c - d = d - e = e - f = f - g$ (M). Hier ſiehet man gleich anfangs, daß $a - b = f - g$. Folglich iſt nach der erſten Nummer $a + g = b + f$. So iſt auch klar, daß $b - c = e - f$; Folglich iſt $b + f = c + e$; Folglich iſt $c + e = a + g$.

3.) Wenn folglich die Anzahl der Glieder ungrade iſt, wie in unſerm Exempel, ſo iſt das mittelſte Glied $d = \frac{a+g}{2}$ = der Helfte der Summe der äuſſerſten Glieder. Wenn man nämlich die Progreßion M wieder vor ſich nimmt, ſo iſt es offenbar, daß $c - d = d - e$; Folglich iſt $2d = c + e = a + g$ (Nro. 2.). Folglich iſt $d = \frac{a+g}{2}$.

4.) Hieraus folgt, daß die Summe aller Glieder in einer jeden arithmetiſchen Progreßion gleich ſey der Summe der äuſſerſten Glieder multiplicirt durch die Helfte der Anzahl der Glieder. Denn wenn die Anzahl der Glieder grade iſt, und wenn man alsdenn die Progreßion auf Summen von 2 Gliedern bringt, die von den äuſſerſten Gliedern gleich weit entfernt ſind, ſo werden nur halb ſo viele Summen als Glieder der Progreßion ſeyn. Nun iſt aber jede Summe der Summe der äuſſerſten Glieder gleich (Nro. 2.); Folglich findet ſich in der

die Helfte der Höhe CB, die dieſe Zahl ausdrückt, multipliciret, und wenn man dieſen nämlichen Cylinder durch die ganze Höhe CB multiplicirt, ſo bekommt man den Cylinder, der durch das Rectangulum BD beſchrieben iſt. Hieraus ſiehet man, daß ein paraboliſcher Afterkegel nur die Helfte von einem Cylinder ſey, der die nämliche Höhe und Grundfläche hat und um demſelben beſchrieben iſt.

---

der Summe der Glieder einer arithmetiſchen Progreßion die Summe der äuſſerſten Glieder ſo oft, als die Einheit in der Helfte der Anzahl der Glieder enthalten iſt. Folglich muß man, um die Summe dieſer Glieder zu haben, die Summe der äuſſerſten Glieder, durch die Helfte der Anzahl der Glieder multipliciren.

Wenn die Anzahl der Glieder ungrade iſt, und man annimmt, daß das mittelſte Glied weggenommen ſey, ſo wird man die Summe der übrigen Glieder haben, wenn man die Summe der äuſſerſten Glieder durch die Helfte der Anzahl der übrigen Glieder multipliciret. Um alſo die Summe der Progreßion vollſtändig zu machen, müßte man das weggenommene Glied wieder hinzuſetzen. Dieſes iſt der Helfte der Summe der äuſſerſten Glieder gleich (Nro. 3.). Es würde folglich die ganze Summe der Progreßion, gleich ſeyn der Summe der äuſſerſten Glieder multiplirt durch die Helfte der Summe der graden Anzahl der Glieder + der Helfte der Summe, die herauskommt, wenn man das ungrade mittlere Glied zu ſich ſelbſt addirt, das heißt, multiplicirt durch die Helfte der Summe aller Glieder.

5.) Wenn man folglich eine wachſende Progreßion annimmt, und ihr erſtes Glied = o ſetzet, ſo iſt die Summe der äuſſerſten Glieder dem lezten Gliede gleich und folglich (Nro. 4.) die Summe aller Glieder einer ſolchen Progreßion gleich dem lezten Gliede oder dem gröſten Gliede multipliciret durch die halbe Anzahl der Glieder. W. z. E. W.

Abhandlung
von einigen Methoden den Innhalt der Flächen und der Körper zu finden. (*)

Die Methode der Elemente, deren ſich Cavalerius zuerſt in der Geometrie bediente, und die vom Walliſius nachher verbeſſert worden iſt (*a*) und die vielleicht eine Gelegenheit zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung gegeben hat, iſt nach der Meinung des Abts Deidier (*b*) wenigſtens für Perſonen, die an dem ſynthetiſchen Vortrage gewohnt ſind, immer ſehr zu empfehlen. Die Differential- und Integralrechnung, behauptet dieſer Mathematiker, iſt zu ſehr abſtrakt und metaphyſiſch und läßt, ohngeachtet der Gewißheit des Calculs, einige Dunkelheiten und Zweifel zurück, die allein geometriſche Demonſtrationen zu zerſtreuen im Stande ſind. Ich überlaſſe es andern Männern zu urtheilen, wie weit man dieſes ſonſt groſſen Mannes Aus-

(*) Es ſey mir erlaubt, hier eine kleine Abhandlung von der Methode der Elemente (Methode des Indiviſibles) und der Methode der Erſchöpfung (Methode d'Exhauſtion) oder der Gränzen (Methode des Limites) für diejenigen beyzufügen, in deren Händen die ſchönen Inſtitutionen der Geometrie unſers Herrn Verfaſſers nicht ſind. Ich werde die Gedanken des Herrn Abts mit einiger Freyheit gebrauchen, und hier und da vielleicht einiges verändern oder hinzuſetzen oder weglaſſen. Sie ſoll übrigens im Ganzen ſeine Arbeit bleiben. Mir wird es ein Vergnügen ſeyn, wenn diejenigen, die dieſe Ueberſetzung leſen, mir einigermaſſen für dieſe Nachricht danken werden. B.

(*a*) Man ſehe deſſen Opera math. fol. 365. folg. oder deſſen Arith infinit. B.

(*b*) Siehe deſſen Vorrde zur Abhandlung de la Meſure des Surfaces & des Solides. B.

Ausſpruch hierinn beytreten könne. So viel iſt gewiß. Die Methode iſt leicht. Sie ſetzt gar keine Geometrie voraus. Sie fordert keine vorhergehende tiefe Betrachtungen. Mögte ſie in ihren Grundſätzen auch ſo ſicher ſeyn!

Wir wollen ſie erklären. **Cavallerius** betrachtete alle Körper, als beſtänden ſie aus lauter kleinen gleichen Flächen; Die Flächen aus lauter kleinen gleichen Linien und die Linien aus lauter untheilbaren Punkten. Es machen folglich die Summe der Punkte die Linien, die Summe der Linien die Flächen und die Summe aller Flächen den Innhalt der Körper aus. Man ſehe in folgendem Beyſpiel den Gebrauch dieſer Rechnung. Geſetzt, man wollte beweiſen, daß 2 Parallelogramme, die gleiche Grundlinie und Höhe haben, ſich dem Innhalte nach gleich wären, ſo würde man den Beweis auf folgende Art führen (Platte XI. Fig. 1). Man ſtelle ſich dieſe Flächen vor, als wären ſie mit lauter ſehr kleinen gleichen Linien, die alle mit ihrer Grundfläche parallel liefen, bedeckt. So wird man dieſes ſogleich zugeſtehen müſſen, daß die Summe aller dieſer Linien, die auf einer Fläche liegen, dem Innhalte nach ſo groß ſey, als die Fläche ſelbſt. Da nun alle dieſe Linien ſich einander gleich ſind, ſo werden nothwendig beyde Flächen ſich gleich ſeyn müſſen, wenn in beyden gleich viele Linien enthalten ſind. Es ſind aber in beyden gleich viele Linien, weil ihre beyderſeitige Höhe als gleich angenommen worden iſt. Folglich ſind die beyden Parallelogramme aus gleich vielen gleichen Theilen zuſammengeſetzet; Folglich ſind ſie ſich einander dem Innhalte nach gleich.

Auf die nämliche Art beweiſet man auch, daß zweene Körper von einerley Art von gleichem Innhalte ſind, wenn ſie gleiche Grundflächen und Höhen haben. Man nehme z. E. 2 Pyramiden A und B (Platte XI. Fig. 2.) Wenn man dieſe in allen Punkten der Höhe parallel mit ihrer Grunfläche durchſchnitte, ſo lehrt die Elementargeometrie, daß dadurch in allen Durchſchnitten beyder Pyramiden Flächen entſtehen, die

ſich einander vollkommen gleich und ähnlich ſind. Wegen der gleichen Höhe können nun aus beyden Pyramiden gleich viele Flächen geſchnitten werden. Folglich iſt bey beyden Pyramiden eine gleiche Anzahl gleicher Flächen. Folglich ſind beyde Pyramiden ſich gleich.

Man hat gegen dieſe Beweiſe mit Recht eingewendet, daß es eine Unmöglichkeit ſey, daß Flächen aus Linien ohne alle Breite zuſammengeſetzet wären und daß Körper entſtehen könnten, indem man verſchiedene Flächen übereinander ſetzte. Ihr beweiſet vollkommen geometriſch, ſagte man zu den Verehrern des **Cavallerius**, daß die correſpondirenden Durchſchnitte bey beyden Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche ſich gleich ſind. Wir wollen euch auch dieſes einraumen, daß in beyden gleichvieleDurchſchnitte ſind. Aber können denn Durchſchnitte und Flächen jemals eine Höhe oder Dicke ausmachen? Wäre dieſes, ſo müßte man zugeſtehen, daß ein Körper aus Flächen zuſammengeſetzet ſey, oder man müßte den Flächen eine kleine Dicke geben. Und dieſes leztere that **Cavallerius.** Er nahm an, daß ſie eine unendlich kleine Dicke hätten. Aber was iſt denn eine Fläche die dick iſt? Ein wahrer Widerſpruch; Anders kann aus einer Zuſammenſetzung von Flächen nichts als Flächen entſtehen.

Nur ſo kann man ſich vorſtellen, daß aus Flächen Körper zuſammen geſezt werden könnten, indem nämlich Flächen über einander geſetzet würden. Allein es iſt unmöglich ſolchergeſtalt mehr als 2 Flächen anzuordnen. Man nehme 3 derſelben, und ſetze alſo eine von dieſen dreyen zwiſchen den zwey andern. Es wird alsdenn dieſe mittlere die untere von der obern Seite und die obere von der untern Seite berühren. Sie würde folglich aus 2 Flächen zuſammen geſezt ſeyn müſſen, die unter ſich eine gewiſſe Entfernung hätten. Solche 2 Flächen machen aber einen wahren Körper aus, wenn man nämlich dieſe Flächen und ihre Entfernung von einander als ein Ganzes betrachtet. Man hat folglich eine Unmöglichkeit angenommen,

men, wenn man fordert, eine Fläche unmittelbar zwiſchen zwo andern zu ſetzen. Kann man alſo nicht 3 Flächen unmittelbar übereinander ſetzen, ſo wird man niemals daraus einen Körper heraus bringen können, welcher nach dem Vorgeben der Indiviſibiliſten nichts anders als ein Haufen unmittelbar über einander geſetzter Flächen iſt. So ſehr die Anhänger des Cavallerius dieſe und andere abſurde Folgen aus ihrer Annahme einſehen, ſo wenig verwerfen ſie den Satz ſelbſt. Ihr möget, ſagen ſie, ſtatt der Flächendurchſchnitte kleine Körperchen von unendlich kleiner Dicke annehmen, ſo werdet ihr vollkommen befriediget ſeyn. Denn aus Körpern können doch gewiß Körper zuſammen geſetzet werden.

Nach dieſer Antwort ſcheinet es, daß man die Vertheidiger der Methode des Untheilbaren nicht weiter beunruhiget habe, und daß ihre Principien das Anſehen der höchſten Axiomen erhalten haben. Dieſes Anſehen iſt noch dadurch beſtärket worden, weil dieſe Methode auf Folgerungen führt, die nach aller Strenge durch unwiderſprechliche Gründe als wahr bewieſen ſind. Solte ein ſo richtiges Verhältniß das Produkt eines falſchen Grundſatzes ſeyn?

Man nehme noch einmal die vorige Demonſtration der Indiviſibiliſten von der Gleichheit zwoer Pyramiden vor:

Pyramiden, die eine gleiche Grundfläche und Höhe haben, haben eine gleiche Anzahl von Durchſchnitten —— Das geben wir zu. —— Es iſt geometriſch bewieſen, daß die beyden Durchſchnitte ſich gleich ſind. —— Richtig. —— Allein die Pyramiden ſind aus dieſen Flächen zuſammen geſezt. —— Man erkläre ſich darüber. Sind dieſe Durchſchnitte nichts als Flächen? Die Vertheidiger dieſer Methode haben die Unmöglichkeit davon geſehen. Es müſſen alſo Körperchen ſeyn, woraus dieſe Pyramiden zuſammen geſetzet ſind. Es iſt alſo noch zu beweiſen, daß dieſe Schnittchen in beyden Pyramiden ſich einander gleich ſind. Dieſes ſetzen die Indiviſibiliſten voraus. Ihre Demonſtration iſt alſo eine Petitio Principii.

Sie beweiſen würklich recht ſtreng, daß die Baſes, zwiſchen welchen dieſe kleinen elementariſchen Durchſchnitte oder kleinen correſpondirenden abgekürzten Pyramiden liegen, ſich gleich ſind. Allein dieſes heißt die Frage verändern. Ich fordre, daß man uns die Gleichheit der Körper beweiſe und man demonſtrirt bloß die Gleichkeit der Flächen. Welch ein Paralogiſmus!

Ich gebe es immerhin zu, daß dieſe kleine correſpondirenden elementariſchen Körperchen eine unendlich kleine Dicke haben. Allein man beweiſe mir doch, daß ein jeder von dieſen unendlich kleinen Abſchnitten dem körperlichen Innhalte nach ſeinen correſpondirenden Abſchnitten gleich ſey. Denn das iſt es eigentlich, was wir wiſſen wollen.

Hieraus wird man erkennen, weswegen die Methode der Elemente auf Wahrheiten führt, die ſonſt als richtig bewieſen ſind. Es iſt freylich ſehr leicht, dasjenige als wahr zu beweiſen, was man ſchon als wahr voraus ſetzt.

Die Herren, die ſich dieſer Methode bedienen, fallen folglich in eine Petitio Principii oder Paralogiſmus. Nähmen ſie nämlich an, daß die kleinen correſpondirenden elementariſchen Abſchnitte dem körperlichen Innhalte nach ſich gleich ſind, ſo iſt dieſes offenbar das, was man erſt ſuchen will. Beweiſet man aber die Gleichheit der Flächen, die dieſe Durchſchnitte oben und unten begränzen und folgert daraus die Gleichheit dieſer kleinen Körperchen, ſo iſt dieſes ein unverzeylicher Fehlſchluß.

Endlich füge ich hier noch eine Demonſtration bey, die ſo ſtreng iſt, als eine in der Geometrie ſeyn kann. Vermöge derſelben wird man finden, daß, wenn die Gründe der Indiviſibiliſten richtig ſind, z. E. 2 viereckigte Pyramiden, die gleiche Quadrate zu Grundflächen und gleiche Höhen haben, und wovon die eine grade, die andere ſchief ſtehet, dem Flächeninnhalte nach ſich gleich ſind. Ein Beweis der auf Kegeln

Pris-

Priſmaten, Parallelepipiden und Cylindern anzuwenden iſt. Der Beweis ſelbſt iſt dieſer: (Tab. XI. Fig. 2.)

Da man in den beyden Pyramiden EK und EP nach dem Geſtändniſſe der Indiviſibiliſten gleich viele Durchſchnitte, die mit der Grundfläche parallel laufen, machen kann, und da ein jeder Durchſchnitt *s* der einen, einem jeden correſpondirenden Durchſchnitt *p* der andern Pyramide gleich und ähnlich iſt, (nach der Elementargeometrie), und da endlich die Baſis K und P vermöge der Bedingung gleiche Quadrate ſind, ſo ſind auch dieſe kleinern Durchſchnitte gleiche Quadrate. Dieſes gilt aber von allen correſpondirenden Durchſchnitten, die man in dem Zwiſchenraume zwiſchen den Parallellinien EC und LD machen kann. Folglich iſt auch der äuſſern Einfaſſung dieſer Quadrate ſich gleich, und da man in beyden Pyramiden gleich viele ſolcher Einfaſſungen hat, ſo wird die Summe von dieſen Perimetern von der einen Pyramide ſo groß ſeyn, als die Summe der Perimeter von der andern Pyramide. Eine jede von dieſen Summen von Perimetern bedeckt die ganze Oberfläche ihrer Pyramide. Da man folglich, nach der Meinung der Indiviſibiliſten, den Innhalt der Flächen durch die Linien nnden kann, die ſie bedecken, ſo müſſen auch dieſe pyramidaliſchen Flächen nothwendig ſich gleich ſeyn.

Und doch iſt es allen Geometern bekannt und gar leicht zu beweiſen, daß die Oberfläche der ſchiefen Pyramide P gröſſer iſt als die Oberfläche der graden Pyramide K, wenn ſie beyde gleiche Grundfläche und Höhe haben.

Wenn die Indiviſibiliſten aufrichtig handeln wollen, ſo müſſen ſie dieſe Demonſtration für entſcheidend erkennen, oder wenigſtens dieſes zugeſtehen, daß ihre Art zu beweiſen ſo beſchaffen ſey, daß man dadurch zu gewaltigen Fehlſchlüſſen geführt werde. Dieſes iſt aber ein gewaltiges Aergerniß in der Geometrie. Dieſe Herren werden alſo ſehr gebeten,

ent-

entweder herzhaft ihre Methode zu verdammen oder uns zu ſagen, durch welche neue Stützen ſie dieſelben beveſtigen wollen.

Vielleicht mögte man hier den Einwurf machen, daß hierdurch die Differential- und Integralrechnung untergraben würde. Allein ich bitte diejenigen, die die Verſuchung haben, dieſen Einwurf zu machen, daß ſie ſo gütig ſeyn, ſich auf eine klare und verſtändliche Weiſe darüber zu erklären, und ich verſpreche ihnen, ihre Gründe mit aller der Behutſamkeit zu unterſuchen, die die Wichtigkeit der Sache erfordert. Denn es iſt unmöglich, auf Zweifel zu antworten, die man nicht kennet. Die wahren Fundamente der Differentialrechnung habe ich jederzeit ſo unabhänglich von der Methode des Untheilbaren gefunden, daß mir die Meinung dererjenigen, die hier eine vollkommene Gleichheit zu finden glauben, gänzlich unbegreiflich iſt.

Wäre es inzwiſchen nöthig, in Unterſuchungen, in welchen man ſein eigenes Licht ſeyn ſoll, ſich auf Autorität zu berufen, ſo bitte ich doch auf die Worte des neuen Archimedes des unvergleichlichen Newtons Acht zu haben. Seine Worte ſind folgende: (*a*) *Contractiores —— redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium, ſed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis & propterea methodus illa minus geometrica cenſetur, malui demonſtrationes rerum ſequentium ad vltimas quantitatum evanescentium ſummas & rationes primasque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum rationum deducere —— Proinde in ſequentibus, ſi quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis vſurpavero lineas curvas, nolim indiviſibilia ſed evanescentia diviſibilia, non ſummas & ra-*

(*a*) Man leſe den erſten Abſchnitt im erſten Buche ſeiner Principien in der Anmerkung zum *IIten* Lehrſatz.

rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi ——. Die ganze Stelle des groſſen Newtons iſt ſehr präcis.

Noch weiter gehet Herr D'Alembert, der ein Mitglied der Akademie der Wiſſenſchaften zu Paris iſt, in ſeinem ſchätzbaren Werke von der Dynamik: Die Methode des Unendlich kleinen, ſagt er, hat eine Unſchicklichkeit, daß nämlich Anfänger, die nicht allemal das wahre Weſen und den wahren Geiſt derſelben begreifen, ſich angewöhnen können, dieſe unendlich kleinen Theile als Realitäten anzuſehen. Es iſt dieſes ein Irrthum, gegen welchen man um deſto mehr auf ſeiner Huth ſeyn muß, da groſſe Männer in demſelben verfallen ſind, und da er zu verſchiedenen übelgerathenen Werken wider die Gewißheit der Geometrie Gelegenheit gegeben hat. Die Methode des Unendlich kleinen iſt die Methode der erſten und letzten Verhältniß, das heißt, das Verhältniſſe der Gröſſen, die wachſen und verſchwinden (*a*).

Nur deswegen führe ich dieſe ehrwürdigen Zeugen an, um Leute, die gerne Luſt hätten, ſich in einen Streit einzulaſſen, ein wenig zurückhaltender zu machen; Dieſe Methode des Untheilbaren kann für diejenigen Gelehrten noch immer von Nutzen ſeyn, die immer begieriger zu ſchwatzen als geneigt ſind zu lernen, die ſich gerne mit Wiſſenſchaften amuſiren mögten, ohne daß eine aneinander hängende Bemühung in denſelben ihnen ein Recht darzu gegeben hat.

Ich gehe itzt zur Methode der Erſchöpfung der Alten fort. Von deren Benennung wir bald den Grund einſehen werden. Wir ſetzen folgende in der Elementargeometrie ſchon bewieſene Wahrheiten voraus, daß 2 dreyeckigte Priſmata

(*a*) Traité de Dynamique pag. 36.

mata die beyderſeits grade ſtehen, oder auf eine gleiche Art geneigt ſind, und gleiche Grundflächen und Höhen haben, ſich vollkommen dem körperlichen Innhalte nach gleich ſind. Und was ſollte für ein Unterſchied zwiſchen denſelben ſeyn, da ſie beyde durch gleiche Dimenſionen auf die nämliche Art determinirt ſind. (*a*) Es gilt eben dieſes auch von Parallelepipiden und andern vieleckigten Priſmaten und Cylindern. In der ausführlichen Beweiſung davon können wir uns hier unmöglich einlaſſen. Hier iſt die ganze Erklärung dieſer ſchönen Methode. Man leſe zuvörderſt noch einmal den §. 68. 69. Die Wahrheiten in denſelben ſind vom Newton, der einen ſo groſſen Geſchmack an der Methode der Alten fand, als Lehnſätze angegeben worden. Die Sätze ſind leicht und werden uns zur beſſern Einſicht in das folgende ungemein vorbereiten.

Nun wollen wir dieſe Methode bey Körpern zeigen. Man nehme eine dreyeckigte Pyramide und beſchreibe in derſelben eine groſſe Anzahl dreyeckigter Priſmaten. Es wird alsdenn endlich die Summe derſelben mit der Pyramide ſelbſt eins werden, oder der ganze körperliche Innhalt dieſer Priſmaten, die in der Pyramide beſchrieben ſind, wird von der Pyramide ſelbſt nicht unterſchieden ſeyn. Der Beweis iſt dieſer: Nehmet an, daß die Höhe *af* der Pyramide *af*KL (Tab. XI. Fig. 3.) durch Flächen die mit der Baſis *f*KL parallel laufen, in eine ſehr groſſe Anzahl gleicher Theile getheilet worden ſey. (Wir wollen, um alle Verwirrung zu vermeiden, nur 4 ſolcher Eintheilungen machen); Setzet ferner, man habe in der Pyramide die dreyeckigten Priſmate *hc*, *od*, *rf* gezeichnet, und durch die Verlängerung ihrer Oberflächen die äuſſern dreyeckigten Priſmate *sf*, *pd*, *mc* ſo beſchrieben, daß ſie mit den innern einerley Grundflächen und Höhe haben. Füget hierzu noch, das äuſſere Priſma *gb*, welches auch von der nämlichen Grundfläche und Höhe mit den übrigen iſt.

Es

(*a*) Man ſehe des Herrn Karſtens Lehrbegrif der Mathematik, *I* Theil. Imgleichen des Herrn von Segners *Curſ. Math. P. I.* B.

Es iſt alsdenn evident, daß der Unterſchied zwiſchen den von innen und von auſſen verzeichneten Priſmaten die Summe der Körperchen *gb*, *mt*, *px* und *sy* ſey. Es iſt aber dieſe Summe dem äuſſern Priſma *sf* gleich. Denn Priſmate, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, ſind ſich nach der vorhin gemachten Anmerkung gleich. Folglich iſt $gb = hc$ und alſo $gb + mt = hc + mt =$ dem ganzen Priſma *mc*. Es iſt ferner $mc = od$ wegen gleichen Grundflächen und Höhen. Folglich iſt $mc + px = od + px = pd$. Nun iſt $pd = rf$. Folglich $pd + sy = rf + sy =$ dem ganzen Priſma *sf*. Folglich iſt der Unterſchied zwiſchen den von auſſen und von innen verzeichneten Priſmaten = dem einzigen von auſſen beſchriebenen Priſma *sf*. Theilet man nun die Höhe *af* in eine recht groſſe Anzahl von Theilen, ſo kann das Priſma *sf* kleiner werden als jede angebliche Gröſſe und folglich wird in dieſem Fall der Unterſchied zwiſchen den auſſerhalb und innerhalb der Pyramide verzeichneten Priſmaten nicht anzugeben ſeyn. Dieſe beyde Arten von Priſmaten können ſich aber in Anſehung der Gleichheit der Pyramide, die die Gränze von beyden iſt, immer nähern. Setzet man demnach die Theilung ſehr weit fort, ſo nähert ſich die Summe der in der Pyramide verzeichneten Priſmaten der Pyramide ſo ſehr, daß deren Unterſchied verſchwindet. Folglich iſt die Summe der in der Pyramide verzeichneten Prismaten = der Pyramide, oder wenn man will, ſie differirt von derſelben um eine Gröſſe, die nicht zu beſtimmen iſt.

Dieſen Satz muß man wohl einſehen. Es iſt der ganze Grund der Methode der Alten darinn entdecket. Sie beſtehet, wie man ſiehet, in dieſem beſondern Falle darinn, daß man eine ſo groſſe Anzahl von Priſmaten um die Pyramide oder in derſelben verzeichnet, daß die Beſchreibung von auſſen und von innen gleichſam erſchöpft ſey. Daher hat dieſe Methode den Namen der Erſchöpfung bekommen. Es lieſſe ſich füglich zeigen, daß die Differential- und Integralrechnung bis auf dieſe Methode zurück gehe.

Wenn man nun etwas über die **Methode der Erſchöpfung** der Alten reflectirt, ſo wird man finden, wie geſchickt ſie ſey, nicht bloß den Verſtand aufzuklären, ſondern zu einer vollkommenen Ueberzeugung zu führen; Sie iſt hierinn gar ſehr von der **Methode der Elemente** verſchieden, die immer in dem Verſtande eine gewiſſe Unruhe unterläßt, die ohne Aufhören diejenigen plaget, die das Licht ſuchen und nicht finden: denn die **Indiviſibiliſten** beweiſen die Gleichheit der Flächen, und folgern daraus unmittelbar eine Gleichheit des körperlichen Innhalts zwiſchen den Körperchen, die dieſe Flächen haben; Grade als wenn 2 Körper nicht gleiche Flächen haben könnten, ohne dem körperlichen Innhalte nach ſich gleich zu ſeyn. Und wenn ſie es auch allemal wären, ſo fehlte doch noch immer der Beweis. Nach der **Methode der Erſchöpfung** hingegen ſchließt man, daß Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche ſich gleich ſind, weil ſie aus einer gleichen Anzahl von Körperchen zuſammen geſetzet ſind, deren Gleichheit aufs ſtrengſte bewieſen iſt. Und wenn man auch annimmt, daß die Summen dieſer Körperchen nicht vollkommen einerley mit der Pyramide iſt, ſo iſt wenigſtens dieſes nach aller Strenge bewieſen, daß der Unterſchied zwiſchen ihnen nicht anzugeben iſt.

Es beſtehet folglich, wie wir geſehen haben, die Methode der Erſchöpfung darinn, daß man zeige, daß 2 oder mehrere Gröſſen ſich gleich ſind, wenn man zwiſchen ihnen keinen Unterſchied anzugeben im Stande iſt. Ja! wenn man auch dieſen Unterſchied von einer erſtaunlichen Kleine annimmt, ſo kann er doch dieſen Gröſſen ſelbſt nicht zukommen, denn man kann immer beweiſen, daß ſie ſich einander näher kommen, als daß dieſe angegebene Differenz ſtatt haben könne. Kann man aber zwiſchen Gröſſen keine Differenz angeben und begreift man über diß daß die etwa angezeigte Differenz unendlich verringert werden könne, ſo daß ſie nicht nur nicht mehr ſinnlich wird, ſondern auch nicht einmal im Verſtande denkbar iſt, ſo muß man gewiß eingeſtehen, daß dieſe Gröſſen ſich

gleich ſind, weil ungleiche Gröſſen nothwendig eine Differenz haben, die man angeben kann. (*a*) ——.

Hier hat man das Weſentliche der beyden Methoden. Man vergleiche und urtheile nach Belieben; Doch daß nur Wahrheit immer den Sieg davon trage! So viel ich urtheilen kann, wird dieſe hier eingerückte Abhandlung, ohngeachtet ſie etwas lang geworden iſt, ſelbſt ſolchen Perſonen nicht mißfällig ſeyn die auch ſchon im Differential- und Integralcalcul ſich etwas geübet haben. Man kann öfters eine Wiſſenſchaft erlernet haben, ohne daß man bis auf die wahren Gründe zurück gegangen wäre. Sollte alsdenn nicht dieſes Ausgeführte vielleicht zu eigenem Nachdenken Gelegenheit geben? B.

§. 73.

Der vierzehnte Hauptſatz. Der vierte Theil des Parameters t eines Diameters MD (Fig. 10.) iſt ſo groß, als der 4te Theil des Parameters p der Axe + der Abſciſſe AP, die durch die Ordinate MP, welche man durch den Anfangspunkt M dieſes Diameters gezogen hat, beſtimmt wird. Das heißt $\frac{t}{4} = x + \frac{p}{4}$.

Beweis. Ziehet durch den Anfangspunkt des Diameters MD die Tangente MT; und durch den Scheitelpunkt A der Parabel die Linie AQ mit MT parallel. Die Linie AQ wird alsdenn eine Ordinate des Diameters MD ſeyn. Bemerket, daß AQ = MT und MQ = AT (conſtr.) = AP = x; PT = $2x$ (§. 29.); $\overline{PT}^2 = 4xx$; $\overline{PM}^2 = px$ ſey.

(*a*) Schon Euclides und Archimedes nahmen ſolche Gröſſen für gleiche an. Man leſe weiter hierüber nach des berühmten Geometers Herrn Käſtners Anfangsgründe *I* Theil 22. 24. und 41ten Satz der Geometrie nebſt ihren Zuſätzen. B.

ſey. (§ 20.) Nun iſt $\overline{AQ}^2 = MQ \times t$ (§. 52.); Folglich iſt $t = \frac{\overline{AQ}^2}{MQ} = \frac{\overline{MT}^2}{AT}$. Es iſt aber wegen des rechtwinklichten Triangels MPT, $\overline{MT}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{PM}^2$. Folglich iſt $t = \frac{\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2}{AP} = \frac{4xx + px}{x} = 4x + p$. Folglich $\frac{t}{4} = x + \frac{p}{4}$.

§. 74.

Zuſatz. Weil $t = 4x + p$ iſt, ſo folgt daraus, daß $p < t$, das heißt, daß der Parameter der Axe der kleinſte von allen Parametern ſey.

§. 75.

Fünfzehnter Hauptſatz. Wenn man an der Spitze M eines Diameters MI (Fig. 19.) eine Tangente MT ziehet und wenn man dem Winkel TMF die Gröſſe des Winkels TMO gibt, welcher von dieſer Tangente mit dem verlängerten Diameter MI gemacht wird, ſo wird die Linie MF mit der Axe in einem Punkt F ſo zuſammen ſtoſſen, daß MF dem vierten Theil des Parameters dieſes Diameters gleich iſt; das heißt, daß MF $= \frac{t}{4}$ oder $= x + \frac{p}{4}$ (§. 73.)

Beweis. Machet MO = MF und ziehet die Linie FO, ſo iſt es klar, daß FO, MT perpendiculair durchſchneide. Denn wenn man die beyden Triangel MyF und MxO mit einander vergleichet, ſo iſt der Winkel MFO = MOF und TMF = TMO (conſtr.); Folglich iſt der Winkel $x = y$. Folglich durchſchneidet FO die Linie MT perpendiculair. Wenn man nun aus dem Punkt M die Linie ML perpendiculair auf MT aufrichtet, ſo iſt die Figur OFLM ein Parallelogramm; Folglich iſt MO = FL. Nun iſt vermöge der Conſtruction MO = MF. Folglich iſt MF = FL; Folglich FP = FL — PL = MF — PL. Es

iſt

iſt aber die Subnormallinie $PL = \frac{p}{2}$ (§. 31); Folglich $FP = MF - \frac{p}{2}$; Folglich iſt $\overline{FP}^2 = \overline{MF}^2 - (p \times MF) + \frac{pp}{4}$. Es iſt aber wegen des rechtwinklichten Triangels FPM, $\overline{MF}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2$ (S). Setzet man dahero in der Gleichung S, $\overline{MF}^2 - (p \times MF) + \frac{pp}{4}$ für $\overline{FP}^2$ und px für $\overline{PM}^2$, ſo iſt $\overline{MF}^2 = \overline{MF}^2 - (p \times MF) + \frac{pp}{4} + px$. Nimmt man daher $\overline{MF}^2$ aus dieſer Gleichung auf beyden Seiten weg, und bringt $-(p \times MF)$ auf die andere Seite, ſo iſt $(p \times MF) = px + \frac{pp}{4}$; Und wenn man mit p dividirt, ſo iſt $MF = x + \frac{p}{4} = \frac{t}{4}$ (§. 73). W. z. E. W.

§. 76.

Erſter Zuſatz. Hieraus folgt, daß die Linie MF mit der Axe in einem Punkte F unterhalb dem Scheitelpunkt A zuſammen treffe. Denn weil die Linien TL und OM parallel ſind, ſo iſt der Winkel $FTM = TMO$; Es iſt aber vermöge der Conſtruction $TMO = TMF$. Folglich $FTM = TMF$. Folglich iſt $TF = FM$: Nun iſt $FM = x + \frac{p}{4}$ (§. 75) Folglich iſt $FT = x + \frac{p}{4}$. Allein TA iſt $= x$, denn TA iſt der Abſciſſe AP gleich (§. 29). Folglich iſt $TF > TA$; Folglich fällt der Punkt F unter A.

§. 77.

Zweyter Zuſatz. Wenn man ferner von dem Punkt O die Perpendiculairlinie OK auf die Axe ziehet, ſo wird der Punkt K oberhalb dem Scheitelpunkt A fallen. Weil nämlich die Figur OMPK ein Parallelogramm iſt, ſo iſt $PK = MO = MF$ (conſtr.) $= x + \frac{p}{4}$ (§. 75). Folglich iſt $PK = x + \frac{p}{4}$. Es iſt aber $PA = x$. Folglich iſt $PK > PA$, das heißt, der Punkt K fällt oberhalb dem Scheitelpunkt A.

§. 78.

Sechszehnter Hauptſatz. Die Entfernung ſowohl von dem Punkt F als dem Punkt K bis an den Scheitelpunkt A iſt dem vierten Theile des Parameters der Axe gleich; das heißt, AF oder $AK = \frac{p}{4}$.

Beweis. 1.) Nach dem fünfzehnten Hauptſatze iſt $x + \frac{p}{4} = MF = TF$ (conſtr.) $= TA + AF = AP + AF$ (§. 29.) $= x + AF$; Folglich iſt $x + \frac{p}{4} = x + AF$; Folglich iſt $AF = \frac{p}{4}$.

2.) $x + \frac{p}{4} = MF = MO$ (conſtr.) $= PK = PA + AK = x + AK$. Folglich iſt $x + \frac{p}{4} = x + AK$. Folglich $AK = \frac{p}{4}$. W. z. E. W.

§. 79.

Erſter Zuſatz. Folglich iſt, $AF = AK$. 2.) $FK = AF + AK = \frac{p}{4} + \frac{p}{4}$ (§. 78) $= \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$, das heißt, FK iſt der Helfte des Parameters der Axe gleich.

§. 80.

Zweyter Zuſatz. Da man den Diameter MI nach Belieben angenommen hat, ſo iſt es klar, daß wenn man durch einen Punkt M einer Parabel, einen Diameter MI und eine Tangente MT ziehet, und wenn man den Winkel TMF die Gröſſe des Winkels TMO gibt, der durch die Tangente und den verlängerten Diameter gemacht wird, daß alsdenn die Linie MF immer in dem nämlichen Punkte F mit der Axe zuſammen ſtoſſen werde. Denn man wird in allen Fällen finden, daß die Entfernung AF dieſes Punkts von dem Scheitelpunkte der Parabel dem vierten Theil des Parameters der Axe gleich ſey (§. 78). Es iſt aber dieſer Parameter eine beſtändige Gröſſe.

§. 81.

§. 81.

Siebenzehnter Hauptſatz. Es ſey die Conſtruction ſo, wie im fünfzehnten Hauptſatze angegeben worden iſt; Alsdenn behaupte ich, daß der Punkt F ein Brennpunkt oder Focus oder Umbilicus ſey, das heißt, daß die Lichtſtrahlen, welche auf die hohle Seite der Parabel mit der Axe parallel fallen, alle nach dem Punkt F reflectirt werden.

Beweis. Denn es iſt der Einfallswinkel $IMq = TMO$, der durch den Diameter und die Tangente gemacht wird. Nun iſt aber $TMO = TMF$ (conſtr.); Folglich iſt $TMF = IMq$; das heißt, der Lichtſtrahl IM wird nach der Linie MF reflectirt werden, weil der Winkel IMq, den der Lichtſtrahl im Einfallen mit der Linie TMq macht, beſtändig dem Winkel gleich iſt, den dieſer nämliche Lichtſtrahl im Zurückprallen mit derſelbigen Linie macht, (nach den Grundſätzen der Catoptrik). Folglich werden die Lichtſtrahlen, die mit der Axe parallel einfallen, beſtändig ſo reflectirt werden, daß der Zurückprallungswinkel TMF dem Winkel TMO gleich ſey, der durch den Diameter und die Tangente, die an den Einfallspunkt M gezogen iſt. Wenn aber dieſes geſchiehet, ſo hat die reflectirte Linie MF immer eine ſolche Richtung, daß ſie ſich mit der Axe in dem nämlichen Punkt F vereinige. Folglich iſt der Punkt F ein Brennpunkt.

§. 82.

Eben ſo werden umgekehrt die Lichtſtrahlen FM, welche aus dem Brennpunkte F auslaufen und auf die hohle Seite der Parabel in einen Punkt M fallen, alle nach der Linie OMI reflectirt werden, die mit der Axe dieſer krummen Linie parallel iſt.

Beweis. Wenn man aus dem Punkt M die Tangente MT und die Ordinate der Axe MP ziehet, ſo iſt es leicht zu erkennen, daß $FT = AT + AF = AP + AF =$

 $x + \frac{p}{4}$

$x+\frac{p}{4}$ ſey (§. 78). Nun iſt aber MF $=x+\frac{p}{4}$ (§. 75); Folglich iſt FT=MF; Folglich iſt der Winkel FTM= FMT. Allein es iſt der Einfallswinkel FMT= dem Reflexionswinkel IM*q* (nach Catopr. Gründen) =OMT als ſeinem Vertikalwinkel; Folglich iſt der Winkel FTM=OMT; das heißt, die Wechſelwinkel ſind ſich gleich. Folglich iſt die Linie OMI, nach welcher der Lichtſtrahl FM reflectirt wird, mit der Axe AB oder TAB parallel. W. z. E. W.

Dieſer Satz iſt in der Catoptrik von ſehr anſehnlichem und groſſem Nutzen. (Fig. 19).

§. 83.

Aufgabe. In einer gegebenen Parabel den Brennpunkt zu finden (Fig. 19).

Auflöſung. Suchet die Axe AB und den Parameter dieſer Axe (§. 27. 44). Traget den vierten Theil dieſes Parameters von dem Scheitelpunkt dieſer krummen Linie bis an den Punkt F auf der Axe, ſo wird dieſer Punkt F der Brennpunkt dieſer krummen Linie ſeyn. (§. 78. 81).

§. 84.

Erſter Zuſatz. Wenn man folglich die Axe als einen Diameter betrachtet, ſo ſiehet man daß der Parameter eines jeden Diameters jederzeit 4 mal ſo groß iſt, als die Entfernung des Scheitelpunkts dieſes Diameters vom Brennpunkt. Wir haben dieſes 1.) den Augenblick in Anſehung der Axe bewieſen (16ter und 17ter Hauptſatz) 2.) das nämliche iſt im 15ten Hauptſatze in Abſicht auf jeden Diameter bewieſen werden.

§. 85.

Folglich wird man den Parameter eines jeden Diameters erhalten, wenn der Brennpunkt einer Parabel und der Scheitel-

telpunkt, derſelben gegeben iſt, wenn man die Entfernung des Brennpunkts von dem Anfangspunkte dieſes Diameters vier mal nimmt.

§. 86.

Aufgabe. Wenn der Brennpunkt F und die Axe der Parabel gegeben ſind, eine Tangente an irgend einen Punkt M der krummen Linie zu ziehen.

Auflöſung. Nehmet mit einem ordentlichen Zirkel die Entfernung FM. Traget dieſe auf die Axe von F in T und ziehet TM. Dieſes wird die geſuchte Tangente ſeyn.

Beweis. Ziehet die Ordinate MP, um die Abſciſſe $AP = x$ zu bekommen. Man hat im §. 75. bewieſen, daß $MF = x + \frac{p}{4}$ ſey. Nun iſt aber $MF = TF$ (conſtr.); Folglich iſt $TF = x + \frac{p}{4}$ und $FP = AP - AF = x - \frac{p}{4}$ (§. 78); Folglich iſt FP + TF, das heißt, $PT = x + \frac{p}{4} + x - \frac{p}{4} = 2x$. Dieſes zeiget an, daß PT das Duplum der Abſciſſe AP ſey; Folglich iſt TM eine Tangente (§. 30).

Dieſe Art, eine Tangente zu ziehen, iſt die leichteſte unter allen, wenn man nämlich den Brennpunkt und die Axe der krummen Linie hat.

§. 87.

Wenn umgekehrt MT eine Tangente iſt, und wenn man durch den Berührungspunkt M eine Linie MF nach dem Brennpunkt ziehet, ſo iſt dieſe Linie $MF = FT$ als der Entfernung des Brennpunkts von dem Punkt T, wo die Tangente die Axe berührt. Denn wenn man die Ordinate MP ziehet, ſo iſt $AP = AT = x$ (§. 29); Folglich iſt AT + AF, das heißt, $FT = x + \frac{p}{4}$. Es iſt aber $MF = x + \frac{p}{4}$ (§. 75); Folglich iſt $MF = MT$.

* §. 88.

Man ziehet aus der Auflöſung dieſer Aufgabe und aus dem §. 29. einen Satz, wovon Newton in ſeinen Principiis Gebrauch macht. Wir wollen ihn herſetzen, wenn wir vorher einige nöthige Wörter erklärt haben (Fig. 20).

Wenn ein Körper m oder M ſich in einer Parabel oder irgend einem andern Kegelſchnitte beweget, ſo heiſſen die Linien Fm und FM, die aus dem Brennpunkt der krummen Linie auf den Punkt M oder m, worinn ſich der bewegte Körper befindet, gezogen werden, Träger, lateiniſch *Vectores* (Rayons Vecteurs), weil dieſer Radius gewiſſermaſſen den bewegten Körper trägt. Dieſes ſetzen wir voraus.

* §. 89.

Wenn man aus den Punkten M oder m, in welchen ſich der bewegte Körper befindet, die Tangenten MT und mt ziehet, und wenn man aus dem Brennpunkt F die Perpendiculairlinie FR und Fr auf die Tangenten fallen läſſet, ſo verhalten ſich dieſe Perpendiculairlinien unter einander wie die Quadratwurzeln der Träger (Rayons Vecteurs) FM und Fm; die aus den Berührungspunkten M und m gezogen ſind: das heißt, es verhält ſich $FR : Fr = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$.

Beweis. Weil MT eine Tangente iſt, ſo iſt $MF = FT$ (§. 87); Folglich fällt die Perpendiculairlinie FR auf die Mitte R der Linie MT (*). Wenn man folglich aus dem Scheitelpunkt A die Perpendiculairlinie ziehet, ſo wird ſie durch den Punkt R gehen; Denn wenn man die Ordinate MP zeichnet, ſo verhält ſich $TA : AP = TR : RM$. Nun iſt

(*) Der Beweis iſt nicht ſchwer. Da FR eine Perpendiculairlinie iſt, ſo ſind bey R rechte Winkel, und da in einem gleichwinklichten Triangel die Winkel an der Grundlinie ſich gleich ſind, ſo iſt der Winkel bey T dem Winkel bey M gleich, weil $FM = FT$. Folglich ſind die ganzen Triangel ſich gleich. Folglich iſt $FR = RM$. Folglich R die Mitte derſelben. B.

iſt aber AT = AP (§. 29). Folglich TR = RM; Folglich gehet die Perpendiculairlinie von dem Scheitelpunkt A durch die Mitte R der Tangente MT. Eben ſo kann man auch beweiſen, daß F*r* auf die Mitte *r* der Linie *mt* ſtoſſe, und daß AR durch den Punkt *r* gehe.

Betrachtet itzund den rechtwinklichten Triangel FRT. In welchem man aus dem rechten Winkel die Perpendiculairlinie RA gezogen hat, ſo verhält ſich FT : FR = FR : FA (*); Folglich iſt $\overline{FR}^2 = FT \times FA$. Es iſt aber FT = FM (§ 87); Folglich iſt $\overline{FR}^2 = FM \times FA$. Eben ſo verhält ſich in dem bey *r* rechtwinklichten Triangel F*rt*, F*t* : F*r* = F*r* : FA; Folglich iſt $\overline{Fr}^2 = Ft \times FA$. Nun iſt aber F*t* = F*m* (§. 87). Folglich iſt $\overline{Fr}^2 = Fm \times FA$, und deswegen verhält ſich $\overline{FR}^2 : \overline{Fr}^2 = FM \times FA : Fm \times FA = FM : Fm$. Wenn man folglich die Quadratwurzel ausziehet, ſo verhält ſich FR : F*r* = $\sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$. W. z. E. W.

§. 90.

Vierter Zuſatz. Wenn man AK = AF = $\frac{p}{4}$ macht (Fig. 19), und wenn man alsdenn aus dem Punkt K die Perpendiculairlinie KS, die die **Directrix** heißt, aufrichtet und dieſe nach Belieben von beyden Seiten verlängert, ſo wird ein jeder Punkt in der paraboliſchen Linie ſo weit von dieſer Linie als vom Brennpunkte entfernt ſeyn, das heißt, wenn man von irgend einem Punkt M auf KS eine Perpendiculairlinie

(*) Denn die beyden Triangel FTR und FAR ſind ſich ähnlich, weil der Winkel bey F zu beyden gehöret, und der Winkel TRF = RAF als rechte Winkel (conſtr.). Folglich iſt auch der Winkel RTF = ARF. Folglich verhalten ſich die gleichnahmigten Seiten auf einerley Art zu einander; Folglich verhält ſich auch FT : FR = FR : FA. B.

MO aufrichtet, ſo iſt jederzeit $MO = PK = PA + AK = x + \frac{p}{4}$ (conſtr.) $= MF$ (§. 75.); Folglich $MO = MF$.

§. 91.

Deswegen wird die unbeſtimmte Linie KS von den Geometern die Directrix genennet, weil ſie vermöge ihrer Eigenſchaften uns in der Conſtruction der Parabel, wie wir ſogleich ſehen werden, dirigiren kann.

§. 92.

Fünfter Zuſatz. Die Ordinate FN aus dem Brennpunkte gezogen, iſt der Helfte des Parameters der Axe gleich; das heißt, $FN = \frac{p}{2}$. Denn wir haben ſo eben geſehen (§. 90.) daß $FN = NG$. Nun iſt $NG = FK$ (conſtr.) $= \frac{p}{2}$. (§. 79). Folglich iſt $FN = \frac{p}{2}$.

§. 93.

Sechster Zuſatz. Verlängert man daher NF bis an den andern Arm der Parabel, ſo bekommt man die doppelte Ordinate, die durch den Brennpunkt gezogen iſt. Dieſe iſt ſo groß als der Parameter der Axe.

§. 94.

Siebender Zuſatz. Die Perpendiculairlinie Ax die auf dem Anfangspunkt der Axe aufgerichtet iſt, iſt eine Tangente der Parabel oder ſie berührt dieſe krumme Linie nur in einem Punkt.

Denn wenn ſie dieſelbe in irgend einem andern Punkt d berührte und man zöge dg perpendiculair auf die Directrix KS, und alsdenn die Linie dF nach dem Brennpunkte, ſo wäre $Fd = dg$ (§. 90) $= AK$ (conſtr.) $= AF$ (§. 79); Folglich wäre $Fd = AF$. Dieſes iſt aber unmöglich. Denn

es

es kann keine Hypothenuſe Fd eines rechtwinklichten Triangels FAd einer andern Seite deſſelben AF gleich ſeyn. Folglich....

§. 95.

Aufgabe. Mit dem gegebenen Parameter FB$=p$ eine Parabel zu conſtruiren, indem man ſich dazu der Directrix bedienet (Fig. 19).

Aufloͤſung. Nehmet nach Belieben eine Linie AB fuͤr die Axe der zu conſtruirenden Parabel an, deren Anfang in A ſey. Traget darauf auf die Axe den vierten Theil des Parameters oder $\frac{p}{4}$ von A in F und in K. Nehmet F fuͤr den Brennpunkt der krummen Linie an (§. 83.) und ziehet aus K die Linie KS von beliebiger Laͤnge. Dieſe wird die Directrix ſeyn: (§. 90. 91). Nehmet auf dieſer Directrix einen Punkt O an. Richtet auf demſelben eine Perpendiculairlinie OI auf. Ziehet von dieſem naͤmlichen Punkte nach dem Brennpunkt F die Linie OF und machet den Winkel OFM$=$FOM. Nun behaupte ich, daß der Punkt M, in welchem FM die Perpendiculairlinie OI durchſchneidet, in einer Parabel ſeyn werde, deren Parameter FB, der Brennpunkt F und die Directrix KS ſeyn wird. Man darf alſo nur noch die uͤbrigen Punkte auf der Directrix nehmen, und in Anſehung derſelben die naͤmliche Conſtruction machen, die ſo eben in Anſehung des Punkts O gemacht worden iſt, ſo wird man auf dieſe Art, ſo viele Punkte der krummen Linie bekommen als man will.

Beweis. Man laſſe aus dem Punkt M die Perpendiculairlinie MP$=y$ auf die Axe AB fallen, und ſetze AP $=x$. Es iſt MF $=$ MO wegen des gleichſchenklichten Triangels FMO (conſtr.). Nun iſt MO$=$PK$=$AP$+$AK$=x+\frac{p}{4}$ (conſtr); Folglich iſt MF$=x+\frac{p}{4}$. Folglich $\overline{MF}^2=xx+\frac{px}{2}+\frac{pp}{16}$; und PF$=AP-AF=x-\frac{p}{4}$: Folglich iſt $\overline{PF}^2=xx-\frac{px}{2}+\frac{pp}{16}$; Es iſt aber des

recht-

rechtwinklichten Triangels FPM wegen $\overline{MF}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{MP}^2$, das heißt, wenn man die analytiſchen Werthe ſetzt, $xx + \frac{px}{2} + \frac{pp}{16} = xx - \frac{px}{2} + \frac{pp}{16} + yy$; Wenn man folglich von beyden Seiten $xx + \frac{pp}{16}$ wegnimmt und $-\frac{px}{2}$ auf die andere Seite bringt, ſo iſt $\frac{2px}{2}$ oder $px = yy$. Dieſes beweiſet, daß der Punkt M oder ein jeder anderer Punkt, der auf dieſe Art gefunden iſt, in einer Parabel ſey (§. 20), weil das Quadrat der Ordinate dem Rectangel aus dem Parameter in die correſpondirende Abſciſſe gleich iſt —— (*a*) (*).

§. †.

(*a*) Ich endige die Theorie dieſer krummen Linie, wobey die meiſten Neuern anzufangen pflegen. Ob die Parabel gleich in dem Kegel ihren Urſprung genommen hat, ſo haben ſie ſie doch in der Folge lieber durch einige ihrer Eigenſchaften beſchreiben, und aus dieſer Zeichnung die verſchiedenen Sätze derſelben herleiten wollen, als daß ſie, wie wir gethan haben, von der ſimplen Vorausſetzung, daß man einen Kegel mit einer Seite des Axentriangels parallel durchſchnitten habe, hätten anfangen ſollen. Folglich wird nach dieſer Beſchreibung der Parabel eine Kenntniß einiger Eigenſchaften dieſer krummen Linie, die ſie bekannt machen wollen, ſchon angenommen und es werden alſo dieſe Eigenſchaften nicht ſelbſt entdecket. Deswegen hielten wir es für nöthig, einen andern Weg zu nehmen, und durch eine ununterbrochene Kette von Sätzen, die nämlichen Eigenſchaften, die die Neuern annehmen, und dieſe nicht würden angenommen haben, wenn ſie die Natur dieſer krummen Linie nicht ſchon gekannt hätten, zu erfinden. Man iſt die Entdeckung oder die Sammlung der mehrſten Eigenſchaften, die dieſe krumme Linie charakteriſiren, hauptſächlich dem Apollonius ſchuldig. Allein, ohngeachtet der Bemühungen des Herrn Barrow eines Engelländers über dieſes koſtbare Monument des Alterthums, ſcheinet es mir, wenn man nicht einen unwiderſtehlichen Beruf zur Geometrie hat, unmöglich zu ſeyn, die Leſung derſelben auszuhalten. Selbſt bis auf den Ausdruck der Sätze zeiget ſich alles dunkel, ohne viele Ordnung und folglich ſehr ſchwer. Archimedes iſt in dieſer Arbeit dem Apollonius vorgegangen und hat uns darüber die ſchönſten Entdeckungen gegeben. Die Neuern haben ſich bemühet, ſie nach ihrer Art zu entwickeln,

§. †.

Erklärung. Man ſagt, daß 2 Kegelſchnitte ſich einander ähnlich ſind, wenn man in beyden eine grade Linie als die Baſis ziehet und wenn alsdenn die gradliniegten Figuren von gleicher Anzahl der Seiten, die man innerhalb denſelben beſchreibet, ähnlich ſind.

§. ††.

---

und ich liefere ſie hier in der Ordnung, wie ich ſie erdacht habe, und wie ſie unmittelbar aus einander entſtanden ſind. Ich habe hier nichts unterdrücket. Ich weiß nicht, daß man vor mir ſie ſo bearbeitet habe.

(*) Mit der Erlaubniß des Leſers ſetze ich noch einige §§. hinzu, die in der Urſchrift fehlen, aber dennoch wohl einen Platz in der Abhandlung zu verdienen ſcheinen. Ich werde ſie durch folgendes Zeichen (§. †.) von der la chapelliſchen Arbeit unterſcheiden. Nachſtehende Vorerinnerungen werden von einigen meiner Leſer vielleicht mit Nutzen vorher geleſen werden, wovon weitere Ausführungen in Herrn Käſtners Anfangsgr. *I* Th. Herrn Karſtens Lehrbegrif der Mathemat. *I.* und *II* Th. des Herrn Geh. R. von Segners Vorleſ. über die Arith. und Geom. und Hauſens Elem. Math. zu finden ſind.

Wenn man das Verhältniß der Gröſſe A zu C aus den beyden Verhältniſſen der Gröſſen A : B und B : C beſtimmt, ſo ſagt man, das Verhältniß der Gröſſe A : C ſey aus A : B und B : C zuſammen geſetzt. Hätte man daher einige Verhältniße, die wie die folgenden beſchaffen wären:

$$A : B = g : h$$
$$B : C = r : s$$

ſo könnte man auch ſagen, das Verhältniß A : C ſey aus den beyden Verhältniſſen $g : h$ und $r : s$ zuſammen geſetzt. Man kann daher die Verhältniſſe $g : h$ und $r : s$ als Theile betrachten, woraus das ganze Verhältniß A : C entſtehet. Dieſes wird folgendergeſtalt angezeiget:

$$A : C = \begin{pmatrix} g : h \\ r : s \end{pmatrix}$$

Wäre $g : h = r : s$, ſo ſagte man A : C ſey das verdoppelte Verhältniß von $g ; h$ (*ratio duplicata*) $g : h$ heißt aber von

A : C

§. ††.

Aufgabe. Auf einer gegebenen Linie *ac* (Tab. XI. Fig. .) eine Parabel zu beſchreiben, die einer gegebenen Parabel ABC ähnlich ſey.

Auflöſung. Man theile die gegebene Linie *ac* in dem Punkt *d* in 2 gleiche Theile: Alsdenn ſuche man die vierte Proportionallinie zu DC, *dc* und DB. Dieſe gefundene Linie nehme man zur Höhe der Parabel *abc* an. Nun conſtruire man, nachdem man nach dem §. 16. den Parameter geſucht hat, eine Parabel (§. 25), ſo wird dieſe neue Parabel *abc* der gegebeneu ABC ähnlich ſeyn.

Beweis. Es ſey der Parameter von ABC $=$ P und der Parameter von $abc = p$, ſo iſt, vermöge der Natur der Parabel, $\overline{DC}^2 = DB \times P$ und $\overline{dc}^2 = db \times p$ (§. 20). Folglich verhält ſich $\overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = DB \times P : db \times p$. Es iſt aber $\overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = \left(\begin{matrix} DC : dc \\ DC : dc \end{matrix}\right)$. Folglich iſt auch $DB \times P : db \times p = \left(\begin{matrix} DC : dc \\ DC : dc \end{matrix}\right)$: Nun iſt aber $DB : db = DC : dc$ (conſtr.) Folglich iſt auch $P : p = DC : dc = DB : db$. Theilet man nun die Axen DB und *db* in gleiche Theile, z. E. in 3, und ziehet die Ordinaten EG, FM, *eg* und *fm* und die Sehne BG, GM, MC und *bg*, *gm*, *mc*, ſo wird

A:C die *ratio ſubduplicata*. Der Ausdruck davon wäre alsdenn dieſer:

$$A : C = \left(\begin{matrix} g : h \\ g : h \end{matrix}\right)$$

Hieraus kann man leichtlich erkennen, daß das Verhältniß zwoer Quadratzahlen gegen einander doppelt ſo groß ſey, als das Verhältniß der Wurzeln oder um es durch Zeichen auszudrücken, daß $AA : BB = \left(\begin{matrix} A : B \\ A : B \end{matrix}\right)$ ſey. Dieſes iſt wohl zu bemerken. B.

wird man finden, daß $EG : eg = EB : eb$ und daß folglich die Triangel EBG und *ebg* ſich ähnlich ſind: Eben ſo wird man auch mit leichter Mühe entdecken, daß das Paralleltrapez EFGM dem Paralleltrapez *efgm* ähnlich ſey, u. ſ. w. Hieraus folgt daß die innere Figur BMGCD der Figur *bmgcd* ähnlich ſey. Das nämliche gilt von der andern Helfte der Parabel. Folglich ſind die ganzen Parabeln ſich ähnlich.

§. 111.

Zuſätze. Hieraus folgt 1.) daß alle Parabeln ſich ähnlich ſind, denn man kann immer die Höhen und die Grundlinien mit einander in einem Verhältniſſe ſetzen.

2.) Aehnliche Parabeln verhalten ſich unter einander wie die Quadrate ihrer Grundlinien, oder wie die Quadrate ihrer Höhen, oder wie die Quadrate ihrer Parameter, oder wie die Quadrate der gleichnamigten Seiten der innerhalb denſelben beſchriebenen Figuren, denn alle dieſe Linien haben unter ſich einerley Verhältniß.

Gebrauch der Parabel
beym Wurf der Bomben und eines jeden andern Körpers.

Nachricht.

Anfänger können dieſe ganze Lehre überſchlagen; Allein ſie rauben ſich das ſchönſte Vergnügen für den Geiſt, und haben zugleich das Misvergnügen, eine Reihe von Entdeckungen, die dem ſiebenzehnten und achtzehnten Jahrhundert viele Ehre machen, entweder gar nicht oder nur gleichſam durch ein Echo zu kennen.

§. 96.

Dieſe Wiſſenſchaft, die ich hier abhandle, iſt ganz neu (*a*) und die Alten haben uns nicht das geringſte davon hinterlaſſen, obgleich der häufige Gebrauch ihrer Kriegsmaſchinen, der Balliſten und Catapulten ſie darauf hätten führen

(*a*) Die Wiſſenſchaften dürfen ihren Urſprung eigentlich nur von der Zeit an rechnen, in welcher ſie ſichere Grundſätze und Lehrgebäude, die ſich auf dieſe Grundſätze ſtützen, bekommen haben. Ob alſo gleich das Bombenwerfen in einem gewiſſen Betracht auf das Spiel der Balliſten und Catapulten (*) als auf Kriegsmaſchinen zurückgeführet werden kann, die bey den Alten ſo bekannt waren, ſo werden wir denſelben doch im geringſten keinen ſo entfernten Urſprung geben. Ja! wir werden ſie nicht weiter als bis auf das Jahr 1588. hinaus ſetzen. Dieſes

(*) Balliſten waren diejenigen Maſchinen, wodurch man groſſe Steine unter die Feinde warf; Catapulten aber eigentlich zu reden diejenigen Maſchinen, wodurch Wurfſpieſſe und groſſe Pfeile geworfen wurden. Zeichnungen von beyden nebſt einer ſehr gelehrten weitläufrigen Ausführung lieſet man beym Juſtus Lipſius in *Poliorceticωn Lib. III. Dial. II.* V.

ren ſollen. Ein Italiäner Galiläus von Galiläis iſt der Erfinder derſelben. Sie iſt auf denjenigen Geſetzen gegründet, die

Dieſes iſt nach dem Herrn Blondel der Zeitpunkt der erſten Bomben, die man in Europa geſehen hat, und die der Graf von Mannsfeld in die Stadt Wachtendonk in Geldern werfen ließ, wie er dieſe Stadt unter dem Prinzen von Parma belagerte. Sonſt hatte man in dieſer Kunſt noch keine andere Regeln gehabt, als das Gerathewohl.

Dieſes iſt der Grund, warum Galiläus, ein florentiniſcher Weltweiſe, meiner Meinung nach, unwiderſprechlich der Erfinder dieſer Wiſſenſchaft iſt. Sie iſt alſo noch nicht 150 Jahr alt, indem dieſer groſſe Mann 1642 ſtarb. Ich gründe meine Meinung darauf, weil er zuerſt die Geſetze erfunden hat, die die Körper im Steigen und Fallen beobachten, wenn ſie nach erhaltenem Stoſſe bloß der Würkung ihrer Schwere überlaſſen ſind.

In der That ſcheinet mir der Tittel Erfinder, ein Name der ſo auszeichnend iſt, ihm allein zuzukommen, der nicht nur die Grundſätze oder die Theorie einer Kunſt entdeckt hat, ſondern deſſen durchdringendes Genie mit einem Blicke deren ganzen Umfangng überſah und ſogleich Anwendungen davon auf die vornehmſten Aufgaben in der Lehre vom Bombenwerfen machte.

Das, was man darauf in der Folge der Zeit zur letzten Vollkommenheit dieſer Wiſſenſchaft hinzugeſetzet hat, iſt zwar aller Hochachtung der Kenner würdig, kann aber dennoch nur für eine Entwickelung gelten, weil es kein einziges neues Geſetz voraus ſetzt.

Es iſt wahr, es iſt dieſes eine Entwickelung, wobey viel Scharfſinn und eine groſſe Geſchicklichkeit im Gebrauch der Geometrie anzutreffen iſt; Aber Galiläus hatte doch den Weg geöfnet, und alle Data zu dieſen Problemen gegeben, da man vor dieſem ſeltenen Genie ſelbſt nicht einmal wußte, wie man es angreifen ſollte. Die Menſchen in allen Jahrhunderten vor ihm haben nichts genaues darüber herausgebracht, ob ſie es gleich eben ſo nöthig hatten, als wir. Es iſt alſo billig, daß dieſer berühmte Italiäner, den ganzen Glanz dieſes Ruhms beſitze und daß die übrigen mit dem Verdienſte zufrieden ſeyn mögen, daß ſie es eingeſehen haben, daß er in dieſem Stücke ihr Lehrer zu ſeyn verdiente.

die ſchwere Körper in ihrem Falle beobachten, indem ſie bloß durch die Würkung ihres eigenen Gewichts gegen die Oberfläche der Erde fallen. Kaum hatte man die Augen über die Bewegung der Körper geöfnet, ſo hat man bemerket, daß ſie gegen die Erde mit deſto gröſſer Stärke ſtoſſen, um je höher ſie herunter fallen. Wenn ein Körper in den verſchiedenen Augenblicken ſeines Falls immer gleich ſchnell fiele, ſo würde er am Ende keine gröſſere Gewalt als im Anfange haben. Weil nun aber das Gegentheil geſchiehet, ſo muß er nothwendig jeden Augenblick ſeine Geſchwindigkeit vermehren, das heißt, er muß im zweyten Augenblicke einen gröſſern Raum durchlaufen als im erſten, und im dritten Momente einen gröſſern Raum als im zweyten und ſo fortan. Nach welchem Geſetze aber geſchiehet dieſe Vermehrung der Geſchwindigkeit?

Man nimmt die Schwere als beſtändig fortdaurend an, das heißt, man nimmt an, daß der Körper in jedem Augenblick ſeines Falls durch eine Kraft, die in einem jeden Punkt ſeiner Laufbahn auf eine gleiche Art würkt, zur Bewegung beſtimmt werde. Hierdurch entdeckte Galiläus zuerſt bloß durch Vernunftſchlüſſe, wie man verſichert, und überzeugte ſich hernach erſt durch Verſuche davon (*), daß die Räume, die ein Körper in

(*) Die Verſuche, die Galiläus anſtellte und die in ſeinen *Dialogis de motu locali*, *Dial. 3.* zu finden ſind, waren folgende: Er nahm einen hölzernen aufs beſte mit feinem Pergament ausgefütterten Canal oder Rinne, damit durch die Rauhigkeit deſſelben ſo wenig Hinderniß, als möglich, entſtehen mögte. Dieſen Canal erhob er nach und nach in verſchiedenen Winkeln über eine Horizontalfläche und ließ darinn eine metallene Kugel herunter laufen, und bemerkte nach richtig gemachten Eintheilungen, daß ſich die von Anfang an durchlaufenen Räume verhielten, wie die Quadrate der Zeiten. Er hat dieſe Verſuche mehr als 100 mal mit gleichem Erfolg wiederhohlet. Eben ſo erſiehet man aus des *Riccioli Almageſto novo*, *T. I. Lib. II. c. 21. prop* 4, daß dieſer würdige Gelehrte die Verſuche nachgemachet habe. Der einzige Unterſchied be-

in einzelnen Momenten im Fallen durchlieſe, folgende arithmetiſche Progreßion ausmachten: 1. 3. 5. 7. 9 ꝛc. daß wenn ſie ſich nämlich in dem erſten Momente eine Ruthe gegen die Oberfläche der Erde bewegen, es im 2ten Momente 3 Ruthen, im 3ten 5 Ruthen, im 4ten 7 Ruthen ausmachte und ſo fortan (*).

K 2 §. 97.

beſtand darinn, daß er 8 Unzen ſchwere Kugeln von Kreide von hohen Thürmen und Fenſtern der Häuſer von verſchiedener Höhe fallen ließ und nach den Vibrationen eines ſehr accurat befundenen Perpendikels die Zeit abmaß. Der Erfolg dieſer Verſuche beſtätiget die Verſuche des Galiläus aufs beſte. Man findet in den engliſchen philoſoph. Traſact. hierüber die ſchönen Verſuche des Herrn Deſaguliers. Wie man ſonſt noch auf eine feine Art dieſe Verſuche anſtellen könne, zeiget der Herr Abt Nollet in ſeinen Vorleſungen über die Naturlehre im *II* Band 6te Vorleſ. B.

(*) Es mögten verſchiedene Leſer, die von allen Wahrheiten gerne überzeugende Beweiſe haben, nicht bloß damit zufrieden ſeyn, daß ſie wiſſen, daß ein ſchon längſt vermoderter Mathematiker dieſe Geſetze der Bewegung erfunden habe. Sie wünſchen vielleicht lieber die Gründe ſelbſt zu kennen, aus welchen man dieſe Geſetze auch ohne Erfahrungen ſchlieſſen könne. Ich glaube, daß ſich der Beweis auf eine ſolche Art vortragen laſſe, daß es Niemand abſchrecken werde. Und denn iſt es doch gewiß, daß man mit mehrerem Vertrauen und Vergnügen in einem Gebäude wohnet, von deſſen dauerhaftem Grunde man gewiß iſt, als wenn man die Veſtigkeit deſſelben bloß aus Erzählungen kennet. Wir wollen es uns nicht gereuen laſſen tief in die Erde zu graben. Ein ſtarkes Gebäude erfordert einen tiefen Grund.

Wenn 2 Laufer A und B beyde eine gleiche Zeit nämlich etwa 1 Stunde laufen und A legt 1 Meile B aber nur $\frac{1}{2}$ Meile zurück, ſo ſagt man, daß A noch einmal ſo geſchwinde gelaufen ſey als B, daß ſich folglich die Geſchwindigkeit des A zur Geſchwindigkeit des B verhalte wie 2 : 1. Die Räume die ſie aber zurück gelegt haben verhalten ſich auch wie 2 : 1. Liefen beyde aber z. E. 4 Meilen und A brauchte 4 Stunden und B 8 Stunden darzu, ſo ſagte man wieder, daß A geſchwinder gelaufen ſey als B und zwar wieder noch einmal ſo geſchwinde,

§. 97.

Erſter Zuſatz. Hieraus folgt, daß die durchlaufenen Räume ſich unter einander verhalten wie die Qua-

---

de, weil er nur die Helfte der Zeit zu dem nämlichen Raume gebraucht hat. Es verhält ſich alſo die Geſchwindigkeit des A zur Geſchwindigkeit des B $= 8:4 = 2:1$. Hieraus erkennet man, daß wenn

1.) die Zeiten ſich gleich ſind, die Geſchwindigkeiten ſich verhalten, wie die Räume.

2.) Wenn die Räume ſich gleich ſind, die Geſchwindigkeiten ſich umgekehrt verhalten, wie die Zeiten.

Man hat alſo in dem Begrif der Geſchwindigkeit allezeit auf den Raum und die Zeit zugleich zu ſehen. Folglich muß die Zahl, die die Zeit ausdrückt, mit der Zahl, die den Raum ausdrückt, auf eine gewiſſe Art verbunden werden; Dieſes wird aber durch keine andere Rechnungsart, als durch die Diviſion geſchehen können; Denn man urtheilet ſelbſt im gemeinen Leben ſo, daß die Geſchwindigkeit um deſto gröſſer ſey, um je mehrmal die Zeit in dem Raume enthalten iſt. Folglich findet man die Geſchwindigkeit eines Körpers, wenn man den Raum durch die Zeit dividiret. Es ſey daher der Raum $= S$; die Geſchwindigkeit $= C$; die Zeit $= T$; ſo iſt alſo $C = \frac{S}{T}$ und folglich $S = TC$, daß heißt, den Raum, den ein Körper durchlauft, erhält man, wenn man die Zeit durch die Geſchwindigkeit multiplicirt. Dieſes iſt wohl zu bemerken!

Eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn die Geſchwindigkeit des Körpers während derſelben immer die nämliche bleibt. Eine Bewegung heißt eine beſchleunigte wenn die Geſchwindigkeitimmer gröſſer wird; und ſie heißt eine gleichförmigbeſchleunigte, wenn die Zunahme in der Geſchwindigkeit jeden Augenblick gleich groß iſt. So iſt nun diejenige beſchaffen, nach welcher Körper vermöge ihrer Schwere herunter fallen; und wovon alſo hier die Rede iſt. Körper, die ſich nach einer gleichförmigbeſchleunigten Bewegung bewegen, bekommen alſo in jedem Momente einen neuen gleichen Grad der Geſchwindigkeit. Folglich verhalten ſich die Geſchwindigkeiten, wie die

Quadrate der Zeiten, die ſie zu ihrer Bewegung angewendet haben. Man muß das erſte Glied dieſer Progreßion von Räumen von dem Punkt annehmen, wo der Körper zu fallen anfieng; das heißt, der Raum, der in den zwey erſten Momenten durchlaufen iſt, verhält ſich zu dem Raume in dem erſten Momente wie das Quadrat von 2 zu dem Quadrat von 1. oder wie 4 : 1.

K 3 Es

---

die Anzahl der Momente oder wie die Zeiten. Stellen wir uns daher den rechtwinklichten Triangel *agn* vor (Tab. XI. Fig. 6.) und theilen *ag* in lauter kleine gleiche Theile, ſo ſind *ab*, *bc*, *cd* ..... die einzelnen Momente oder die einzelnen Zeiten. Ziehet man jetzt *bh*, *ci*, *dk*..... mit der Baſis *gn* parallel, ſo entſtehen dadurch lauter ähnliche Triangel wie *abh*, *aci*, *adk*..... und da ſich folglich aus geometriſchen Gründen *bh*, *ci* und *dk* eben ſo zu einander verhalten als *ab*, *ac* und *ad*, ſo können *bh*, *ci* und *dk* die Geſchwindigkeiten vorſtellen, die der Körper am Ende der verſchiedenen Momenten ſeiner Bewegung erhalten hat. Hätte nun der Körper während dem ganzen Momente *ab* die Geſchwindigkeit *bh* gehabt, ſo würde ſein Raum, den er durchlaufen müßte, $ab \times bh$ ſeyn. Es war aber ſeine Geſchwindigkeit im Anfange $= 0$ und wuchs immer gleich ſtark, biß ſie endlich am Ende des Moments *bh* wurde. Suchen wir alſo eine mittlere Proportionalgeſchwindigkeit, nach welcher der Körper in der nämlichen Zeit mit einer gleichförmigen Bewegung den nämlichen Raum würde durchlaufen haben, ſo iſt dieſes die mittlere arithmethiſche Proportionallinie zwiſchen 0 und $bh = \frac{1}{2}bh$. Dieſe iſt daher als ſeine wahre Geſchwindigkeit während der ganzen Bewegung im erſten Momente anzunehmen; Folglich iſt der Raum, den er mit dieſer Geſchwindigkeit durchlaufen hat, $= ab \times \frac{1}{2}bh = \frac{ab \times bh}{2} =$ dem Triangel *abh* (Geometrie). Aus den nämlichen Gründen drücket alſo der Triangel *aci* den Raum aus, den der Körper am Ende des zweyten Moments durchlaufen hat; und der Triangel *adk* zeiget den Raum an, den er im dritten Momente durchlaufen muß; u. ſ. w. Folglich verhalten ſich die ſämmtlichen Räume am Ende der verſchiedenen Momente zu einander, wie der Triangel *abh*, *aci* und *adk*. Dieſe ähnlichen Triangel verhalten ſich aber zu einander, wie die Quadrate

ihrer

Es iſt auch würklich ein Körper, von dem man annimmt, daß er nach dem Geſetze der Natur (§. 96.) im erſten Augenblicke 1 Ruthe, im 2ten aber 3 Ruthen durchlauft, am Ende des 2ten Augenblicks zuſammen genommen 4 Ruthen durchwandert. Folglich verhält ſich der durchlaufene Raum in den zwey

---

ihrer gleichnahmigten Seiten *ab*, *ac*, *ad*..... oder *bk*, *ci*, *dk*..... (Geometrie). Folglich verhält ſich der Raum am Ende des erſten Moments zum Raum am Ende des zweyten Moments $= (ab)^2 : (ac)^2$. Es drücken aber *ab* und *ac* die Zeiten aus. Folglich verhalten ſich dieſe Räume zu einander, wie die Quadrate der Zeiten. Eben ſo verhält ſich der Raum, den der Körper am Ende des erſten Moments durchlaufen hat, zum Raume, den er am Ende des zweyten Moments durchlaufen hat, $= (bh)^2 : (ci)^2$. Es ſtellen aber *bh* und *ci* die Geſchwindigkeiten vor. Folglich verhalten ſich die Räume, die die Körper am Ende jedes Moments durchlaufen, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten. Es mögen nun die einzelnen Momente oder Zeiten ſeyn:

1.	So ſind die vom Anfang der Bewegung an, biß an das Ende eines jeden Moments durchlaufene Räume:	1.
2.		4.
3.		9.
4.		16.
5.		25.

Folglich iſt der Raum des Körpers während ſeiner Bewegung

Im 1ſten Momente		=	1.
Im 2ten	= = = 4 — 1	=	3.
Im 3ten	= = = 9 — 4	=	5.
Im 4ten	= = = 16 — 9	=	7.
Im 5ten	= = = 25 — 16	=	9.

Folglich verhalten ſich die einzelnen Räume, die der Körper in den einzelnen Momenten durchlaufen iſt, wie 1. 3. 5. 7. 9. oder wie die natürlich auf einander folgenden ungraden Zahlen. Hier ſind, wie mich dünkt, auf eine gewiß faßliche obgleich umgekehrte Weiſe, die ſo wichtigen Geſetze der Bewegung, die unſer Herr Verfaſſer in dieſem und dem folgenden §. anführt, bewieſen worden. Es wird mich erfreuen, wenn der teutſche Leſer dem Ueberſetzer wegen dieſer Anmerkung keine ſaure Miene macht. B.

zwey erſten Augenblicken, zu dem Raume im erſten Augenblicke =4 : 1. Es iſt aber 4 das Quadrat von 2, und 1 das Quadrat von 1. Folglich iſt es klar, daß wenn man das obige Naturgeſetz annimmt, (§. 96), die durchgelaufenen Räume ſich unter einander verhalten, wie die Quadrate der Zeiten, die zur Bewegung angewendet worden ſind. Dieſes iſt eine in der Folge ſehr nothwendige Bemerkung.

Wollet ihr, um euch noch mehr zu überzeugen, den Raum, den der Körper im erſten Momente durchlief, mit dem vergleichen, welchen er zum Ende des dritten Moments durchgelaufen iſt, ſo werdet ihr finden, daß er am Ende ſeiner zwey erſten Augenblicke 4 oder 1+3 und am Ende des dritten 9 oder 1+3+5 durchlief. Daß ſich alſo die Räume der beyden erſten Augenblicke zum Raume, der am Ende des dritten durchlaufen iſt, verhalten wie 4 : 9. Nun iſt aber 4 das Quadrat von 2 und 9 das Quadrat von 3. Folglich iſt das zweyte Geſetz eben ſo beſtändig als das erſte. Ihr werdet ſogleich ſehen, daß es ſehr bequem iſt, zu finden, von welcher Höhe ein Körper gefallen ſey, wenn man die Zeit weiß, die er angewendet hat, indem er bloß durch die Würkung ſeiner Schwere fiel, oder wie lange ein Körper fallen muß, um bloß durch ſeine Schwere eine gewiſſe Tiefe zu erreichen.

§. 69

Wir werden hier, wie überall in dem nachfolgenden voraus ſetzen, daß der Körper in ſeinem Falle nicht das geringſte Hinderniß finde, es mag daſſelbe von der Luft oder irgend einer andern Urſache herrühren. Mit einem Worte! Wir betrachten ihn, als wenn ſeine Bewegung in einem vollkommenen leeren Raum geſchähe und nehmen alſo alles bloß mathematiſch, um ſichere Principia zu haben. Doch behalten wir uns vor, durch die Erfahrung zu unterſuchen, biß zu welchem Punkt der Widerſtand der Luft die Reſultate aus dieſer Hypo-

theſe verändern könne? Wir nehmen auch dieſes noch an, daß ein fallender Körper 15 Schuh in der erſten Sekunde ſeines Falls durchlauſe. Man hat dieſes ungefehr durch die Erfahrung beſtimmt. (*)

§. 99.

Aufgabe. Ein Körper iſt 4 Secunden bloß durch die Würkung ſeiner Schwere gefallen. Man will wiſſen, wie tief er gefallen ſey? Oder man fordert die Länge x desjenigen Raums, den er in dieſer Zeit durchgelaufen hat.

Auflöſung. Erinnert euch, daß ſich der Raum x zum Raum von 15 Schuh verhalten müſſe, wie das Quadrat der Zeit $4 = 16$, zu dem Quadrat der Zeit $1 = 1$ oder $x : 15 = 16 : 1$ (§. 97). Folglich iſt $x = 15 \times 16 = 240$. Dieſes beweiſet, daß der Körper in 4 Sekunden 240 Schuh durchgelaufen iſt.

§. 100.

Aufgabe. Wollet ihr izt wiſſen, wie viel Zeit ein Körper gebrauche, um von der Höhe 540 Schuh zu fallen?

Auflöſung. Sprechet: Der in 1 Sekunde durchlaufene Raum von 15 Schuh, verhält ſich zum Raum 540 Schuh, wie das Quadrat von 1 zum Quadrat yy der geſuchten Zeit oder $15 : 540 = 1 : y^2 = \frac{540}{15} = 36$. Folglich iſt die geſuchte Zeit $y = \sqrt{36} = 6$. Folglich braucht ein Körper 6 Sekunden Zeit von einer Höhe von 540 Schuh herunter zu fallen.

§. 101.

(*) Man ſehe Riccioli Almag. Nov. Tom. I. Lib. 2. c. 21. prop. 4. Doch dependiret dieſes ſehr von der Art der Körper die man fallen läßt. Man leſe in den engliſchen Transactionen die Verſuche die der Herr Desagüliers darüber angeſtellet hat, indem er verſchiedene Körper von der Pauls = Kirche zu London fallen ließ. V.

§. 101.

Zweyter Zuſatz. Da man annimmt, daß die Schwere beſtändig ſey, das heißt, daß ſie in jedem Augenblick dem fallenden Körper einen neuen Trieb gibt, der dem in jedem vorigen Augenblicke gleich iſt; da man ferner vorausſetzt, daß ein gleicher Trieb in der nämlichen Zeit eine gleiche Geſchwindigkeit hervorbringe; imgleichen, daß alle dieſe Triebe nach einerley Gegend gehen, ohne ſich einander aufzuheben, ſo iſt es klar, daß ein Körper in einer gegebenen Zeit, ſo viele neue Triebe oder gleiche Geſchwindigkeiten bekomme, als man darinn gleiche Augenblicke zählen kann. Folglich verhalten ſich die erlangte Geſchwindigkeiten, wie die zur Durchlaufung des Raums angewendete Zeiten. Es verhalten ſich aber die durchgelaufenen Räume zu einander, wie die Quadrate der Zeiten (§. 97); Da ſich alſo die Zeiten unter einander verhalten, wie die Geſchwindigkeiten ſo verhalten ſich die Räume zu einander, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten die der Körper am Ende dieſer Räume erhalten hat; Folglich verhalten ſich die erlangten Geſchwindigkeiten wie die Quadratwurzeln der Räume.

Es mögen T und t die Zeiten anzeigen; C und c die Geſchwindigkeiten; S und s die Räume, die man vergleicht: (*) ſo verhält ſich $T : t = C : c$ (§. 101), oder $TT : tt = CC : cc$. Nun verhält ſich aber $S : s = TT : tt$ (§. 97). Folglich $S : s = CC : cc$. Folglich $T : t = \sqrt{S} : \sqrt{s}$ oder $C : c = \sqrt{S} : \sqrt{s}$. Man muß auf alle dieſe Geſetze wohl Acht geben.

§. 102.

(*) Die Abänderung, die ich hier in Anſehung der Buchſtaben von dem franzöſiſchen Original gemacht habe, iſt deswegen vorgenommen worden, weil ich glaubte, daß dieſe ſubſtituirte Bezeichnung vielen Leſern angenehmer und gelaufiger ſeyn möchte. Im Franzöſiſchen ſtehet für C und c, V und v; und für S und s, E und e. Dieſe Freyheit wird man mir alſo vergeben, wie andere von ähnlicher Beſchaffenheit. B.

§. 102.

Dritter Zuſatz. Ein gleichförmigbewegter Körper durchlauft mit derjenigen Geſchwindigkeit, die er am Ende des erſten Augenblicks ſeines Falls erhalten hat, in einer Zeit, die der erſtern gleich iſt, einen Raum, der doppelt ſo groß iſt als der erſtere.

Denn die Schwere, die man als beſtändig annimmt, treibt den Körper immer mit gleicher Stärke. Sie verurſacht alſo, daß der Körper im zweyten Momente, wie im erſten, einen Raum durchlauft, der = 1 iſt. Weil aber der Körper im zweyten Momente einen Raum durchlauft, der = 3 iſt, ſo muß er nothwendig, vermöge der, am Ende des erſten Moments erlangten, Geſchwindigkeit einen Raum durchgelaufen haben, der = 2 iſt oder der doppelt ſo groß iſt, als 1 oder als der erſte Raum. Dieſe erhaltene Geſchwindigkeit iſt aber gleichförmig, weil ſie durch keine Urſache verändert wird. Es beweiſet folglich die arithmetiſche Progreßion: 1. 3. 5. 7. 9... die das Verhältniß der durch einen Körper durchlaufenen Räume ausdruckt, daß dieſer gleichförmig bewegte Körper mit derjenigen Geſchwindigkeit, die er am Ende des erſten Augenblicks ſeines Falls erhalten hat, in einer eben ſo langen Zeit einen Raum durchlaufe, der doppelt ſo groß iſt, als der in der erſten Zeit. Dieſes iſt ſehr wichtig und verdient wohl bemerkt zu werden.

Und damit man gar nicht zweifle, daß dieſes unverändert geſchähe, ſo nehme man den Raum 4 der in zwey Momenten durchgelaufen iſt. Ich behaupte, daß der Körper mit der am Ende dieſer zwey Augenblicke erlangten Geſchwindigkeit, würklich 8 oder das doppelte von 4 würde durchgelaufen haben wenn er noch 2 folgende Momente mit der nämlichen Geſchwindigkeit ſich bewegt hätte. Denn in den 2 folgenden Momenten würde er nach obigen Geſetzen durchlaufen haben: 5 + 7 = 12. Nun nehme ich an, daß er durch die Schwere

in den 2 erſten Momenten 4 durchlauft. Weil nun dieſe beſtändig iſt ſo läſſet ſie ihn auch 4 in den 2 folgenden Momenten durchlaufen, die den erſten gleich ſind. Es bleibt folglich noch 8 übrig, die durch die erlangte Geſchwindigkeit durchgelaufen worden ſind. Es muß aber dieſe Geſchwindigkeit gleichförmig ſeyn, weil ſie nichts daran hindert (*).

§. 103.

Vierter Zuſatz. Ein von dem Horizont perpendiculair zurück geſtoſſener Körper, muß nothwendig mit der Geſchwindigkeit, die er am Ende ſeines Falls erhalten hat, in der nämlichen oder gleichen Zeit, in welcher er herunter gefallen iſt, zu dem nämlichen Punkt, von welchem er herunter zu fallen anfieng, wieder in die Höhe ſteigen (Fig 21).

Beweis. Laſſet uns annehmen, daß der Körper in 3 Momenten von A nach B herunter gefallen und daß dieſer Kör-

---

(*) Sollte man ſich nicht durch das, was ich bey dem §. 96. angemerket habe, auf eine deutlichere Art von der Warheit, die in dieſem §. vorgetragen iſt, überzeugen können. Wenn der Körper (Tab. XI. Fig. 6) in *g* angekommen iſt, ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit *gn*. Würde er von nun an ſich immer gleichförmig bewegen, ſo bekommt oder verliert er keinen Grad der Geſchwindigkeit. Folglich bliebe während ſeiner ganzen zukünftigen Bewegung ſeine Geſchwindigkeit *gn*. Es ſoll aber auſſerdem der Körper eben ſo viele Zeit zu ſeiner Bewegung gebraucht haben, als vorher. Folglich iſt ſeine Zeit, die er anwendet $= ag = go$. (conſtr.) Folglich iſt der Raum, den er durchlaufen muß $= gn \times op =$ Rectang. *gnop*. Dieſes Rectangel hat aber einerley Baſis und Höhe mit dem Triangel *agn*. (conſtr.) Folglich iſt dieſes Rectangel das doppelte dieſes Triangels (Geometrie). Folglich wird der Körper in der nämlichen Zeit nach einer gleichförmigen Bewegung mit der am Ende des letzten Moments erhaltenen Geſchwindigkeit einen doppelt ſo groſſen Raum durchlaufen, als vorher. W. z. E. W. B.

Körper in dem erſten Momente den Raum 1 durchgelaufen habe, daß er folglich im 2ten ſich durch einen Raum = 3 im 3ten durch einen Raum = 5 bewegt habe, ſo daß AB in allem aus 9 Theilen beſtehe: Nun verhalten ſich die Zeiten unter einander wie die Grade der Geſchwindigkeit (§. 101); Folglich hat der bewegte Körper am Ende ſeines Falls 3 gleiche Grade der Geſchwindigkeit erhalten. Folglich fängt er mit dieſen 3 Graden an zurück zu gehen. Allein vermöge derjenigen Geſchwindigkeit, die er während des erſten Moments ſeines Falls erhalten hat, hat er 2 durchlaufen (§. 102). Folglich wird er vermöge der 3 gleichen Grade, die er am Ende erhalten hat, 6 oder 3 mal 2 durchlaufen; Folglich würde der bewegte Körper, da er würklich 3 Grade der Geſchwindigkeit beſitzt, mit einer gleichförmigen Bewegung 6 Theile von AB in dem erſten Momente, in welchem er in die Höhe ſteigt, durchlaufen oder er würde von B biß nach 3 in die Höhe gehen, wenn die Schwere, die ſich in ihrer Würkung ihm grade entgegen ſetzt, nicht verurſachte, daß er um 1 zurück laufen müßte. Er wird alſo nur biß zum Nro. 4 kommen, nachdem er 5 Theile von AB durchlaufen hat. In dem 2ten Augenblick würde er auch mit einer gleichförmigen Bewegung 6 Theile von AB durchlaufen; allein die Schwere macht, daß er um 3 ſolcher Theile zurück fällt. Er wird alſo von 4 an nur 3 Theile von AB durchlaufen; Folglich wird er am Ende der beyden erſten Augenblicke ſeines in die Höhe ſteigens biß nach 1 zurückgegangen ſeye, und er würde im dritten Augenblick fortfahren gleichförmig 6 Theile von AB zu durchlaufen, wenn die Schwere, die ihn um 5 ſolcher Theile zurück ſtößt, ihn nicht dahin brächte, daß er nur 1 von ſolchen Theilen durchlaufen kann; Folglich wird er am Ende des dritten Moments accurat biß an den Punkt A, wovon er anfieng herunter zu ſteigen, zurück gekommen ſeye, und er wird über dieſen Anfangspunkt ſeines Falls nicht hinaus gehen.

Denn, wenn man wollte, daß er noch in einem 4ten Momente fortfahren ſollte mit einer gleichförmigen Bewegung

6 Theile von AB zu durchlaufen, indem er ſich über den Punkt A erhübe, ſo würde er ſich am Ende dieſes Moments am Punkt 1 unterhalb A befinden, weil er in dieſer nämlichen Zeit durch ſeine Schwere um 7 Theile zurück gezogen werden würde. Man ſiehet daraus, daß er zurück gehen würde, und daß alſo ein Körper, der perpendiculair von dem Horizont zurück geworfen wird, mit der Geſchwindigkeit, die er am Ende ſeines Falls erhalten hat, in einer ſo groſſen Zeit, als diejenige iſt, in welcher er herunter gefahren iſt, accurat biß zu der nämlichen Höhe, von welcher er ſich zu bewegen anfieng, zurückgehen werde, und daß er unmöglich darüber hinaus gehen könne.

Wenn man es nicht leicht begreifen könnte, daß ein Körper, der ſich gleichförmig in die Höhe bewegt, nach dem nämlichen Geſetze zurück geſtoſſen werde, nach welchen er im herunter fallen ſeine Bewegung beſchleunigte, ſo dürfte man ihn ſich nur ſo vorſtellen, als wenn er über eine ſchiefliegende Fläche rollte, welche ſchiefliegende Fläche dem fallenden Körper gleichförmig beweget würde, ſo würde man offenbar ſehen, daß während der Zeit, in welchem die ſchiefliegende Fläche den Körper um 6 Theile über den Horizont im erſten Momente wegbewegte, die Schwere verurſachen würde, daß er im Rollen in der nämlichen Zeit um 1 herunter ſteige. Woraus klar iſt, daß alles übrige ſich daraus ſchlieſſen laſſe.

§. 104.

Anmerkung. Die Theorie vom Bombenwerfen wird einzig und allein aus den Geſetzen dieſer beſchleunigten Bewegung der ſchweren Körper, mit welchen man die Geſetze der gleichförmigen Bewegung verbindet, hergeleitet. Man ſetzt dabey voraus, daß ein Eindruck, der einem in Bewegung geſetzten Körper gegeben wird, in den folgenden Augenblicken fortfahre der nämliche zu ſeyn, wenn ſich ihm nichts

widerſetzet, und daß dieſer nämliche Eindruck macht, daß er in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufe, wie dieſes nothwendig in einem vollkommen leeren Raum geſchehen würde. Man muß ſich folglich, ehe man zu den folgenden Sätzen fortgehet, dieſe Geſetze recht gelaufig machen und ſich Mühe geben, daß keine einzige Dunkelheit übrig bleibe.

§. 105.

Erſter Hauptſatz. Wenn ein Körper gleichförmig nach der Linie AC parallel mit dem Horizont BT (Fig. 22) geworfen worden iſt, und wenn er dieſe Linie z. E. in 2 Sekunden, während daß ſeine Schwere macht, daß er von der Höhe AB herunter falle, durchläuft, ſo behaupte ich, daß vermöge der Vereinigung dieſer 2 Bewegungen nämlich der gleichförmigen und der beſchleunigten, der Körper am Ende dieſer Zeit in D ankommen werde, nachdem er die Parabel AMD beſchrieben hat, welche zur Axe die Höhe AB hat, und wovon die Linien GM und BD 2 Ordinaten ſind, und der Parameter p, das vierfache iſt, von einer 3ten Proportionallinie zu den beyden Gröſſen AB und AF, welche letztere Linie die Helfte von AC iſt, und von welcher Parabel endlich die Tangente AC iſt.

Beweis 1.) Der Weg AMD des bewegten Körpers iſt eine Parabel. Denn die durch die Schwere durchlaufenen Räume verhalten ſich zu einander wie die Quadrate der Zeiten, die der Körper gebraucht hat, um ſie zu durchlaufen. Folglich verhält ſich der Raum —FM oder AG, den er vermöge ſeiner Schwere am Ende der erſten Sekunde durchlaufen hat, und in welcher er gleichfals AF oder GM als die Helfte von AC (Beding.) beſchrieben hat; Es verhält ſich, ſage ich, der Raum FM oder AG zu dem Raume CD oder AB, der durch ſeine Schwere am Ende zwoer Sekunden durchlaufen iſt wie das Quadrat von 1 zu dem Quadrat von 2; das heißt, es verhält ſich FM oder AG : CD oder AB = 1 : 4. Nun iſt aber AF = der Helfte von AC; Folglich iſt

iſt $GM = AF =$ der Helfte von $BD = AC$; Folglich $BD = 2GM$; Folglich $\overline{BD}^2 = 4\overline{GM}^2$. Folglich verhält ſich $\overline{GM}^2 : \overline{BD}^2 = 1 : 4$. Wir haben aber ſo eben geſehen, daß $AG : AB = 1 : 4$; Folglich verhält ſich $\overline{GM}^2 : \overline{BD}^2 = AG : AB$. Folglich verhalten ſich die Quadrate der Ordinaten GM, BD zu einander, wie die correſpondirenden Abſciſſen AG, AB. Dieſes beweiſet, daß der Weg AMD eine Parabel ſey.

2.) AB iſt offenbar die Axe derſelben, weil die Ordinaten GM, BD gegen dieſelben perpendiculair ſind (§. 5).

3.) Wenn man die Linie BF ziehet und auf derſelben die Perpendiculairlinie FH aufrichtet, biß ſie in irgend einem Punkte H die verlängerte Linie BA durchſchneidet, ſo iſt AH die dritte Proportionallinie zu den beyden Linien AB, AF, und das vierfache dieſer Linie iſt der Parameter der krummen Linie AMD; das heißt, $4AH = p$. Denn bemerket, daß $\overline{AF}^2 = AH \times AB$, weil nach der Bedingung $AB : AF = AF : AH$. Folglich iſt $(4AF)^2 = 4AH \times AB$. Es iſt aber $BD = 2AF$ und $\overline{BD}^2 = 4\overline{AF}^2$; Folglich iſt $\overline{BD}^2 = 4AH \times AB$. Man weiß aber (§. 20), daß $\overline{BD}^2 = AB \times p$. Folglich iſt $AB \times p = 4AH \times AB$; und folglich iſt $p = 4AH$. W. z. E. W.

4.) Der bewegte Körper wird durch ſeine Schwere von ſeinem Wege AC abgelenket, ſo bald er von A nach CD fortrücket. Daher ſiehet man, daß die halbe Parabel AMD nur den Punkt A mit der Linie AC gemein habe, und daß es das nämliche ſey, wenn der Körper, nachdem er vorher gegen die rechte Hand beweget worden, von dem nämlichen Punkt A gegen die linke Hand nach der verlängerten Linie

AC ſich bewege, um die andere Helfte der Parabel zu beſchreiben. Folglich iſt AC eine Linie, die die Parabel nur in einem Punkt berühret, und ſie iſt folglich die Tangente dieſer krummen Linie.

§. 106.

Zweyter Satz. Laſſet uns itzt annehmen, daß der nämliche Körper mit gleichförmiger Bewegung die Linie BF, die ſchief gegen die Horizontallinie BT iſt, und zwar in der nämlichen Zeit beſchreibe, in welcher er AF durchgelaufen hat, das heißt, in 1 Sekunde, ſo wird er durch die Würkung der Schwere mit dem gleichförmigen Antriebe nach BF verbunden in einer Zeit von 4 Sekunden die ganze Parabel, wovon AMD die Helfte iſt, beſchreiben müſſen.

Beweis. Es würde der bewegte Körper am Ende der erſten Sekunde in F angekommen ſeyn, wenn er durch die Schwere nicht von der Höhe FM, das heißt, von dem vierten Theile der Linie AB hätte herunter ſinken müſſen (§. 105). Folglich wird der Punkt M in der neuen krummen Linie ſeyn. Wenn der Körper fortgefahren wäre, ſich gleichförmig in der nämlichen Direction zu bewegen, ſo würde er FR = BF am Ende der 2ten Sekunde durchgelaufen haben und würde in R angekommen ſeyn, wenn nicht ſeine Schwere verurſacht hätte, daß er um die Länge AB = 4AG = 4FM (Beding.) hätte herum fallen müſſen. Nun iſt aber AB = RC, weil AF = FC; Folglich wird der bewegte Körper am Ende der zwo erſten Sekunden von der Höhe RC = 4FM herunter gefallen ſeyn und der Punkt C wird in der krummen Linie des Wurfs ſeyn.

Ich ſetze hinzu: Es wird dieſer Punkt der Scheitelpunkt dieſer Linie ſeyn, weil der bewegte Körper, indem er in der 3ten Sekunde mit gleichförmiger Bewegung RK durchlaufen iſt, am Ende der 3ten Sekunde in K angekommen ſeyn würde, wenn die Schwere deſſelben nicht gemacht hätte, daß er um 9FM; das heißt,

von KN = 9FM herunter gefallen wäre (§. 97). Folglich wird ſich der Punkt N der neuen Parabel unterhalb der Linie AP befinden. Denn KV iſt das doppelte von RC (weil FK das doppelte von FR iſt) und RC = AB = dem vierfachen von FM oder AG. Folglich muß KV das achtfache von FM oder = 8FM ſeyn. Es iſt aber KN = 9FM = 8FM + FM. Folglich iſt KN > KV und VN = FM. Folglich wird der bewegte Körper unter AP hinunter gefallen ſeyn, und C iſt der höchſte Punkt ſeines Aufſteigens oder der Scheitelpunkt der krummen Linie BCT. In der 4ten Sekunde wird er vermöge ſeiner gleichförmigen Bewegung KS = BF durchlaufen ſeyn, und wird am Ende der 4ten Sekunde in S angekommen ſeyn, da aber die Schwere ihn von 16FM herunter treibt (§. 97), ſo wird er accurat in dem Punkt T der Horizontallinie angekommen ſeyn. Dieſe wird folglich die ganze Weite des Wurfs beſtimmen. Es iſt klar, daß ST = SP + PT = 16FM ſey; weil SP = 3RC, (denn es iſt FS = 3FR) und weil RC = 4FM. Es iſt folglich SP = 12FM. Es iſt aber auch PT = AB = 4AG = 4FM; Folglich iſt SP + PT = 16FM oder ST = 16FM oder 4AB. Folglich wird der bewegte Körper am Ende von 4 Sekunden vollkommen auf den Horizont zurück gefallen ſeyn, und der Weg CNT, welchen er während 2 Sekunden im herunterfallen wird durchgelaufen haben, wird dem Wege BMC gleich ſeyn, der auch in 2 Sekunden, die er zum hinauf ſteigen gebraucht hat, beſchrieben worden iſt. Es iſt vermöge der Figur klar, daß BMCNT eine Parabel ſey. Denn es iſt ME = GM; CE = AG; CD = AB; Folglich weil $\overline{GM}^2 : \overline{BD}^2 = AG : AB$ (§. 105); ſo verhält ſich auch $\overline{ME}^2 : \overline{BD}^2 = CE : CD$. Folglich iſt die krumme Linie BMC eine halbe Parabel (§. 7).

Eben ſo muß man beweiſen, daß die krumme Linie CNT eine andere Helfte der Parabel ſey, die der halben Parabel BMC = iſt und welche nicht im geringſten von AMD unterſchie-

ſchieden iſt. Denn dieſe beyden krummen Linien haben einerley Höhe und gleiche Ordinaten in Punkten, die gleich weit von ihrem Scheitelpunkte liegen; Folglich iſt die ganze Parabel BMCNT gänzlich derjenigen Parabel gleich, wovon AMD die Helfte iſt.

§. 107.

Aufgabe. Von welcher Höhe muß aber ein Körper fallen, damit er am Ende ſeines Falls eine ſolche Kraft beſitze, daß er dadurch, wenn ſeine Bewegung gleichförmig bliebe, BR, als das doppelte von BF in der nämlichen Zeit durchlaufen könne, in welcher er, vermöge ſeiner Schwere AB durchlaufen muß (*). Er fällt aber durch AB in einer Zeit von 2 Sekunden (Fig. 22).

Auflöſung. Suchet zu den 2 Gröſſen AB und BF eine dritte Proportionalgröſſe. Richtet daher aus dem Punkt F auf der Linie BF die Perpendiculairlinie FH auf, und ziehet ſie ſo lange aus, biß ſie die gegen H verlängerte Linie BA in einem Punkt H durchſchneidet, ſo wird die Linie HB die Höhe ſeyn, wovon der Körper herunter fallen muß, um am Ende ſeines Falls eine Kraft zu erlangen, die ihn in den Stand ſetzet, durch eine gleichförmige Bewegung BR in 2 Sekunden, das heißt in derjenigen Zeit zu durchlaufen, die er haben muß um AB durch ſeine Schwere zu durchwandern.

Beweis.

(*) Je mehr Kraft ein Körper beſitzt, der ſeitwerts geworfen wird, um deſto gröſſer muß die Weite der Parabel ſeyn, die er beſchreibt. Ein Körper erlangt aber immer eine gröſſere Geſchwindigkeit, und folglich eine gröſſere Kraft, je tiefer er fällt: Dieſerwegen kam Galiläus auf den ſchönen Einfall, um die Kräfte des Körpers durch ein gewiſſes Maaß auszudrucken, anzunehmen, daß der Körper dieſe Kraft erhalten habe, indem er von einer gewiſſen Höhe herunter gefallen ſey. Dieſe Anmerkung war vielleicht nöthig, dieſen §. deſto beſſer zu verſtehen. B.

Beweis. Laſſet uns annehmen, daß der Körper von der Höhe HB herunter gefallen ſey, und laſſet uns ſehen, was für eine Linie er durch eine gleichförmige Bewegung durch ſeine Geſchwindigkeit, die er am Ende der Linie HB erlangt hat, in 2 Sekunden durchlaufen müſſe? Es verhalten ſich die Räume, die durch die Schwere durchlaufen werden, zu einander, wie die Quadrate der dazu angewendeten Zeiten (§. 97). Wenn wir daher die Zeit, die der Körper zum herunter fallen von der Linie HB angewendet hat, t nennen, ſo verhält ſich $AB : HB = 4 : tt = \frac{4HB}{AB}$. Folglich iſt $t = 2\sqrt{\frac{HB}{AB}}$ (§. 21. Calc.) = dem Ausdruck für die Zeit, die der Körper, um die Linie HB durch ſeine Schwere zu durchlaufen, angewendet hat. Und dieſer Werth iſt nun durch lauter bekannte Gröſſen ausgedruckt. Es ſey nun x die Gröſſe, wodurch man t multipliciren muß, damit t ſo groß als 2 Sekunden ſey; ſo iſt $tx = 2$; Folglich $x = \frac{2}{t} = \frac{2}{2\sqrt{\frac{HB}{AB}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}}$. Es iſt aber $\frac{HB}{AB} = \frac{\overline{HB}^2}{\overline{BF}^2}$. Denn es verhält ſich HB : BF = BF : AB (conſtr.); Folglich $\overline{HB}^2 : \overline{BF}^2 = HB : AB$ (*); Folglich $\frac{\overline{HB}^2}{\overline{BF}^2} = \frac{HB}{AB}$; Weil alſo $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}}$ iſt, ſo iſt auch $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{\overline{HB}^2}{\overline{BF}^2}}} = \frac{1}{\frac{HB}{BF}} = \frac{BF}{HB}$

L 2 (nach

(*) Denn da dieſes Verhältniß richtig iſt: HB : BF = BF : AB, ſo iſt auch $HB \times AB = \overline{BF}^2$. Wenn man folglich beyde Glieder

(nach der Arith.); Folglich iſt $x = \frac{BF}{HB}$. Es muß aber der Körper mit derjenigen Geſchwindigkeit, die er am Ende der Zeit t erhalten hat, und in einer Zeit, die der Zeit t gleich iſt, mit einer gleichförmigen Bewegung einen Raum durchlaufen, der doppelt ſo groß iſt als HB, das heißt, der ſo groß iſt als 2HB. Er wird folglich während der Zeit tx oder während 2 Sekunden mit einer gleichförmigen Bewegung $2HB \times x = 2HB \times \frac{BF}{HB}$ durchlaufen. Nun iſt aber $2HB \times \frac{BF}{HB} = 2BF = BR$; Folglich wird der Körper vermöge der Geſchwindigkeit, die er im herunterfallen von HB erhalten hat, mit einer gleichförmigen Bewegung den Raum BR in 2 Sekunden durchlaufen. Dieſes iſt die nämliche Zeit, die der Körper gebraucht hat, von A nach B zu fallen. W. z. E. W.

Wir werden künftig BH die **Linie der Höhe** nennen.

§. 108.

Wenn man gerne wiſſen mögte, wie man es denn habe finden können, daß die Höhe HB als die dritte Proportionallinie zu AB und BF geſchickt ſey, dieſe Aufgabe aufzulöſen, ſo wollen wir die geſuchte Höhe y nennen. Die Geſchwindigkeit, die der Körper am Ende dieſer Höhe erhält ſey C; die Geſchwindigkeit, die der Körper am Ende von AB erlangt $= c$. Auch erinnere man ſich noch, daß die im Fallen erlang-

---

der der Gleichung durch HB multiplicirt, ſo bekommt man $HB \times AB \times HB = \overline{BF}^2 \times HB$ oder $\overline{HB}^2 \times AB = \overline{BF}^2 \times HB$. Folglich verhält ſich $\overline{HB}^2 : \overline{BF}^2 = HB : AB$. Denn, wenn man in dieſem Verhältniſſe die mittelſten und äuſſerſten Glieder durch einander multipliciret, ſo wird die vorige Gleichung wieder herauskommen. B.

langten Geſchwindigkeiten ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln der durchgelaufenen Räume (§. 101). Dieſes gibt folgendes Verhältniß $C : c = \sqrt{y} : \sqrt{AB}$. Allein vermöge der Bedingung muß der Körper durch die Geſchwindigkeit C, die er am Ende des Raums y erhalten hat, mit einer gleichförmigen Bewegung $BR = 2BF$ in einer Zeit von 2 Sekunden durchlaufen, und durch die Geſchwindigkeit c die er zu Ende des Raums AB erhalten hat, muß der bewegte Körper mit einer gleichförmigen Bewegung in 2 Sekunden einen doppelt ſo groſſen Raum als AB durchlaufen (§. 102). Wenn nun bey einer gleichförmigen Bewegung die Zeiten ſich gleich ſind, ſo verhalten ſich die Geſchwindigkeiten unter einander, wie die durchgelaufenen Räume (Anmerk. zum §. 96). Es verhält ſich folglich $C : c = 2BF : 2AB = BF : AB$. Folglich verhält ſich auch $\sqrt{y} : \sqrt{AB} = BF : AB$. Wenn man folglich alle Glieder zum Quadrat erhebt, ſo verhält ſich $y : AB = \overline{BF}^2 : \overline{AB}^2$ (§. 254. Inſtit. 11 B.) Hieraus ſchließt man, daß $y = \frac{\overline{BF}^2}{AB}$ oder $AB : BF = BF : y$. Dieſes beweiſet, daß die geſuchte Höhe y die dritte Proportionallinie zu den beyden Linien AB und BF ſey, wie man es auch (§. 107.) zur Auflöſung des Problems angenommen hat. Und man hat alſo dieſe Wahrheit aus ihrer Quelle entſtehen ſehen.

§. 109.

Zuſatz. Es iſt klar: 1.) Daß die Linien BS und AP Tangenten der Parabel $BMCNT$ ſind.

2.) Daß AH der vierte Theil des Parameters der Axe CD dieſer krummen Linie iſt. Daß ſie es folglich auch von der Parabel AMD, die der vorigen vollkommen gleich iſt, ſey (§. 105).

3.) Die Linie von unbeſtimmter Länge HO, die auf HB perpendiculair ſtehet, die Directrix derſelben ſey (§. 90).

4.) Daß ST = 4FQ = 4AB ſey, weil BS = 4BF;

5.) Daß die Weite BT oder die gröſte Ausdehnung der Parabel gleich 4AF oder 4BQ ſey.

6.) Daß ihre gröſte Höhe CD = AB ſey;

7.) Daß endlich die Linie der Höhe HB ſo groß ſey, als die Summe aus der gröſten Erhöhung der Parabel oder ihrer Axe CD = AB und dem vierten Theil AH von ihrem Parameter.

§. 110.

Anſtatt der Richtungslinie BS (Fig. 23.) laſſet uns irgend eine andere Richtungslinie B*r* nehmen, die innerhalb dem rechten Winkel HBT iſt und mit dem Horizonte B*t* den Winkel *r*B*t* macht. Laſſet uns jederzeit vorausſetzen, daß der Körper durch eine gleichförmige Bewegung nach der Richtung B*r* mit einer Geſchwindigkeit getrieben werde, die er würde erhalten haben, wenn er von H nach B gefallen wäre. Das heißt, er mag ſich mit einer ſolchen Geſchwindigkeit bewegen, wodurch er in 4 Sekunden die Parabel BCT beſchrieb, indem er nach der Richtung BS getrieben war: Laſſet uns nun ſehen, was für einen Theil von B*r* der bewegte Körper mit einer gleichförmigen Bewegung in dem Augenblick wird durchlaufen haben, in welchem ihn ſeine Schwere nach dem Horizont zurück bringt.

§. 111.

Dritter Hauptſatz. Wenn man über die Linie der Höhe HB einen halben Cirkel beſchreibt, ſo behaupte ich, daß der bewegte Körper, der mit einer gleichförmigen Bewegung nach der Richtung B*r* getrieben wird, juſt 4B*h* = B*r* in dem Augenblicke werde durchgelaufen haben, wenn er in dem Punkt *t* auf die Horinzontallinie fallen wird.

Beweis. Wir wollen ſogleich diejenige Zeit ſuchen, die der Körper anwenden muß um 4B*h* oder B*r* mit einer gleich-

gleichförmigen Bewegung zu durchlaufen. Darauf wollen wir unterſuchen, ob er vermöge ſeiner Schwere juſt am Ende dieſer Zeit den Horizont wieder habe erreichen müſſen?

Wenn die Geſchwindigkeiten bey einer gleichförmigen Bewegung ſich gleich ſind, ſo verhalten ſich die durchgelaufenen Räume zu einander, wie die Zeiten, die der Körper zur Bewegung angewendet hat (*a*); Folglich verhalten ſich 4BF oder BS zu 4B*h* oder B*r* wie 4 Sekunden, die zum durchlaufen der Linie BS angewendet ſind, zu einem gewiſſen 4ten Gliede = T. Dieſes 4te Glied wird die Zeit ſeyn, die der bewegte Körper gebraucht hat, B*r* mit einer gleichförmigen Bewegung zu beſchreiben. Nun verhält ſich aber 4BF : 4B*h* = 4 : T; Folglich iſt $T = \frac{4Bh}{BF}$ = dem Werthe für die Zeit, in welcher die Linie B*h* oder B*r* durchgelaufen ſeyn wird.

Laſſet uns itzt den Raum, welchen der Körper während der Zeit $\frac{4Bh}{BF}$ im fallen zurück gelegt hat, z nennen. Wir erinnern uns noch (§. 106), daß der Raum ST, den er im Fallen in 4 Sekunden durchgelaufen iſt, gleich 4AB ſey. Es verhalten ſich aber die im Fallen durchlaufene Räume zu einander wie die Quadrate der Zeiten (§ 97); Folglich verhält ſich $z : 4AB = \frac{16\,\overline{Bh}^2}{\overline{BF}^2} : 16$. Folglich iſt $z = \frac{4 \times AB \times \overline{Bh}^2}{\overline{BF}^2}$ (M). Nun iſt aber klar, wenn man die Linien *h*H und FH ausziehet, daß $\overline{Bh}^2 = BH \times aB$ (*) und eben

 ſo

(*a*) Denn wenn man beſtändig mit einem gleichen Schritte fortgehet, ſo wird man einen deſto gröſſern Weg gemacht haben, je mehr Zeit man angewendet hat.

(*) Das heißt, B*h* iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen BH und AB oder BH : B*h* = B*h* : *a*B. Die Richtigkeit dieſes Ver-

ſo $\overline{BF}^2 = BH \times AB$ ſey; Wenn man folglich dieſe Werthe von $\overline{Bh}^2$ und $\overline{BF}^2$ in der Gleichung M ſetzet, ſo wird dieſe Gleichung heraus kommen: $z = \frac{4 \times AB \times BH \times aB}{BH \times AB} = 4aB$ $= 4hl$, wenn man die Linie hl als perpendiculair annimmt. Es iſt aber $rt = 4hl$, weil $Br = 4bh$ iſt; Folglich iſt $z = rt$, das heißt, der bewegte Körper wird nach ſeiner Schwere rt durchgelaufen haben oder wird auf den Horizont juſt in dem Augenblick zurück kommen, indem er Br oder $4Bh$ mit einer gleichförmigen Bewegung, und mit einer Geſchwindigkeit, die er erhalten hat, indem er von H nach B gefallen wäre, würde zurück gelegt haben. W. z. E. W.

§. 112.

Anmerkung. Ich halte mich nicht mit dem Beweiſe auf, daß nach dieſer Hypotheſe der Körper nicht eher nach dem Horizonte herunter gehen könne, als biß er nach r gekommen und daß er darauf von dieſem Punkt auf den Horizont herunter gefallen. Denn es kommt mir dieſes ganz offenbar und klar vor. Wenigſtens kann es ſehr leicht aus den einmal veſtgeſetzten Gründen hergeleitet werden, wenn man Fuß vor Fuß der vorigen Demonſtration folget.

§. 113.

Erſter Zuſatz. Folglich iſt die Ziellinie oder Weite des Wurfs nach der Richtung Br, oder welches einerley iſt, die Weite der neuen Parabel durch die Horizontallinie Bt beſtimmt. Eben ſo iſt auch die Weite der Parabel BCT, die der Körper nach der Richtung BS beſchreibt, durch

Verhältniſſes erhellt aber ohne Schwürigkeit daher, weil die beyden Triangel HBh und aBh aus Gründen der Elementargeometrie ſich ähnlich ſind. B.

durch die Linie BT beſtimmt. Da alſo Br die Tangente der neuen Parabel iſt, ſo wird die Perpendiculairlinie ex, die man aus der Mitte e der Linie Bt aufrichtet, die Subtangente (§. 28.) und folglich das doppelte der ihr zugehörigen Abſciſſe ſeyn (§. 29). Nun iſt Bx das Duplum von Bh; Folglich wird auch ex das Duplum von hl oder aB ſeyn. Allein es iſt $aB = xd$, weil $Bh = hx$; Folglich wird auch $ex = 2xd = xd + de$ ſeyn. Folglich iſt $de = xd$; Folglich iſt ex, das Duplum von xd, auch das Duplum von de. Folglich wird die Linie de die Abſciſſe ſeyn; Der Punkt d der Scheitelpunkt der Parabel Bdt, welche ſich nicht über der mit dem Horizont aus dem Punkt h parallel gezogenen Linie ag erhebet, und folglich iſt aB oder de die gröſte Erhebung des Wurfs.

§. 114.

Zweyter Zuſatz. Man wird eben ſo leicht finden, daß die gröſte Erhöhung aB oder de der vierte Theil von rt ſey. Denn aB iſt $= hl$. Nun iſt $hl = \frac{rt}{4}$ weil $Bh = \frac{Br}{4}$; Folglich iſt aB oder de der vierte Theil von rt.

§. 115.

Dritter Zuſatz. Auch wird man gewahr werden, daß die Weite $Bt = 4ah$ oder 4Bl ſey. Denn Br iſt $= 4Bh$. Deswegen iſt auch $Bt = 4Bl$ oder $4ah$.

§. 116.

Vierter Zuſatz. Es iſt auch dieſes offenbar, daß aH der vierte Theil des Parameters p von der Axe de der Parabel Bdt ſey. Denn es iſt $\overline{Be}^2 = de \times p$ (§. 20). Nun iſt $Be = ad = 2ah$. Folglich iſt $\overline{Be}^2 = 4\overline{ah}^2$; Folglich iſt $de \times p = 4\overline{ah}^2$. Allein $\overline{ah}^2 = aH \times aB$ (Geometrie); Folglich iſt

$\overline{4ah}^{2} = aH \times aB = 4aH \times de$; Folglich iſt $de \times p = 4aH \times de$; Folglich iſt $4aH = p$ oder $aH = \frac{p}{4}$.

§. 117.

Fünfter Zuſatz. Die Perpendiculairlinie HO von unbeſtimmter Länge, die auf der Linie der Höhe aufgerichtet iſt, iſt alſo die Directrix der Parabel Bdt (§. 90), ſo, wie ſie es auch von der Parabel BCT iſt (§. 109).

§. 118.

Sechster Zuſatz. Endlich ſiehet man noch, daß die Linie der Höhe HB gleich ſey der Summe aus der Axe de $= a$B und dem vierten Theil aH ihres Parameters.

So ſind demnach die Linien, die wir ſo eben betrachtet haben, in Abſicht auf die Parabel Bdt die nämlichen mit denen, wovon wir bey der Parabel BCT Gebrauch gemacht haben. Dieſes geſchiehet anch bey allen übrigen Würfen, deren Richtungslinie zwiſchen HB und Bt iſt, wenn ſie nur mit der nämlichen Gewalt geſchehen.

§. 119.

Anmerkung. Man ſagt, daß die **Weite eines Wurfs** oder die **Weite einer Parabel** mit der Batterie (a) **Waſſerpaß** liege, wenn der Punkt, wo der bewegte Körper niederfällt, in der nämlichen Horizontallinie mit dem Punkt liegt, wovon der bewegte Körper ausflog. So ſind die Punkte T und t der Horizontallinie Bt in Abſicht auf den

(a) Eine Batterie iſt ein beſonderer angelegter Ort, gemeiniglich mit einem Parapet oder Bruſtwehre verſehen, auf welcher man die Kanonen und Mörſer abfeuret, um einen Feind oder eine Veſtung zu beſchieſſen.

den Punkt B, wovon der Körper ausflog, wagrecht. Den **Winkel der Erhöhung** nennet man einen jeden Winkel SBt oder rBt, der durch die Horizontallinie und durch die **Linie des Wurfs** gemacht wird, die nach irgend einer gegen den Horizont ſchiefen Richtung BS oder Br gehet.

§. 120.

Vierter Hauptſatz, der ſehr nothwendig iſt. Die Weiten verſchiedener Würfe, die Waſſerpaß mit der Batterie ſind, oder welches einerley iſt, die Weiten Bt und BT der Parabeln Bdt und BCT, die durch einen Körper beſchrieben ſind, der mit einer gleichen Stärke, nach der gegen den Horizont ſchiefen Richtungslinie Br oder BS geſchoſſen iſt, verhalten ſich zu einander, wie die Sinus des doppelten Winkels der Erhöhung rBt und SBt.

Beweis. Ziehet aus dem Centrum E die Halbmeſſer Eh und EF und bemerket, daß der Winkel am Mittelpunkt hEB den ganzen Bogen Bh zum Maaß habe, und daß der Erhöhungswinkel rBt nur die Helfte deſſelben zum Maaß habe. Denn er wird durch eine Sehne Bh und die Tangente Bt des halben Cirkels gemacht (*). Eben ſo bemerket, daß

(*) Die Richtigkeit dieſer Behauptung erhellet auf folgende Art: Vermöge der Conſtruction iſt Bt eine Tangente. Von dieſer weiß man aber aus der Trigonometrie daß ſie eine ſolche Linie ſey, die mit dem Radius oder Diameter der an den Berührungspunkt gezogen iſt, einen rechten Winkel mache. Folglich iſt der Winkel aBt ein rechter Winkel; Folglich gleich dem Bogen HhB, als dem halben Cirkel, dividirt durch $2 = \frac{HhB}{2} = \frac{Hh}{2} + \frac{hB}{2}$. Nun iſt aber der Winkel aBt oder HBt = dem Winkel hBt + HBh. Folglich ſind die Winkel hBt + HBh = $\frac{Hh}{2} + \frac{hB}{2}$. Es iſt aber der Winkel HBh ein Winkel an der Peripherie und folglich das Maaß deſſelben = $\frac{Hh}{2}$. Folglich iſt der Winkel $hBt = \frac{hB}{2}$. W. z. E. W. B.

daß der Winkel BEF doppelt ſo groß ſey, als der Erhöhungswinkel S*Bt*, indem der erſte den ganzen Bogen BF, der andere aber nur die Helfte dieſes Bogens zum Maaß hat. Nun iſt aber *ah* der Sinus des Winkels *h*EB (Trigonometrie). Folglich iſt *ah* der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels *rBt*. Eben ſo iſt AF der Sinus des Winkels BEF und der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels S*Bt* Folglich kommt es im Beweiſe darauf hinaus, zu zeigen daß *Bt* : BT = *ah* : AF. Dieſes iſt ſehr leicht. Denn wir haben im §. 115 geſehen, daß *Bt* = 4*ah* und BT = 4AF (Nro. 5. des §. 109); Folglich verhält ſich *Bt* : BT = 4*ah* : 4AF = *ah* : AF. W. z. E. W.

§. 121.

Erſter Zuſatz. Hieraus folgt, daß der gröſte unter allen Würfen oder die gröſte von allen Weiten der Parabel, die durch einerley Körper mit der nämlichen Stärke nach verſchiedenen Graden der Erhöhung geworfen iſt, beſchrieben ſind, diejenige ſey, wenn der Körper unter einem Winkel von 45 Graden abgeſchoſſen iſt (*). Dieſes heißt nach einem **Bogenſchuß von der gröſten Erhöhung ſchieſſen**, (tirer à toute Volée). Wir haben ſo eben geſehen, daß dieſe Weiten beſtändig dem vierfachen Sinus des Dupli ihres Erhöhungswinkels gleich ſind. Es iſt aber der Sinus des doppelten Winkels von 45° oder der Sinus eines Winkels von 90 Graden der Sinus totus und der gröſte von allen Sinus. Folglich

(*) Der erſte Erfinder von dieſer Wahrheit iſt ohne allen Zweifel der Italiäniſche Mathematiker, der in der Helfte des 16ten Jahrhunderts ſchrieb, und der ſich einen unſterblichen Ruhm durch Auflöſung der cubiſchen Aequationen, die gemeiniglich dem Cardanus zugeſchrieben werden, erworben hat. Man ſehe des Robins neue Grundſätze der Artillerie von Herrn Euler überſetzt. Seite 43. B.

lich das vierfache deſſelben die gröſte Weite. Dieſes ſtimmet mit der Erfahrung überein.

Man ſiehet dieſes auch bey Betrachtung der 24ten Figur, in welcher die, mit dem Erhöhungswinkel *h*BT von 45 Graden übereinſtimmende Weite 4E*h* gleich iſt, und wo die Weiten die zu der Erhöhung MBT die über 45° und FBT die unter 45° iſt, gehören, ſo groß ſind, als 4LM oder 4AF; Da aber E*h* offenbar gröſſer als eine jede andere Ordinate LM oder AF iſt, die über oder unter dem Centrum E genommen iſt, ſo erhellet es augenſcheinlich, daß 4E*h* eine gröſſere Weite iſt als 4LM oder 4AF. Auch ſiehet man zugleich, daß der gröſte Wurf oder die gröſte Weite 4E*h* doppelt ſo groß, als die Linie der Höhe HB ſey, die jederzeit ſo groß iſt, als 2E*h*.

§. 122.

Zweyter Zuſatz. Die Weiten ſind ſich gleich, wenn der bewegte Körper beſtändig mit einerley Stärke unter Erhöhungswinkeln die gleich weit von 45° entfernt ſind, geworfen wird (*). Denn es ſind in dieſem Falle die Sinus dieſer Winkel und folglich auch das vierfache derſelben ſich gleich.

Es ſey in der 24ten Figur der Winkel FBT ein Winkel von 30° und der Winkel MBT von 60°. Dieſe ſind gleich weit von 45° entfernt, indem der erſte 15° unter 45° und der andere 15° über 45° hat. Nun behaupte ich, daß auch die Weiten ſich gleich ſind. Es wird nämlich die erſtere Weite durch das vierfache eines Sinus eines Winkels von 60° und

(*) Oder die Weiten ſind ſich gleich, wenn die Körper unter Winkeln geworfen werden, die zuſammen 90 Grad ausmachen, wie 70 und 20, oder 80 und 10. Dieſen ſchönen Lehrſatz kannte der Spanier *Diego Vfano* um das Jahr 1611 ſchon. Graveſand hat dieſes durch Experimente mit ſpringendem Queckſilber beſtätigt. Man ſehe ſeine *Phyſ. Elem. Math. T.* 1. B.

und die andere durch das vierfache des Sinus von 120° als das doppelte von 60° beſtimmt. Es iſt aber aus der Trigonometrie bekannt, daß der Sinus von 120° juſt der nämliche iſt, als der Sinus von 60°; denn man muß, um den Sinus von 120° zu haben, den Sinus des Complements von 180° nehmen (*). Dieſes iſt der Sinus eines Winkels von 60°. Folglich ſind die Sinus ſich gleich. Es müſſen alſo nothwendig auch die Quadrupla derſelben ſich gleich ſeyn. Dieſes wird auch durch die Erfahrung b.ſtätigt.

§. 123.

Dritter Zuſatz. Es iſt indeſſen bey der Ausübung nicht immer einerley, einen von dieſen Winkeln ſtatt des andern zu nehmen. Will man z. E. ein Gebäude zerſchmettern, ſo erkennet man, daß es ſchicklicher ſey, ſich des Winkels über 45°; zu bedienen, weil alsdenn die Bombe ſich biß zur Höhe LB (§. 113) erhebet. Dieſe iſt aber höher, als die Höhe AB des Wurfs unter 45°. Folglich wird die Bombe mit viel gröſſerer Stärke fallen müſſen, indem ihre Geſchwindigkeit durch das höhere herunter fallen vermehret wird. Man muß ſich hingegen an dem Winkel unter 45° halten, wenn man denjenigen beſchwerlich fallen will, die man auf ſolche Art angreift (**). Denn die Bombe erhebet ſich nicht ſo hoch und

---

(*) Denn in der Trigonometrie wird auf eine leichte Art bewieſen, daß zwey Winkel die zuſammen 180° ausmachen, z. E. ein ſtumpfer und ein ſpitziger beyde einerley Sinus haben. B.

(**) Es iſt auch dieſes merkwürdig, daß die Schußweiten von Würfen, die noch nicht die Erhöhung von 45° haben, bey einerley Ladung viel gleicher ausfallen. Denn die Bomben ſteigen nicht ſehr hoch in die Luft und bekommen daher von derſelben auch wenigen Widerſtand. Oeſters ſind ſie auf der einen Seiten auch noch ſchwerer als auf der andern. In dieſem Falle werden ſie bey geringerer Höhe auch nicht ſo ſehr aus ihrer Bahn weichen, als bey einer gröſſern, wo ſie dadurch öfters merklich rechts oder links von der Bahn abgeſchlendert werden. Man leſe Belidors vermiſchte Werke. p. 307. B.

und gehet durch einen kürzern Weg. Es iſt alſo klar, daß ſie dem Feinde weniger Zeit läßt ſich gegen die Stücke zu bedecken, die ſie aller Orten hinſchleudert, wenn ſie zerſpringt (*a*).

§. 124.

Vierter Zuſatz. Die Weite eines Wurfes unter einem Winkel von 15° iſt die Helfte der gröſten Weite oder der Helfte der Weite von 45° gleich. Denn die Weite von 15° verhält ſich zur Weite von 45° wie der Sinus eines Winkels von 30° als das Duplum von 15° ſich zum Sinus totus oder dem Duplum von 45° verhält. Es iſt aber der Sinus von 30° die Helfte des Sinus totus oder des Sinus von 90° (*).

Folg-

(*a*) Eine Bombe iſt eine groſſe hohle Kugel, die man mit Pulver anfüllet, mit welcher ein Brandrohr communicirt, welches ungefehr ſo lange das Feuer erhalten muß, als die Bombe in der Luft iſt; Man ſchießt oder wirft die Bomben vermittelſt eines kurzen Stücks, welches man einen Mörſer nennet. Wenn ſie gegen das Ende ihres Falls kommt, ſo zündet das Brandrohr, in welches man vor dem Abſchieſſen Feuer gethan, das in der Bombe enthaltene Pulver an, die alsdenn ſogleich crepirt und in Stücken zerſpringt.

(*) Schwächern Leſern zu gefallen will ich hier den Beweis davon einrücken. Ich ſetze nur dieſes voraus, daß man wiſſe, was überhaupt der Sinus eines Winkels ſey. Imgleichen was der Sinus totus ſey und daß dieſer jederzeit dem Halbmeſſer des Cirkels gleich ſey. Nun mache man einen Winkel am Centrum ACD, der 30° groß iſt (Fig. 8. Tab. XI) ſo hat der Bogen DA 30° und DE iſt der Sinus dieſes Winkels von 30°. Itzt mache man den Bogen AB auch = 30° und ziehe den Radius BC, ſo iſt, wenn man BE auszieht dieſes gleichfals ein Sinus von 30°; Folglich iſt DE = BE. Folglich DE = ½BD. Vermöge der Conſtruction iſt aber der Bogen BD = 60°. Folglich die Sehne unter demſelben BD = der Seite eines regulairen 6Ecks = dem Radius des Cirkels (Geometrie) = dem Sinus totus. Folglich iſt BD = Sinus totus. Folglich ½BD = ½ Sinus totus. Es iſt aber ½BD = DE = Sinus von 30°. Folglich iſt der Sinus eines Winkels von 30° = dem Sinus totus. W. z. E. W. B.

Folglich iſt die Weite des Wurfs unter einem Winkel von 15° gleich der Helfte des Wurfs unter einem Winkel von 45°, das heißt, gleich der Helfte der gröſten Schußweite (§. 121).

§. 125.

Anmerkung. Auch auſſerdem iſt es leicht die gröſte Schußweite zu finden, wenn man bloß die Schußweite desjenigen Wurfs mißt, der mit einem Winkel von 15° geſchah. Herr **Belidor** hat ſich dieſer Methode in ſeinem franzöſiſchen **Bombardier** bedienet, um eine Tabelle von den verſchiedenen Schußweiten der nämlichen Bombe zu verfertigen, die mit der nämlichen Kraft, nach verſchiedenen Graden der Erhöhung geworfen wird. Dieſes iſt eine ſehr ſchätzbare Arbeit und iſt auf das ſtärkſte zum Gebrauch zu empfehlen. Man wird daſelbſt eine ſehr ſchöne Anzahl der feinſten Beobachtungen finden, die die Ausübung beym Bombenwerfen zu einer beträchtlichen Vollkommenheit bringen kann. Jch will nur bemerken, daß der Verfaſſer die Theorie davon in ſeinem *Cour de Mathematique* (*) gegeben und es daher für gut befunden hat, ſie in ſeinem franzöſiſchen Bombardier zu unterdrücken; daß man folglich dieſes Buch nicht leſen kann, wo man nicht wenigſtens alles dieſes, was wir bißher vorgetragen haben wohl begriffen hat.

§. 126.

Fünfter Zuſatz. Die Schußweiten wachſen von der Horizontallinie an biß zum 45ten Grade. Nachher nehmen ſie wieder ab biß der Erhöhungswinkel einem rechten Winkel gleich wird. Jn dieſem Falle wird die Weite Null ſeyn, und die Bombe würde grade in den Mund des Mörſes zurück fallen, wenn ſich gar keine Hinderniß entgegenſetzte. Dieſes iſt alles aus der Figur klar.

(*) Dieſes Buch iſt vom Bion ins teutſche überſetzt, und die 2te Ausgabe davon zu Wien 1759 herausgekommen. B.

§. 127.

Sechster Zuſatz. Die Linie der Höhe HB iſt jederzeit die Helfte der gröſten Schußweite. Denn es iſt die Linie der Höhe HB = 2E*h*. Iſt ſie alſo nicht offenbar die Helfte von 4E*h*, welches die gröſte Schußweite iſt (§. 121)?

§. 128.

Siebender Zuſatz. Es iſt unmöglich, daß die Bombe höher als biß zu dem Punkt H ſteige, das heißt, es iſt unmöglich, daß ſie zu einer vertikalen Höhe ſteige, die gröſſer iſt, als die Helfte der gröſten Schußweite. Denn ein Körper, der mit derjenigen Kraft geworfen wird, die er erlangt hat, indem er von H nach B fällt, kann durchaus nicht höher ſteigen, als biß zu dem Punkt H, von welchem er herunter zu fallen anfieng, um dieſe Kraft zu erhalten (§. 103; Deswegen ſind alle Würfe oder alle Neigungswinkel, die wir nach dieſer Figur annehmen können, in dem halben Cirkel HMB eingeſchloſſen.

§. 129.

Achter Zuſatz. Ich will es hier zum Voraus anmerken, weil ſich ſonſt keine Gelegenheit darzu finden wird, daß der Scheitelpunkt von allen Parabeln, die durch den Körper beſchrieben werden, der mit der nämlichen Kraft nach allen Neigungen oder Richtungen geworfen iſt, ſich in einer Ellypſe BCDGH befinden, deren groſſe Axe der gröſten Schußweite 4E*h*, und deren kleine Axe der Linie der Höhe HB = 2E*h*, der Helfte der gröſten Schußweite gleich iſt (§. 127); daß alſo die groſſe Axe der Ellypſe die Helfte der kleinen iſt.

Beweis. Man nehme die 23te Figur wieder vor ſich; Man bemerke, daß der Scheitelpunkt *d* der Parabel B*dt*, die unter der Richtungslinie B*h* beſchrieben iſt, von der Linie der Höhe HB, um eine Linie *ad* entfernt ſey, die ſo groß iſt, als 2*ah*. Denn in den beyden ähnlichen Triangeln *ah*B und

M *dhx*

dhx iſt $Bh = hx$; Folglich iſt $ah = hd$ und folglich $ad = 2ah$. Auch bemerke man, daß der Scheitelpunkt C der Parabel BCT, die unter der Richtung BF beſchrieben iſt, von der Linie der Höhe HB um eine Linie entfernt ſey, die ſo groß iſt, als $2AF = AC$. Wenn man folglich (Fig. 24) $MG = LM$, $hD = Eh$; $FC = AF$ macht, ſo wird der Punkt G der Scheitelpunkt der Parabel unter der Erhöhung BM, der Punkt D der Scheitelpunkt unter der Direction Bh, und C unter der Direction BF ſeyn. Es iſt alſo zu beweiſen, daß die Punkte G, D, C, und alle andere, die eben ſo beſtimmt ſind, in der gegebenen Ellypſe ſind. Nun iſt aber vermöge der Conſtruction $MG = LM$ und alſo $LG = 2LM$; Folglich $\overline{LG}^2 = 4\overline{LM}^2$. Eben ſo iſt $\overline{ED}^2 = 4\overline{Eh}^2$; Folglich verhält ſich $\overline{LG}^2 : 4\overline{LM}^2 = \overline{ED}^2 : 4\overline{Eh}^2$ oder $\overline{LG}^2 : \overline{LM}^2 = \overline{ED}^2 : \overline{Eh}^2$ (Arithmetik). Es iſt aber $\overline{LM}^2 = HL \times LB$ (Geometrie); Folglich verhält ſich $\overline{LG}^2 : HL \times LB = \overline{ED}^2 : \overline{Eh}^2 = 4\overline{ED}^2$ oder $4\overline{HB}^2 : 4\overline{Eh}^2$. Das heißt, es verhält ſich das Quadrat von der Ordinate LG nämlich $\overline{LG}^2$ zu dem Rectangel $HL \times LB$ der Segmente HL und LB, die durch dieſe Ordinaten gemacht ſind, wie das Quadrat von 2ED oder 2HB, nämlich $4\overline{ED}^2$ oder $4\overline{HB}^2$ zu dem Quadrat von $2Eh$ oder HB, nämlich $4\overline{Eh}^2$: Dieſes iſt aber vollkommen die characteriſtiſche Eigenſchaft der Ellypſe, die zur groſſen Axe 2ED oder 2HB, das heißt, die gröſte Schußweite $4Eh$ und zur kleinen Axe $2Eh = HB$ hat. (§. 12. der Ellypſe); Folglich....

§ 130.

Neunter Zuſatz. Endlich iſt noch die Perpendicularlinie HO die gemeinſchaftliche Directrix aller Parabeln, die durch einen Körper beſchrieben werden, der von dem Punkt B

nach

nach allen möglichen Erhöhungen über die Horizontallinie BT mit einer Kraft geworfen iſt, die er im herunterfallen von H nach B erhalten hat.

§. 131.

Anmerkung. Nachdem wir geſehen haben, was bey einem Körper geſchehen müſſe, welcher nach einer beliebigen Directionslinie BS oder B*r*, die gegen den Horizont B*t* ſchief iſt (Fig. 23) mit einer Kraft geworfen wird, die er im herunterfallen vonn H nach B erlanget hat, ſo laſſet uns unterſuchen, welches die Schußweite dieſes nämlichen Körpers ſeyn müſſe, wenn er mit dem Horizont parallel abgeſchoſſen wird. Man begreift wohl, daß man ſich hier eigentlich nur um die Weite des Flugs (*coup de Volée*) bekümmere, das heißt, daß man nur wiſſen wolle, wie groß die Weite in grader Linie über der Erde von dem Orte, in welchem der Körper ſeine Bewegung in der Luſt anfieng, biß dahin ſey, wo ihn ſeine Schwere wieder zurück auf die Erde führt? Man hat nämlich keine Regel und man kann auch in Anſehung desjenigen Raums, welchen eine Bombe im Rollen, nachdem ſieniedergefallen iſt, durchlaufen kann, keine angeben. Dieſes iſt wegen den Irregularitäten des Erdbodens und wegen der verſchiedenen und mannigfaltigen Hinderniſſe unmöglich. Man hat aber noch mehrern Grund nur dieſe verlangte Weite zu berechnen, weil die Bomben faſt allemal in dem Augenblicke ihres Falls auf die Erde zerſpringen ſollen, wenn man ſie für Menſchen gebraucht, oder weil ſie tief einſchlagen müſſen, wenn man Gebäude dadurch niederreiſſen oder zerſchmettern will. Es würde daher die Weite einer Bombe, die in der Direction des Horizonts ſelbſt abgeſchoſſen würde, Null ſeyn. Weil die Punkte des Anfangs ihrer Bewegung und ihres Falls einerley wären. Wir müſſen alſo nur dieſes unterſuchen, welches die Weite eines Wurfs ſeyn müſſe, der über der Erdfläche mit dem Horizont parallel geſchiehet. Man nennet aber einen ſolchen Wurf den **graden Wurf** oder den **Kernſchuß** (*Portée de but en blanc*).

§. 132.

Fünfte Aufgabe. Der Kernſchuß eines bewegten Körpers, der in B über der Horizontallinie DS ſich befindet (Fig. 25) und nach einer mit dem Horizont perallellaufenden Richtungslinie BT und zwar mit einer Kraft abgeſchoſſen wird, die er im herunterfallen z. E. von H in B erlangt hat, iſt doppelt ſo groß, als die mittlere geometriſche Proportionallinie BM zwiſchen der Linie der Höhe HB oder welches einerley iſt, zwiſchen der Helfte der gröſten Schußweite (§. 127) und der Entfernung BD vom Horizont.

Wenn man z. E. über dem Diameter HD einen halben Cirkel beſchreibt und nun das Duplum von BM, als der mittlern Proportionallinie zwiſchen HB und BD (Geometrie) von D in O auf dem Horizont DS trägt, ſo iſt zu zeigen, daß der Körper, nachdem er mit einer gleichförmigen Bewegung DO oder BR = 2BM mit einer Gſchwindigkeit durchlaufen iſt, die er im herunterfallen von H nach B erhalten hat, accurat in der nämlichen Zeit von der Höhe BD oder RO fallen werde.

Beweis. Es ſey T die Zeit, die der Körper gebraucht hat, um von H nach B zu fallen; t die Zeit, welche er nöthig hat, um BD vermöge ſeiner Schwere zu durchlaufen. Man weiß, daß der bewegte Körper vermöge ſeiner Geſchwindigkeit, die er im herunterfallen von H nach B in der Zeit T erlangt hat, 2HB oder das Duplum von HB in der nämlichen Zeit T durchlaufen müſſe (§. 102). Wenn ferner bey einer gleichförmigen Bewegung die Geſchwindigkeiten ſich gleich ſind, ſo verhalten ſich die durchgelaufenen Räume 2HB und 2BM oder DO zu einander, wie die Zeiten T und t, die ſie zur Bewegung gebraucht haben; Folglich verhält ſich 2HB : 2BM oder HB : BM = T : t. Folglich iſt $t = \frac{BM \times T}{HB}$ und es iſt dieſes ein Ausdruck für

die

die Zeit, die der Körper gebraucht hat, um 2BM oder DO mit einer gleichförmigen Bewegung zu durchlaufen.

Laſſet uns nun unterſuchen, ob der bewegte Körper accurat in der Zeit $\frac{BM \times T}{HB}$ vermöge ſeiner Schwere von der Höhe BD oder RO gefallen ſey? Es mag eine Höhe x ſeyn, welche ſie will, ſo verhält ſie ſich doch zur Höhe HB, die durch den Fall in der Zeit T durchgelaufen iſt, wie das Quadrat der Zeit $\frac{BM \times T}{HB}$ zum Quadrat der Zeit T (§. 97). oder es verhält ſich $x : HB = \frac{\overline{BM}^2 \times TT}{\overline{HB}^2} : TT$. Daraus ſchließt man, daß $x = \frac{\overline{BM}^2}{HB}$ ſey. Dieſes zeiget an, daß der Körper in der Zeit, die er gebraucht hat, um 2BM oder DO mit gleichförmiger Bewegung zu durchlaufen, vermöge ſeiner Schwere von einer Höhe gefallen ſey, die $= \frac{\overline{BM}^2}{HB}$. Dieſes iſt aber accurat die Höhe BD oder RO; weil nach der Conſtruction $HB : BM = BM : BD$. Folglich iſt auch BD oder $RO = \frac{\overline{BM}^2}{HB}$; Folglich.... W. z. E. W.

§. 133.

Wollet ihr itzund wiſſen, wie man nach unſerer Hypotheſe habe finden können, daß der Kernſchuß DO oder BR doppelt ſo groß als die mittlere geometriſche Proportionallinie BM zwiſchen HB und BD ſeyn müſſe, das heißt, wie man den Punkt O habe beſtimmen können, in welchem der Körper durch ſeine Schwere wieder auf den Horizont fallen muß? Hier iſt ein Mittel, es auch begreiflich zu machen. Es verhalten

ſich die Räume, die im Fallen durchgelaufen werden, wie die Quadrate der Zeiten, die man gebraucht, um ſie zu durchlaufen. Man bekommt alſo folgendes Verhältniß: $HB : BD = TT : tt$ (§. 97). Folglich iſt $tt = \frac{TT \times BD}{HB}$; Folglich iſt $t = T\sqrt{\frac{BD}{HB}}$. Dieſes iſt der Ausdruck für die Zeit, die der bewegte Körper zugebracht hat, um von B in D oder von einer Höhe, die BD gleich iſt, das heißt, biß auf den Horizont DS zu fallen. Es iſt folglich noch zu unterſuchen, welchen Theil der Horizontallinie BT der Körper mit gleichförmiger Bewegung in der Zeit $T\sqrt{\frac{BD}{HB}}$ mit derjenigen Geſchwindigkeit, die er durch den Fall von H nach B erlangt hat, durchlaufen könne? Man weiß, daß der bewegte Körper in der Zeit T mit der nämlichen erlangten Geſchwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung 2HB durchlaufen müſſe (§. 102); Folglich wird er in der Zeit $T \times \sqrt{\frac{BD}{HB}}$, das heißt, in der Zeit t durchlaufen $2HB \times \sqrt{\frac{BD}{HB}} = 2\sqrt{\frac{(\overline{HB}^2 \times BD)}{HB}} = 2\sqrt{(HB \times BD)}$. Nun verhalten ſich aber nach der Conſtruction $HB : BM = BM : BD$; Folglich iſt $\overline{BM}^2 = HB \times BD$ oder $BM = \sqrt{(HB \times BD)}$; Folglich iſt $2BM = 2\sqrt{(HB \times BD)}$. Hieraus erkennet man, daß er während der Zeit $t = T \times \sqrt{\frac{BD}{HB}}$, die er angewendet hat, um von B auf den Horizont DS zu fallen, er mit einer gleichförmigen Bewegung und mit der Geſchwindigkeit, die er durch den Fall von H nach B erhalten hat, eine Länge BR oder DO durchlaufen werde, die doppelt ſo groß iſt als BM oder als die mittlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen der Linie der Höhe HB, als der Helfte der gröſten Schußweite, und zwiſchen BD oder RO, als deſſen

Ent-

Entfernung über dem Horizont. Dieſes iſt nun alles dasjenige, was wir im vorhergehenden Satze angenommen und als wahr bewieſen haben, ohne daß wir zeigten, wie wir darzu gekommen ſind (*a*).

Anwendung der ganzen vorhergehenden Theorie auf die Praxis.

§. 134.

Aufgabe. Die Weite einer Parabel oder eines Wurfs zu finden, deſſen Ebene mit den Batterien in einerley Höhe liegt, vorausgeſetzt, daß der Winkel der Erhöhung beſtimmt ſey.

Auflöſung. Man muß anfänglich einen ſehr genauen Probeſchuß machen, indem man ein Stück unter einem beliebigen Erhöhungswinkel, den ich *a* nenne, abſchießt. Darauf muß man mit der größten und ſtrengſten Genauigkeit die Weite *p* dieſes Wurfs meſſen. Hierdurch wird man ſogleich ſehen, daß man mit einer ungemeinen Leichtigkeit alle Schußweiten des nämlichen Stücks unter jeder Erhöhung beſtimmen könne.

(*a*) Ich ergreife zum beſten der Anfänger ſo viel, als möglich iſt, die Gelegenheit den ſynthetiſchen und analytiſchen Vortrag mit einander zu vergleichen, um ſie zu überzeugen, wie groß der Verzug des letztern gegen den erſtern ſey. Durch den ſynthetiſchen Vortrag zeigt man alle Wahrheiten, als entdeckt und man beweiſet, daß ſie wirklich ſo ſind, als man ſie annimmt. Aber durch die Analyſis zeigt man, wie man ſie entdeckt habe; Die Syntheſis zeigt die Geburten des Genies; Die Analyſis das Genie ſelbſt. In der ſyntheſiſchen Lehrart kann man nicht zweyfeln, daß man nicht alles, was man begreift, andern ſchuldig ſey. In der Analyſis hat mau öfters eine Verſuchung zu glauben, daß man die Entdeckung nur allein ſich ſchuldig ſey; Durch die Syntheſis wird das Gedächtniß geübt, durch die Analyſis das Genie ausgebauet.

Wenn nur die Bomben oder geſchoſſenen Kugeln immer von einem Caliber und von einerley Gewicht ſind, und wenn ſie mit einerley Stärke, das heißt, mit der nämlichen Menge Pulvers, von welchem man vorausſetzt, daß es die nämliche Stärke habe, geworfen ſind.

Wollte man eine Bombe unter einem Winkel von 30° werfen und den Ort wiſſen, wohin ſie fallen würde, ſo ſetzet man folgendes Verhältniß an: Der Sinus des doppelten Probewinkels a verhält ſich zum Sinus des doppelten Winkels von 30° oder zum Sinus von 60°, wie die Weite des Probeſchuſſes zum vierten Gliede x. Dieſes wird die geſuchte Weite ſeyn (§. 120). Nun ſind aber die drey erſten Glieder bekannt, folglich wird auch das vierte bey jedem Erhöhungswinkel bekannt ſeyn.

§. 135.

Aufgabe. Den Erhöhungswinkel zu finden, welchen man einem Geſchütze geben muß, um die Kugel oder Bombe auf eine beſtimmte Weite E zu ſchieſſen (a).

Auflöſung. Setzet dieſes Verhältniß an: Wie ſich die Schußweite p zur gegebenen Weite E verhält, ſo verhält ſich der Sinus des doppelten Winkels beym Probeſchuß zu einem vierten Gliede y. Dieſes wird der Sinus des gedoppelten geſuchten Winkels ſeyn. Man kann daher dieſen Sinus

(a) Es iſt für ſich klar, daß dieſe Weite die gröſte Schußweite nicht übertreffen dürfe, das heißt, ſie muß nicht gröſſer als diejenige Weite ſeyn, wohin ein Geſchütz unter einem Winkel von 45° ſchießt (§. 121). Deswegen mögte ich anrathen den Probeſchuß ſogleich unter einem Winkel von 45°, zu thun, damit man gleich anfangs die gröſte Schußweite kenne; oder, welches ich noch lieber ſähe, unter einem Winkel von 15°, deſſen doppelte Weite die gröſte Schußweite anzeigt (§. 124), denn man hätte alsdenn weniger Mühe den Probeſchuß zu meſſen und zugleich weniger Irrung zu befürchten.

Sinus finden, weil die drey erſten Glieder der Verhältniß gegeben ſind. Folglich kann man auch den Winkel dieſes Sinus finden, deſſen Helfte den geſuchten Erhöhungswinkel anzeigt.

§. 136.

Anmerkung. Es gibt 2 Winkel, die gleich weit von 45° entfernt ſind und die beyde dieſer Aufgabe eine Genüge thun (§. 122). Man muß aber doch denjenigen wählen, der zu der Abſicht der ſchicklichſte iſt. Wenn die Kugel oder die Bombe ſich zu einer anſehnlichen Höhe erheben muß und der geſundene Winkel wäre z. E. 35° ſo muß man das Geſchütz auf 55° ſtellen, damit ſich der geworſene Körper höher erhebe. . . . .

§. 137.

Aufgabe. Die Weite zu beſtimmen, wohin ein Geſchütz ſeine Kugel trägt, wenn man den Kernſchuß thut; vorausgeſetzt, daß man die Höhe kenne, die das Stücke über den Erdboden erhöhet iſt.

Auflöſung. Ihr dürfet nur die Helfte der mittlern geometriſchen Proportionallinie zwichen der Helfte der gröſten Schußweite des Geſchützes und zwiſchen ſeiner Höhe über dem Horizont nehmen (§. 132). Nun ſetzen wir aber voraus, daß die Helfte der gröſten Schußweite durch die Probe bekannt iſt, und daß man die Höhe des Geſchützes über die Erde gemeſſen habe: Es findet ſich folglich die mittlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen dieſen beyden Gröſſen leicht. Wenn dieſe beyden Gröſſen in Zahlen gegeben ſind, ſo muß man ſie durch einander multipliciren und aus dem Product die Quadratwurzel ziehen. Das Duplum davon zeigt die Schußweite von dem Kernſchuß an. Denn es ſey m die Helfte der gröſten Schußweite, h die Höhe des Stücks über dem Horizont; z die geſuchte mittlere geometriſche Proportionallinie, ſo hat man folgendes Verhältniß $m : z . z : h$; Folglich iſt $zz = hm$; Folglich $z = \sqrt{hm}$; Folglich iſt $2z = 2\sqrt{hm}$ (§. 132).

§. 138.

Es kann geſchehen und zwar oft, daß die Batterien höher oder niederer als der Ort liegen, wohin man die Bomben werfen will; das heißt, es kann geſchehen, daß dieſer Ort in einer ſchiefliegenden Fläche über oder unter der Horizontallinie ſich befinde, und in dieſen beyden Fällen will man entweder den Punkt finden, in welchem die Bombe die ſchiefliegende Fläche berührt, wenn das Geſchütz unter einem gegebenen Winkel abgeſchoſſen iſt, oder man ſoll den nöthigen Erhöhungswinkel beſtimmen, damit die Bombe durch den beſtimmten Punkt dieſer Fläche gehe. Die Auflöſung dieſer Aufgaben wird uns noch das fehlende in dieſer abgehandelten Lehre zeigen.

§. 139.

Aufgabe. Es ſey MQ die bekannte horizontale Weiſe einer Bombe (Fig. 26. 27), die unter dem Winkel GMQ mit einer beliebigen Kraft geworfen iſt. Nun fragt man, in welchem Punkt die Parabel MTQ die Fläche MR die oberwärts oder unterwärts gegen den Horizont geneigt iſt, berühren werde? das heißt, wie kann man mit einer gegebenen Weite MQ und dem gegebenen Winkel GMQ, die Diſtanz MT beſtimmen.

Auflöſung. Man ſtelle ſich auf der nach Erforderniß verlängerten Horizontallinie MQ in dem Punkt T und Q Perpendiculairlinien TS und GQ vor, und von dem Punkt R, wo die ſchiefliegende Fläche die Perpendiculairlinie GQ durchſchneidet, ziehet aus dem Punkt S der Horizontallinie, worauf die Perpendiculairlinie TS hinfällt, die Linie RS, ſo iſt gewiß, daß RS mit MG parallel laufe (§. 32). Man kann auch ſehr leicht den Winkel RMQ, welchen die ſchiefliegende Fläche MR mit dem Horizont MQ macht, durch den Winkelmeſſer meſſen.

Itzt bemerket, daß man in dem rechtwinklichten Triangel MQG den Erhöhungswinkel GMQ und folglich auch deſſen Complement MGQ kenne. Es iſt darneben die Weite MQ bekannt.

kannt. Folglich kann man GQ finden, wenn man anſetzt: Der Sinus des bekannten Winkels G verhält ſich zum Sinus des gegebenen Winkels GMQ, wie die gegebene Weite MQ ſich zu GQ verhält. Folglich wird GQ auf dieſe Art beſtimmt ſeyn. Eben ſo wird man auch den Werth von RQ in dem rechtwinklichten Triangel MQR beſtimmen, indem man folgendes Verhältniß anſetzt: Es verhält ſich der Sinus des bekannten Winkels MRQ zum Sinus des gleichfalls bekannten Winkels QMR wie die gegebene Länge MQ zu RQ. Durch die drey bekannten Glieder dieſes Verhältniſſes erkennet man das vierte oder RQ. Weil nun RS mit MG parallel iſt, ſo geben die ähnlichen Triangel GQM und RQS folgendes Verhältniß GQ : RQ = MQ : SQ. Man bekommt folglich den Werth von SQ, weil die drey Linien GQ, RQ und MQ bekannt ſind. Folglich bekommt man auch MS. Es iſt alſo nur noch nöthig, um in dem rechtwinklichten Triangel MST die Seite MT zu kennen, folgendes Verhältniß anzuſetzen: Es verhält ſich der Sinus des bekannten Winkels MTS zum Sinus des Winkels MST oder zum Sinus totus wie die bekannte Linie MS zu MT. In dieſem Verhältniſſe ſind die drey erſten Glieder bekannt und ſie beſtimmen alſo das vierte Glied MT. W. z. E. W.

Anmerkung. Dieſer Beweiß ſchlieſſet die beyden Fälle dieſer Aufgabe in ſich, und er iſt ſo wohl anf die 26 Figur, in welcher die ſchiefliegende Fläche über dem Horizont erhöhet iſt, als auch auf die 27te Figur anzuwenden, in welcher man die ſchiefliegende Fläche unter dem Horizont geneiget annimmt. Damit man nicht auf einmal nöthig habe zwey Figuren zu betrachten, ſo muß man den Schluß, welcher zur Auflöſung dieſer Aufgabe führt, nach und nach auf beyde anwenden.

§. 140.

Aufgabe. Man will eine Bombe nach dem Punkt D der ſchiefliegenden Fläche BD die über dem Horizont BV

erho-

erhoben iſt, oder die unter demſelben lieget, werfen (Fig. 28. 29). Welches muß die Neigung des Mörſers ſeyn, der in B ſtehet, damit der Wurf durch den Punkt D gehen könne?

Aufløſung. Wir nehmen jederzeit an, daß der geworfene Körper mit einer beſtimmten Kraft z. E. mit derjenigen geworfen werde, die er erhält, wenn er von H nach B fällt. Imgleichen ſetzen wir voraus, daß man die gröſte Schußweite auf der Horizontallinie BV kenne; Daß man auch die Gröſſe des Winkels DBV, den die Fläche BD mit dem Horizont BV macht, kenne, und daß man endlich trigonometriſch oder auf irgend eine andere Art die Länge BD gefunden habe. Vermittelſt allem dieſem muß man auf einer ſehr ebengemachten Pappe und durch Hülfe eines Maasſtabes den rechtwinklichten Triangel BAD conſtruiren. Dieſer beſtimmet die Höhe DA über oder unter dem Horizont und zugleich die darzu gehörige Horizontalweite BA. Dieſes ſey vorausgeſetzt! Nun iſt bekannt, daß die Linie der Höhe jederzeit der Helſte der gröſten Schußweite auf der Horizontalfläche gleich iſt (Fig. 127); Folglich muß man die Perpendiculairlinie HB ſo groß machen, als die Helſte dieſer bekannten gröſten Schußweite. Man muß aus dem Punkt H eine Perpendiculairlinie HO von unbeſtimmter Länge aufrichten. Dieſe iſt die gemeinſchaftliche Directrix aller derjenigen Parabeln, die durch einen Körper beſchrieben werden, der durch eine Kraft, die er durch den Fall von H in B erhalten hat, geworfen wird (§. 117). Man muß AD ſo lange verlängern, biß ſie in dem Punkt S mit der Directrix HO zuſammen ſtößt. Weil nun der Punkt B in der geſuchten Parabel ſeyn muß, ſo wird dieſer Punkt ſo weit von der Directrix HO, als von dem Brennpunkt dieſer Parabel, entfernet ſeyn (§. 90). Wenn man daher aus B mit dem Radius BH einen Cirkelbogen HF*f* beſchreibt, ſo muß der Brennpunkt dieſer Parabel nothwendig in irgend einem Punkt dieſes Bogens HF*f* ſeyn. Eben ſo muß der Punkt D in der geſuchten Parabel ſeyn. Folglich muß auch dieſer gleich weit von der Directrix und von dem Brennpunkt ent-

entfernt ſeyn; Folglich wird dieſer Brennpunkt auch in einem von den Punkten des Bogens SF*f* ſeyn, welcher aus dem Punkt D mit dem Radius DS beſchrieben worden iſt. Folglich wird ſich dieſer Brennpunkt zugleich in dem Bogen HF*f* und SF*f* befinden. Dieſes kann aber nur in den Durchſchnittspunkten F und *f* ſeyn. Folglich ſind die Punkte F und *f* die Brennpunkte derjenigen Parabeln, die durch den Punkt D gehen. Es gibt alſo zwey Würfe, die auf einerley Art die vorgegebene Aufgabe auflöſen.

Um die Weiten derſelben zu bekommen, ſo muß man von den Brennpunkten F und *f* auf dem Horizonte BV die Perpendiculairlinien FG und *fg* ziehen und ſie biß zu den Punkten T und *t*, wo ſie die Directrix HO durchſchneiden, verlängern. Man muß GK ſo groß als BG machen und *g*V =B*g*, ſo wird BK die Weite des Wurfs ſeyn, welcher den Punkt F zum Brennpunkt hat, und BV wird die Weite des Wurfs ſeyn, deſſen Brennpunkt *f* iſt. Nun theilet der Scheitelpunkt der Parabel jederzeit die Diſtanz von dem Brennpunkt biß an die Directrix in 2 gleiche Theile (§. 79). Folglich muß man auch die Linie FT und *ft* in dem Punkt C und *c* in 2 gleiche Theile theilen. Dieſe ſind folglich die Scheitelpunkte der Parabeln, BCK und BDV. Endlich wird man die Tangenten dieſer beyden Würfe bekommen, wenn man auf der verlängerten Linie GC oder *gc* gegen T oder *t* die Theile CL oder *cl* abſchneidet, die ſo groß ſind, als die darzugehörige Abſciſſen CG und *cg*. Nun kann man aus dem Punkt B nach den äuſſerſten Punkten L, *l* dieſer verlängerten Linien die Tangenten B*b*, B*d* ausziehen (§. 30). Dieſe werden den Bogen HF*f* in den Punkten *b* und *d* ſchneiden und die Erhöhung beſtimmen, die man dem Mörſer geben muß, damit die Bombe durch den vorgeſchriebenen Punkt gehe. Man darf alſo itzt nur den Bogen *bg* und *dg* (Fig. 28) oder die Bögen *b*K nnd *d*K (Fig. 29) mit einem Winkelmeſſer meſſen.

Man

Man hätte dieſe Gröſſe auch noch genauer trigonometriſch beſtimmen können. Allein mir ſchien die Entwickelung davon auſſerordentlich lang und nicht ſehr nothwendig. Deswegen glaubte ich, dieſe Unterſuchung vorbey laſſen zu können. Wenn man ſich in allen Spitzfindigkeiten, deren dieſe Materie fähig iſt, eine Genüge thun will, ſo ziehe man den Herrn **Blondel** in ſeiner Kunſt, die Bomben zu werfen, zu Rath (*a*).

Beweis. Laſſet uns bey dem Wurfe BCK (Fig. 28) anfangen. Wir müſſen zwey Dinge beweiſen:

1.) Daß dieſer Wurf eine Parabel ſey, deren Axe CG nebſt dem 4ten Theil ihres Parameters der Linie der Höhe HB gleich ſey. So wie es nach §. 118 ſeyn muß. Es muß folglich 4 TC oder 4 HR oder $4CF \times CG = \overline{BG}^2$, als dem Quadrate der Ordinate BG ſeyn.

2.) Daß der Punkt D nothwendig einer von den Punkten dieſer krummen Linie ſey.

Man laſſet uns aber bemerken:

1.) Daß $BF = BH$ (conſtr.) $= GT = FG + CF + CT = 2CF + FG$. [Denn $CT = CF$ (conſtr.)]; Folglich iſt $\overline{BF}^2 = 4CF + 4(CF \times FG) + \overline{FG}^2$. Es iſt aber wegen des rechtwinklichten Triangels BGF, $\overline{BF}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{FG}^2$.

(*a*) Ich erinnere es hier, daß man ohne allen Nutzen dieſes Buch leſen würde, wenn man nicht vollkommen mit der Theorie der Parabel bekannt iſt. Herr Blondel beweiſet darinn keine einzige Eigenſchafft dieſer krummen Linie. Er verweiſet immer auf den Archimedes, deſſen Beweiſe mehr Anſtrengung erfordern, als dieſes ganze Werk von krummen Linien.

$+\overline{FG}^2$. Folglich iſt $\overline{BG}^2+\overline{FG}^2=4\overline{CF}^2+4(CF\times FG)+\overline{FG}^2$ oder $\overline{BG}^2=4\overline{CF}^2+4(CF\times FG)=(CF+FG)\times 4CF=CG\times 4CF$. Folglich iſt $\overline{BG}^2$ als das Quadrat der Ordinate BG dem Rectangel aus der Abſciſſe CG multiplicirt durch 4CF gleich. Folglich iſt der Wurf BCK eine Parabel (§. 20), deren Parameter $=4CF$ oder 4CT oder 4HR. Folglich iſt HR der vierte Theil des Parameters dieſes Wurfs und dieſer vierte Theil + der Axe CG oder RB iſt der Linie der Höhe HB gleich. W. z. E. W.

2.) Um überzeugt zu ſeyn, daß der Punkt D in der Parabel BCK ſey, muß man die Perpendicularlinie DM auf die Axe CG ziehen und nun zeigen, daß $\overline{DM}^2=CM\times 4CF$. Dieſes iſt ſehr leicht. Denn es iſt $DF=DS$ (conſtr.) $=TM=2CF+FM$; Folglich iſt $\overline{DF}^2=4\overline{CF}^2+4(CF\times FM)+\overline{FM}^2$. Es iſt aber des rechtwinklichten Triangels FMD wegen, $\overline{DF}^2=\overline{DM}^2+\overline{FM}^2$; Folglich iſt $\overline{DM}^2+\overline{FM}^2=4\overline{CF}^2+4(CF\times FM)+\overline{FM}^2$ oder $\overline{DM}^2=4\overline{CF}^2+4(CF\times FM)=(CF+FM)\times 4CF=CM\times 4CF$. Folglich iſt das Quadrat $\overline{DM}^2=$ der Abſciſſe CM multiplicirt durch den Parameter 4CF. Wenn man nun aus dem Punkt M eine Ordinate y gegen die Axe CG der Parabel BCK annähme, ſo wäre $yy=CM\times 4CF$ (§. 20); Folglich $\overline{DM}^2=yy$ oder $DM=y$. Dieſes beweiſet, daß DM eine der Abſciſſe CM zugehörige Ordinate ſey, und daß folglich der Punkt D in der Parabel BCK ſey. W. z. E. W.

Laſſet uns itzt den Wurf BcV vor uns nehmen, und indem wir eben ſo, wie vorhin, ſchlieſſen, zeigen

1.) Daß $\overline{Bg}^2=cg\times 4ct$ oder $cg\times 4cf$; (denn ct iſt $=cf$, vermöge der Conſtr.)

2.) Daß $\overline{Dm}^2=mc\times 4cf$ oder $mc\times 4ct$.

Laſſet uns demnach uns wieder erinnern, daß $Bf = BH$ (conſtr.) $= gt = cg + ct = cg + cf = cf + ct + gf = 2cf + gf$; Folglich $\overline{Bf}^2 = 4\overline{cf}^2 + 4(cf \times gf) + \overline{gf}^2$. Wegen des rechtwinklichten Triangels Bgf aber iſt $\overline{Bf}^2 = \overline{Bg}^2 + \overline{gf}^2$; Folglich iſt $\overline{Bg}^2 + \overline{gf}^2 = 4(\overline{cf}^2) + 4(cf \times gf) + \overline{gf}^2$ oder $\overline{Bg}^2 = 4(\overline{cf}^2) + 4(cf \times gf) = (cf + gf) \times 4cf = cg \times 4cf$ oder $cg \times 4ct$; Folglich iſt $\overline{Bg}^2 = cg \times 4ct$; Folglich (§. 20) der Wurf BcV eine Parabel, deren Parameter $= 4ct$ iſt; Folglich iſt $ct =$ dem vierten Theil des Parameters. Nun iſt es aber klar, daß dieſer vierte Theil + der Axe cg der Linie der Höhe DH gleich ſey (§. 118). Es iſt alſo nur noch übrig zu beweiſen, daß der Punkt D in der Parabel BcV ſey.

Es iſt aber gewiß, daß $Df = DS = mt = mc + ct = mc + cf = mc + mc + mf = 2mc + mf$ ſey. Folglich iſt $\overline{Df}^2 = 4(\overline{mc}^2) + 4(mc \times mf) + \overline{mf}^2$; Allein wegen des rechtwinklichten Triangels Dmf iſt $\overline{Df}^2 = \overline{Dm}^2 + \overline{mf}^2$; Folglich iſt $\overline{Dm}^2 + \overline{mf}^2 = 4\overline{mc}^2 + 4(mc \times mf) + \overline{mf}^2$ oder $\overline{Dm}^2 = 4\overline{mc}^2 + 4(mc \times mf) = (mc + mf) \times 4mc = cf \times 4mc = ct \times 4mc = mc \times 4ct$. Folglich iſt $\overline{Dm}^2 = mc \times 4ct$. Allein das Quadrat zz von der Ordinate z, die auf dem Punkt m der Axe cg gezogen iſt, iſt auch ſo groß, als das Rectangel aus der Abſciſſe mc und dem Parameter $4ct$. Folglich iſt $zz = \overline{Dm}^2$ oder $z = Dm$. Folglich iſt Dm würklich die Ordinate an dem Punkt m der Axe cg. Hieraus erhellet, daß der Punkt D in der Parabel BcV ſey (a).

§. 141.

(a) Ich bitte ſcharfſinnige Leſer wegen der Weitläuftigkeit, in welche ich mich einlaſſe, um Verzeyhung. Eine lange Erfahrung hat mich überzeuget, daß Anfänger in dieſer Art von Materien

§. 141.

Anmerkung. Es iſt, wie mich dunkt, nichts einfacher, als die Conſtruction dieſer Aufgabe. Die Durchſchnitte der beyden Cirkelbögen beſtimmen den Brennpunkt der Würfe, und durch dieſe findet ſich das übrige ausnehmend leicht. Ich habe dennoch inſonderheit dahin meine Bemühung gerichtet, den Geiſt derſelben zu entwickeln. Denn wenn irgend eine Kunſt iſt, die das Genie ausbildet, und eine ſolche iſt ohne Zweifel die Kunſt ſtrenge Beweiſe zu machen, ſo iſt es meiner Meinung nach gewis dieſe, den Leſer durch alle Grade hindurch zu führen, die uns zu gewiſſen wichtigen Entdeckungen geleitet haben. Denn wenn man einſieht, wie man dabey verfahren iſt, ſo bleibt im Kopfe eine Art von Form zurük, in welcher die Produkte ihre Bildung bekommen werden. In den Wiſſenſchaften und Künſten bewundere ich allemal die Erfindung ſelbſt viel weniger, als die Methode wie man zu denſelben gekommen iſt. Eine Entdeckung iſt nur eine Entdeckung. Hingegen iſt eine ſchöne Methode gleichſam eine Mutter von unzählbaren Entdeckungen.

Nimmt man den Punkt D unterhalb der Horizontallinie an, ſo muß man ſich der 29ten Figur bedienen. Man muß dabey die nämlichen Schlüſſe machen, ſo wird man die Brennpunkte F und *f* von 2 Würfen finden, die dieſe Aufgabe auflöſen, und die Tangenten B*b* und B*d* die an den Punkt B gezogen ſind, ſind die Richtungslinien, nach welchen

---

terien die Leichtigkeit etwas einzuſehen, der Ehre vorziehen, die man ihrer Fähigkeit erweiſet, indem man ihnen nur gedrängte und ſehr conciſe Demonſtrationen, die ihren Verſtand martern, vorlegt. Durch die Methode, welcher ich mich hier bediene, habe ich mehr zum Augenmerk den Verſtand zu üben als zu ermüden. Ja, bey aller dieſer Vorſicht habe ich dennoch Grund zu befürchten, daß für viele Perſonen, dieſe Uebung eine wahre Arbeit ſeyn werde.

chen man den Mörſer ſtellen muß, um die Bombe nach dem Punkt D unterhalb der Horizontallinie zu ſchieſſen. (*)

Man

(*) Dieſe zwo Aufgaben, die der Herr Verfaſſer ſo eben aufgelöſet hat, gehören unter die wichtigſten in der Lehre vom Bombenwerfen. Man will von einer Batterie auſſerhalb der Veſtung auf einen Pulverthurm innerhalb des belagerten Orts oder auf die Gewölber von Kirchen oder gar in eine Veſtung, die oben auf einem Berge liegt, Bomben werfen; Oder es wollen die Belagerten aus einer Bergveſtung oder von einer Baſtion auf die Belagerer dieſe Bomben ſpielen laſſen, ſo werden ſie ohne die Auflöſung dieſer Aufgaben ihre Abſicht nicht erreichen können. Des beſondern Nutzens wegen, den man ſich von einer leichten Auflöſung dieſer Aufgaben verſprechen konnte, haben die Einſichtsvollſten Männer daran gearbeitet. Ein Buot, ein Römer, ein de la Hire haben recht artige ſynthetiſche Auflöſungen erfunden, die man in der Abhandlung vom Bombenwerfen des Herrn Blondels, der zuerſt dieſe Aufgaben der Akademie der Wiſſenſchaften zu Paris vorlegte, beyeinander antrift. Nur Schade! daß ſie wegen der vielen Verhältniſſe, die man anſetzen, und der vielen Winkel und Sinus wegen, die man erſt kennen muß, in der Ausübung nicht ſo brauchbar ſind. Dieſe Beſchwerlichkeiten haben andere Geometer, unter andern der Herr Euler, Herr von Maupertuis und Reynauld durch algebraiſche Formeln zu heben geſucht. Mit wie vielen Beyfall von Seiten der mehrſten Herrn Artilleriſten es geſchehen ſey, wird man von ihnen ſelbſt am beſten erfahren können. Herr Deidier, dieſer geſchikte Nachfolger des berühmten Belidors in der Kriegsſchule zu *La Fére*, hat in ſeiner allgemeinen Mechanik im erſten Buche Auflöſungen gegeben, die mir äuſſerſt leicht vorkommen, und von welchen ich nach ſeiner Verſicherung glaube, daß man ſie jungen Leuten von 10 Jahren beybringen könne. Nur bitte ich diejenigen überklugen Herren, die alles, was ihnen leicht gemacht iſt, mit einem lächerlichen Stolze verachten, vorher ihre Kräfte zu üben, um zu ſehen, wie weit ihre vielleicht tiefdenkende Seele und feiner Geiſt ſie geführt haben würde. Mir ſcheinen Männer, ich muß es geſtehen, um deſto ehrwürdiger, je mehr ſie die Gaben und den Willen beſitzen, verwickelte und ſchwere Dinge von einer leichten Seite zu zeigen.

Es

Man würde es auch wohl ohne meine Erinnerung finden, daß dieſe Aufgaben nur auf eine einzige Art auf-

---

Es muß zum Beweiſe der Aufloͤſung folgender Satz als ein Grundſatz vorausgeſchicket werden.

Es ſey eine Parabel BCT (Fig. 22) unter einem beliebigen Winkel mit einer beliebigen Kraft beſchrieben. Es ſey die Weite BT in 4 gleiche Theile getheilet und man richte aus den Theilungspunkten die Perpendiculairlinien QF, DR, LK, TS auf. Dieſe theilen auch die Richtungslinie BS in 4 gleiche Theile. Die Parabel ſelbſt aber wird dadurch in den Punkten M, C, N durchſchnitten. Unter dieſen iſt der Punkt C der Scheitelpunkt und die beyden andern N und M, die gleich weit vom Scheitelpunkt entfernt ſind, ſtehen auch gleich weit von der Linie BT ab, die die Weite der Parabel ausdrükt. Wenn man nun die Punkte M und N durch die grade Linie MN mit einander verbindet, ſo wird dieſe grade Linie mit BT parallel ſeyn, und wird die Axe der Parabel, nämlich DC in einem Punkt E durchſchneiden. Nun wird die Linie CE ſo groß ſeyn, als $\frac{1}{3}$ von MQ oder NL.

Es ſey BS $= x$, ſo iſt BF $= \frac{1}{4}x$; BR $= \frac{2}{4}x$; BK $= \frac{3}{4}x$; Es verhalten ſich aber die Räume FM, RC, KN und ST wie die Quadrate der graden Linien BF, BR, BK und BS (§. 106); Folglich koͤnnen jene Linien des Falls auch ausgedrukt werden durch $\frac{1}{16}xx$; $\frac{4}{16}xx$; $\frac{9}{16}xx$; und xx. Es verhält ſich aber wegen der Aehnlichkeit der Triangel FBQ, RBD, SBT, ST : FQ = SB : FB. Und da nun FB $= \frac{1}{4}$ SB (conſtr.) ſo iſt auch FQ $= \frac{1}{4}$ ST $= \frac{1}{4}xx$. Eben ſo findet man durch ähnliche Schlüſſe daß RD $= \frac{2}{4}xx$; KL $= \frac{3}{4}xx$. Wenn man folglich von FQ $= \frac{1}{4}xx$, FM $= \frac{1}{16}xx$ abziehet, ſo iſt der Reſt MQ $= \frac{3}{16}xx$. Wenn man gleichfalls von RD $= \frac{2}{4}xx$, RC $= \frac{4}{16}xx$ wegnimmt, ſo wird das Uebriggebliebene oder CD $= \frac{4}{16}xx$ ſeyn; Nimmt man folglich von CD $= \frac{4}{16}xx$ den Theil ED = MQ $= \frac{3}{16}xx$ weg, ſo wird CE $= \frac{1}{16}xx$ und folglich ſo groß als $\frac{1}{3}$ von FM ſeyn.

Nun koͤnnen wir die 2 folgenden Aufgaben aufloͤſen.

1.) Geſetzt man will eine Bombe von A nach dem Punkt B werfen (Tab. XI. Fig. 10.), der über der Horizontallinie AN erho-

gelöſet werden können, wenn ſich die beyden Cirkel nur berühren. Daß eine Auflöſung in dem Falle aber gänzlich unmöglich ſey, wenn

---

erhoben iſt. Es fragt ſich unter welchem Winkel ſoll man die Bombe abſchieſſen?

Man ſuche, wenn es noch nicht bekannt iſt, geometriſch oder trigonometriſch die Weite AN und die Höhe NB. Itzt theile man AN in 3 gleiche Theile in den Punkten O, P, N. Man verlängere die Linie AN bis NM $= \frac{1}{3}$ AN iſt. Nun theile man AM in 2 gleiche Theile und richte aus der Mitte P die Perpendiculairlinie PQ auf und mache ſie ſo groß, als $\frac{4}{3}$ NB. So wird diejenige Parabel, die zur Höhe die grade Linie QP und zur Weite AM hat, vermöge des vorhinbewieſenen Satzes durch den Punkt B gehen. Denn es iſt QP um $\frac{1}{3}$ BN gröſſer als BN. Ziehet man folglich durch den Punkt A die Tangente AR, ſo wird der Winkel RAM derjenige Winkel ſeyn, den man dem Mörſer geben muß. Dieſen Winkel findet man aber ſehr leicht. Denn es ſind die 2 Seiten AP und PR oder 2PQ in dem rechtwinklichten Triangel APR bekannt. Will man nun die Höhe und folglich die Menge Pulvers finden, die man zu dieſem Schuß gebraucht, ſo ziehe man aus dem Punkt A die Perpendiculairlinie A*x* und auf dieſe von dem Scheitelpunkte Q die Perpendiculairlinie QS, welche in dem Punkt S die Linie A*x* und in dem Punkt Z die Tangente AR durchſchneidet; Nun richte man aus dem Punkt Z auf AR eine Perpendiculairlinie auf und verlängere ſie, biß ſie die Linie A*x* in *x* durchſchneidet, ſo iſt die grade Linie A*x* die Linie der Höhe (§. 107). Hätte man nun den Probeſchuß gemacht, ſo würde die Differenz zwiſchen den Quadratwurzeln aus dieſen beyden Höhen anzeigen, wie viel mehr oder weniger Pulver man zu nehmen hätte, um unter dem Winkel RAM den Punkt B zu treffen.

Der Augenſchein gibt es, daß alle die nöthigen Linien und Winkel ſehr leicht geometriſch oder trigonometriſch zu finden ſind.

2.) Welchen Erhöhungswinkel ſoll man dem Mörſer geben, wenn man von der Batterie A den Punkt P, der unterhalb der Horizontallinie liegt, treffen will? (Tab. XI. Fig. 11)

Wir

wenn ſie ſich gar nicht berühren. Ich errege nur deswegen hierzu die Aufmerkſamkeit, weil ſehr viele Menſchen an keine Sache denken, als woran man ſie erinnert: Das Genie ſelbſt bleibt oft vielmehr dabey ſtehen, daß es ſich eine Unterſuchung anzuſtellen vornimmt, als daß es Mittel findet, wodurch es zu ſeinen Endzweck gelange. Deswegen füge ich hier noch dieſes hinzu, daß es nicht durchaus nothwendig ſey, die Parabel zu ziehen, um die Tangente B*b* und B*d* oder die

---

Wir ſetzen voraus, daß man auf irgend eine Art die Höhe BP und die Entfernung AB kenne.

Man theile BP in 3 gleiche Theile und trage von B in C 2 ſolcher Theile. Man theile auch AB in 3 gleiche Theile und trage von A nach D auch 2 ſolcher Theile. Durch die Punkte D und C ziehe man die grade Linie CE und mache DE = DC. Aus E laſſe man eine Perpendiculairlinie EQ auf AD fallen. Dieſe wird dadurch in 2 gleiche Theile getheilet werden. Man theile EQ in H in 2 gleiche Theile, ſo wird die Parabel, die zur Höhe HQ und zur Baſis AD hat durch den Punkt P gehen. Man ziehe die Tangente EAS, ſo wird der Winkel EAQ den Erhöhungswinkel anzeigen, und die Linie AM, die man nach voriger Auflöſung finden kann, wird die Höhe des Falls oder die Stärke des Pulvers anzeigen. Ich werde aus den vorigen Principien einen jeden den Beweis für dieſe Auflöſung ſelbſt erfinden laſſen.

Man leſe hiervon auſſer des Deidiers allgemeinen Mechanik, des Herrn le Blonds Artilleriewiſſenſchaft. Reynaulds demonſtrirte Analyſis, *II* Band; Die Abhandlungen der Akademie der Wiſſenſchaften zu Paris, Petersburg und Berlin; Des Jeſuiten *P.* Scherfers Diſſertat. über dieſe Materie.

Man hat auch noch auſſerdem verſchiedene Inſtrumente erfunden, wodurch ſich auf eine ſpielende Art die nöthigen Winkel beym Bombenwerfen finden laſſen. Man ſehe davon Blondels Kunſt, Bomben zu werfen; Belidors Curſus Mathematicus; le Blonds Artilleriewiſſenſchaft; Die Abhandlungen der Akademie der Wiſſenſchaften vom Steinwehr überſezt, III Band und andere. B.

Richtungslinien des Mörſers zu finden. Es iſt genug, wenn man die Brennpunkte der Würfe gefunden hat, den Scheitelpunkt der Axe zu beſtimmen. Dieſes geſchiehet durch Hülfe der gemeinſchaftlichen Directrix. Denn indem man nun durch den Punkt B die Ordinaten ziehet, ſo bekommt man auch die Subtangenten (§. 30) und folglich die geſuchten Tangenten oder die Richtungslinien der Mörſer.

Weil es in verſchiedenen Fällen nützlich iſt, die Höhe zu welcher ſich eine Bombe erhebet, zu wiſſen, um aus der erhaltenen Geſchwindigkeit die Kraft derſelben berechnen zu können, ſo wollen wir auch die Auflöſung einiger hieher gehörigen Aufgaben herſetzen.

§. 142.

Aufgabe. Aus der Weite B*t* (Fig. 23) und dem gegebenen Erhöhungswinkel *h*B*t* die gröſte Höhe *de* zu finden, zu welcher ſich eine Bombe erhebet.

Auflöſung. Es ſey die Linie B*h* oder B*x* die Tangente des Wurfs, ſo iſt offenbar die Perpendiculairlinie *ex*, die über der Mitte *e* der Weite B*t* aufgerichtet iſt, die Subtangente. Dieſe iſt die doppelte Abſciſſe oder das Duplum der geſuchten Höhe. Wenn man folglich *ex* beſtimmt hat, ſo iſt auch die Helfte derſelbe *de* bekannt. Nun iſt in dem rechtwinklichten Triangel B*ex*, B*e* als die Helfte der Weite gegeben. Auch iſt nach der Annahme der Winkel *e*B*x* bekannt. Folglich iſt auch der Winkel B*xe* bekannt. Folglich kann man *ex* und alſo auch ſeine Helfte *de* finden. Dieſe zeigt die Höhe an, zu welcher die Bombe ſich erhebt. Man ſetze, um dieſe Höhe zu finden, folgendes Verhältniß an: Der Sinus des bekannten Winkels *x* verhält ſich zu dem Sinus des gegebenen Winkels *e*B*x*, wie die bekannte Länge B*e* zu der geſuchten Höhe *ex*.

§. 143.

Aufgabe. Geſetzt, es ſollte ſich eine Bombe zu einer bekannten Höhe *de* erheben, welches muß der Erhöhungswinkel des in B geſtellten Mörſers ſeyn?

Auflöſung. Es darf die verlangte Höhe nicht gröſſer als BH oder als die Helfte der gröſten Schußweite ſeyn, die ich als bekannt annehme. Denn die Helfte der gröſten Schußweite iſt allemal der Höhe gleich, von welcher ein Körper fallen mußte, um diejenige Kraft zu erhalten, mit welcher er geworfen wird (§. 127). Und über dieſe Höhe kann ſich der Körper nicht erheben (§. 128).

Bemerket demnach, wenn *de* bekannt iſt, daß auch *a*B, welche eben ſo groß iſt, bekannt ſey, und daß man folglich auch *a*H kenne, weil BH gegeben iſt. Folglich wird es leicht ſeyn *ah* als die mittlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen *a*B und *a*H zu beſtimmen. Nun kann man in dem rechtwinklichten Triangel B*ah* aus den bekannten Seiten B*a* und *ah* auch leicht die Hypothenuſe B*h* finden. Man darf daher nur folgendes Verhältniß anſetzen, B*h* : *a*B = Sin. Tot : Sin. B*ha*, ſo wird der Sinus des Winkels B*ha* und alſo der Winkel B*ha* ſelbſt gefunden werden. Dieſer Winkel iſt aber dem geſuchten Erhöhungswinkel *h*B*t* gleich. W. z. Th. W.

Aufgabe. Wie kann man aber einem Mörſer eine beſtimmte Neigung, z. E. von 50 Graden geben? (Fig. M. Platte 2).

Auflöſung. Da der Anfang des Wurfs der Bombe nach der Richtungslinie TS geſchehen muß, um das Reiben der Kugel, gegen die Wände des Mörſers, ſo viel als möglich iſt, zu vermeiden, ſo kommt die Aufgabe darauf hinaus, ein Mittel zu finden TS über die Horizontallinie T*r* ſo zu erheben, daß der Winkel ST*r* = 50° ſey.

Hierzu muß man einen Quadranten ABC nehmen, der in ſeine Grade und Minuten eingetheilet iſt. Man verbindet damit ein breites Linial AD, welches parallel mit BC lauft, und ein Pendul B*f*. Man muß dieſes Linial in der Mitte der Oefnung des Mörſers ſetzen, und durch Hülfe des Penduls machen, daß der Quadrant perpendiculair gegen die Fläche der Oefnung ſey. Darauf läßt man den Mörſer über ſeine Laffette, das heißt, über die Maſchine ſich drehen, die ihn in allen Lagen erhalten ſoll, biß das Pendul B*f* den Quadranten im 50ten Grade durchſchneidet. Man muß aber von dem Punkt C biß zu dem Faden B*f* zählen. So wird der Mörſer die verlangte Erhöhung haben.

Beweis. Man muß zeigen, daß der Winkel ST*r*, der von der Axe TS und der Horizontallinie T*r* gemacht wird, dem Winkel CB*f* gleich ſey. Verlängert demnach in Gedanken das Pendul B*f* biß zur Horizontallinie T*r* um bey *r* einen rechten Winkel zu bekommen. Vermöge der Conſtruction des Mörſers iſt TS perpendiculair auf die Oefnung, und AB iſt es gleichfalls (Beding.) Folglich iſt TS parallel mit AB. Folglich iſt der Winkel S ein rechter Winkel. Folglich, da die Triangel *f*BS und *f*T*r* ſich offenbar ähnlich ſind, ſo iſt der Winkel CB*f* = dem Winkel ST*r* oder *f*T*r*. Nun iſt aber der Winkel CB*f* = 50° (Conſtr.); Folglich iſt auch der Winkel ST*r* = 50°. Folglich hat man den verlangten Erhöhungswinkel. (*a*)

§. 144.

Ich will dieſe Abhandlung vom Bombenwerfen, die mir vollſtändig genug zu ſeyn ſcheinet, mit Anführung der Schwü-

(*a*) Eine vortheilhafte Eintheilung eines ſolchen Quadranten findet man unter andern in den vermiſchten Werken des Herrn Belidors, die vom Herrn Ingenieur-Major Schneller überſezt ſind, Seite 302. 303. B.

Schwürigkeiten beſchlieſſen, die man gegen dieſe Theorie gemacht hat. (*a*)

1.) Die Linien der Schwere FM, RC, KV können nicht unter einander parallel ſeyn. Denn die Erfahrung lehret es, daß dieſe Richtungslinien auf der krummen Oberfläche der Erde perpendiculair ſtehen. Folglich iſt es unmöglich, daß alle dieſe Linien, die gegen eine krumme Fläche perpendiculair ſind, auch unter ſich parallel ſeyn.

2.) Die Geſchwindigkeit, welche ſeiner in die Luft geworfenen Bombe eingedrukt wird, iſt nicht in ihrem ganzen Wege gleichförmig. Denn es iſt durch Verſuche ausgemacht und die Vernunft begreift es ſehr leicht, daß eine Bombe gegen das Ende ihres Steigens nicht mehr ſo ſchnell fliege, als am Anfange ihres Wurfs.

3.) Wenn in einem vollkommen leeren Raum, die durch die Schwere durchgelaufenen Raume ſich unter einander verhalten, wie die Quadrate der angewendeten Zeiten, ſo kann man nicht zweifeln, daß dieſes Verhältniß in einem Raum, ſo wie die Luft iſt, wo die Verſchiedenheit in der Dichtigkeit und der Bewegung die Hinderniſſe vermehret und verändert, nicht ſehr alteriret werden ſollte. Folglich wird die krumme Linie, die die Bomben in der Luft beſchreiben, keine Parabel ſeyn können. (*)

(*a*) Man leſe hierüber auſſer des Blondels Kunſt, Bomben zu werfen, das 2te Kapitel der neuen Grundſätze der Artillerie vom Herrn Robins, *Euleri Mechan. T. I. prop. 107.* Des Deidier allgemeine Mechanik, 1 Buch, 10ten Kap. *Mako Elem Phyſ. T. I. p. 134* Die Abhandlungen der Akad. der Wiſſenſch. zu Paris *T. III. V. Commentar. acad. Petropol. T. II.; Newtons Princ. Math. Philoſ. nat. Lib. I. prop. 41. Joh. Bernoulli Opera T. I. pag. 514. ſqb. Hugenius Diſcours de la cauſe de la Peſanteur; Hermanni Phoronomia Sect. IV. &c.* B.

(*) Wie entſezlich groß der Widerſtand der Luft ſey, zeigt der groſſe Geometer Herr Daniel Bernoulli im 2ten Bande des Com-

4.) Fügt man endlich zu dieſen Betrachtungen die unvermeidlichen Irrthümer, welche von den nicht gar genau verfertigten Inſtrumenten und von den nöthigen Handgriffen in dem praktiſchen Bombenwerfen entſtehen, ſo wird man ſehr gegründete Urſache zu haben glauben, allen Nutzen dieſer vorhin gegebenen Theorie abzuſprechen und ſie nur als eine angenehme Beluſtigung des Verſtandes zu betrachten. Aber es wird dieſes zum Nachtheil unſerer Bedürfniſſe und der Erhaltung unſerer ſelbſt geſchehen.

Herr **Blondel** hat in ſeiner **Kunſt, Bomben zu werfen** alle dieſe Schwürigkeiten ſo vollſtändig aufgelöſet, daß ich alle Wißbegierigen mit dem gröſten Rechte dahin verweiſen kann.

Hier werde ich mich alſo nur auf eine einzige Antwort einſchränken, die aber grade allen Einwendungen die Stirn bietet. Sie iſt dieſe: Man findet nach den in dem **franzöſiſchen Bombardier des Herrn Belidors** angeführten Verſuchen, die bloß darzu gemacht ſind, um die Reſultate daraus mit der Theorie zu vergleichen, man findet, ſage ich, zwiſchen der geometriſchen Beſtimmung und zwiſchen der Erfahrung oft keinen Unterſchied von 2 Toiſen, ohngeachtet der Men-

Commentar. Acad. Petrop.; allwo er die überzeugendſten Beweiſe davon anführet. Unter andern iſt dieſe Bemerkung ſehr auſſerordentlich, daß eine Stuckkugel, die nach der Berechnung in einem luftleeren Raum 58750′ hoch ſteigen ſollte, nur 7819′ ſich in der Luft erhob. Aehnliche Beyſpiele findet man bey dem Herrn Robins am angezogenen Orte. Nämlich, daß eine eiſerne Kugel die 24 Pfund ſchwer war, und nach der Theorie 16 engliſche Meilen durchfliegen ſollte, in der That nur 3 engliſche Meilen zurük legt. Er hat berechnet, daß bey einer ſehr groſſen Geſchwindigkeit der Widerſtand der Luft mehr als 100 mal ſtärker ſey, als das Gewicht der Kugel. Ob der Weg der Bombe eine **Hyperbel** oder eine andere krumme Linie ſey, wird man in den vorhin angeführten Büchern ausführlich beantwortet finden. B.

Menge von unvermeidlichen Irrthümern, die ſich in der Ausübung zuſammen vereinigen, um die theoretiſche Genauigkeit immer weiter zu entfernen.

Hier ſind die Verſuche, die die vorige Theorie beſtätigen. Diejenigen, die ungern zum Vortheil dieſer Theorie urtheilen, weil ihnen die Menge von Beobachtungen, die dieſelbe zu ſchwächen ſcheinen, und die in der That die genaue Richtigkeit verhindern, im Wege ſind, können ſich davon überzeugen, wenn ſie die beſondern und einzelnen Umſtände der folgenden Verſuche leſen. Dieſe ſind vollkommen authentiſch. Ja die einſichtsvollen und verſtändigen Männer, die ſie ſelbſt machten oder mit anſahen, hatten ſo groſſe Vortheile dabey, ſie zu läugnen, daß meiner Meinung nach der Beyfall derſelben die vollkommenſte Beſtätigung und alle nur zu verlangende Ueberzeugung gibt. Sie ſind aus der Vorbereitung zum franzöſiſchen Bombardier des Herrn Belidors, Seite X. genommen.

„Als gegen das Ende des 1725ten Jahres meine Tabellen fertig wurden, ſagt Herr Belidor, ſo wünſchte jedermann Proben damit zu machen ——. Man fieng bey der Ladung eines Mörſers mit einem Pfund Pulver ohne Erde an, und man richtete ihn auf einem Winkel von 15 Grad. Man warf 2 Bomben, die faſt gleich weit fielen. Hierauf warf man eben dieſe Bomben mit 1 Pfund Pulver unter einem Winkel von 45 Grad, um zu ſehen, ob die Schußweiten doppelt ſo groß ſeyn würden (wie es die Theorie angibt). Man fand die Weiten ſo, wie man ſie vermuthet hatte. Man fand eine gleiche Richtigkeit bey einer zwey- oder dreypfündigen Ladung und die Schußweiten unter 45 Grad fielen immer doppelt ſo groß aus, als die von 15 Grad.

„Da man nun von der Gewißheit des Grundſatzes, nach welchem unſere Tabellen verfertiget waren, überzeugt war, ſo begehrte Herr Tuffereau, Commendant unſerer Schule zu

„la

„*la Fère*, daß man eine Bombe auf 40 Toiſen werfen mög-
„te. Man ſuchte in den Tabellen, die nach der Theorie der „Parabel calculirt waren, die darzu gehörige Richtung nach „Maaßgabe des Probeſchuſſes auf, und warf mit 1 Pfund „Pulver die erſte Bombe auf 39 Toiſen, und die zwote auf „41. Er verlangte darauf 2 andere Bomben mit eben der„ſelben Ladung auf 70 Toiſen zu werfen, und nachdem man „die Erhöhung des Mörſers in den Tabellen geſucht hatte, „fiel die erſte auf 71 Toiſen, und die zwote auf 71 Toiſen „und 4 Schuh.

„Man lud hierauf den Mörſer mit 2 Pfund Pulver „noch immer ohne Erde, um Bomben auf weitere Diſtanzen „zu werfen. Bey jeder neuen Ladung that man auch einen „neuen Probeſchuß. Man that den Vorſchlag zwo Bomben „auf 100 Toiſen zu werfen; die erſte fiel auf 102, und die „andere auf 100 Toiſen und 5 Schuh. Man ſollte abermal „zwo Bomben auf 120 Toiſen werfen; die erſte fiel um ein „gutes zu kurz, weil an der Verkeilung des Mörſers etwas „verrükt war: die zwote aber wurde unter eben dem Grade der „Erhöhung als die vorige geworfen, und ſie fiel auf 118 Toi„ſen und 3 Schuh, und eine dritte endlich auf 121 Toiſen. „Man verlangte endlich noch weit gröſſere Schußweiten, und „ſie giengen alle ſo lange gut, ſo lange man ſich keiner Erde „bediente ——. Einige Tage darauf gebrauchte man Erde „zu den Würfen, um Bomben auf 200, 250 und 300 Toi„ſen zu werfen. Die Schußweiten trafen ſo ziemlich mit den „Tabellen überein, aber doch nicht ſo genau, als vorher, da „man ohne Erde warf. Man warf wieder andere auf 400, „500 und 600 Toiſen, und die Schußweiten fielen ungefehr „um 8. oder 10 Toiſen kürzer aus, als es ſeyn ſollte. Man „kann den Grund davon unten in der Note ſe„hen. (*a*)

„Als

(*a*) In den gröſſern Schußweiten ſind die Bomben längere Zeit in der Luft. Daher kommt es, daß die Bewegung des gewor-
fenen

„Als ich zu Anfange des Maymonats im Jahr 1731 „aus der Königl. Buchdruckerey ein Exemplar von meinen Ta„bellen erhielte, die ſo eben die Preſſe verlieſſen, ſo erſuchten „mich die Officiers des unter dem Befehle des Herrn de la „**Perrelle** ſtehenden Artilleriebataillons und noch andere Artil„lerieofficiers neue Verſuche anzuſtellen, welchen ſie viele Ta„ge hintereinander mit vieler Emſigkeit beywohnten. Wir „warfen mit einander vorſetzlich aus allerhand Mörſern Bom„ben auf 50, 112, 150, 200, 250 und 300 Toiſen. „Dieſe Würfe fielen insgeſammt wohl aus, wie man dieſes „aus den Berichten ſehen kann, die ſie ſelbſt aufgeſetzet ha„ben, und die am Ende dieſes Vorberichts angeführet ſind ꝛc."

Wenn

---

fenen Körpers gegen das Ende des Wurfs ſo ſehr abnimmt und dadurch die Weite abkürzet. In der Theorie nahm man aber dieſe Bewegung als gleichförmig an. Da man inzwiſchen in den Belagerungen die Batterien der Mörſer gemeiniglich höchſtens nur auf 300 Toiſen weit von den Oertern, die man durch dieſe Feuerkugeln verderben will, errichtet, ſo zeigen die vorigen Verſuche, daß die Praxis beym Bombenwerfen, die auf der Theorie der Parabel gegründet iſt, allerdings dem Gerathewohl vorzuziehen ſey, welches in Anſehung der Zeit und Koſten ſehr nachtheilig iſt. Wenn man hingegen nach den geometriſchen Regeln verfährt, ſo hat man den gröſten Vortheil an Koſten und der Zeit. Will man nach denſelben auf ein nicht weit entferntes beſtimmtes Objekt werfen, ſo werden durch einen einzigen Probeſchuß alle übrige Schüſſe reguliret. Will man aber Häuſer oder Gebäude einer Stadt verderben, ſo machen 10 Toiſen mehr oder weniger in den groſſen Schußweiten nichts, weil der Raum, in welchem die Bomben niederfallen können, ſehr anſehnlich und groß iſt.

Man hat endlich ein Mittel, alle Irrthümer in den groſſen Schußweiten auf einmal zu berichtigen; Geſetzt die Erfahrung hätte uns in den Weiten von 600 Toiſen gezeigt, daß die Weite ſich ordentlich um 10 Toiſen verkürzte; Wollte man nun eine Bombe auf eine ſolche Entfernung werfen, ſo darf man nur ſeinen Mörſer ſo richten, als wenn man auf 610 Toiſen werfen wolte. So wird der Irrthum beynahe gehoben ſeyn.

Wenn nun, nach ſo vielen Verſuchen von dieſer Art, irgend ein übeldenkender und eigenſinniger Menſch noch die Einführung der geometriſchen Regeln in die Artillerie nicht zulaſſen wollte, der mag die Erlaubniß haben, ſich ganz allein in ſeinen Ideen zu gefallen. So lange Menſchen noch auf den wichtigen Vortheil ihrer eigenen Erhaltung ſehen werden, ſo darf man ſchwerlich beſorgen, daß eine ſolche Meinung lange daure, und noch weniger, daß ſie ihr Glück mache.

Gebrauch der Parabel bey der Berechnung der Aushöhlung der Minen.

* §. 145.

Eine Mine iſt eine Kammer oder Ofen unter der Erde, worein man eine zureichende Menge von Pulver legt, um das, was über derſelben iſt, in die Luft zu ſprengen. Die Minen haben einen ſehr groſſen Nutzen in den Belagerungen und ſind vielleicht die beſte Erfindung und furchtbarſte Vertheidigung, die man einem angreifenden Feinde entgegen ſetzen kan.(*) Es iſt daher daran gelegen, die Conſtruction derſelben

(*) Schon in den alleräſteſten Zeiten ſind dieſe ſchreklichen Höhlen unter der Erde, die man heut zu Tage Minen nennet, ſehr im Gebranch geweſen. Nur waren ſie in der Art, wie ſie würkten, von der itzigen freilich ſehr unterſchieden. Man hatte noch nicht zum Vortheil oder Schaden des menſchlichen Geſchlechts das fürchterliche Pulver erfunden. Man konnte alſo auch noch nicht mit demſelben die Mauren der Städte in die Luft jagen. Aber die Feinde untergruben von weitem her die Fundamente der Mauren. Sie unterſtüzten dieſelben mit hölzernen Pfeilern und füllten die leeren Plätze mit allerhand brennbaren Dingen an. Waren ſie mit dem Untergraben fertig,

ben auf Grundſätze zu bringen, wodurch dem langwierigen Ungefehr und dem ſchweren Gange der Verſuche abgeholfen werde.

Ich

---

tig, ſo wurde dieſes alles mit Feuer angezündet. Die vom Feuer zerſtörten Stützen fielen dahin und mit ihnen die Mauern ſelbſt, die keine Fundamente mehr hatten: Nun hatte der Feind eine Oefnung, durch welche er in die beveſtigte Stadt eindringen und ſie erobern konnte. Man weiß, daß nach der alten Art zu kriegen, erſchreckliche Thürme gegen die Veſtung geführt wurden, von welchen ein Regen von Steinen, Pfeilen und anderm Geſchoß in die Stadt flog. Auch dieſe wurden von den Belagerten, ſo wie es vorhin erzählt wurde, untergraben und zu Boden geſtürzt. Man leſe die verſchiedenen Verfaſſer, die von der Kriegskunſt der Alten geſchrieben haben, einen Thucidides, Polybius u. ſ. w. Wer ſiehet nicht, daß unſere heutigen Helden von den ältern Kriegern ihre Künſte gelernet haben. Dieſe ſtürzten die Werke durch Feuer in die Erde. Jene werfen ſie durch Feuer in die Luft. Gegen das Ende des 15ten Jahrhunderts ſind die mit Pulver geladenen Minen zuerſt vom Pietro de Navarra mit glücklichem Erfolg in der Belagerung von Neapel gebraucht worden. Der Herr von Valliere iſt derjenige, der dieſer Wiſſenſchaft von den Minen ein ganz anderes Anſehen verſchaffet und ſie zu einer groſſen Vollkommenheit erhoben hat. Doch verdienen Herr von Vauban und der Herr Belidor gleichfalls, daß ihre Namen der Nachwelt bekannt werden.

Der Nutzen, den die Minen liefern, beſtehet unter andern darinn, daß man dadurch groſſe Oefnungen in den Wällen erhält, um auf eine vortheilhafte Art einen Sturm wagen zu können, daß dadurch die Batterien der Feinde über den Haufen geworfen werden; daß ſie den Feind in ſeiner Arbeit ſtöhren, und den Soldaten in einige Furcht ſetzen. Denn kein Gedanke kan ihnen ſchrecklicher ſeyn, als dieſer, daß ſie über Minen zu ſtehen kommen, wodurch auch die tapferſten Helden ein Spiel der Luft werden. Sie haben indeſſen doch auch verſchiedene Unbequemlichkeiten —. Sie werden durch eine ſo genannte Wurſt oder durch eine Maſſe Pulver, die in einem leinenen Sack biß zu dem Ofen geführet wird, angezündet und

es

Ich kenne von dieſer Materie kein gelehrterer und ſchöneres Werk als die vortrefliche Abhandlung von den Minen des würklichen Generallieutenants des Herrn von **Valliere.** Ich rathe daß man ſich alle Mühe gäbe, dieſelbe wohl zu verſtehen; Man findet dieſe Abhandlung in dem dritten Bande des Polybius der von dem Ritter **Folard** mit den ſchönſten Erklärungen heraus gegeben iſt. Diejenigen, die ſo viel auf Erfahrung halten, werden daſelbſt finden, daß dieſer berühmte Verfaſſer ohne die Geometrie niemals auf dieſe Entdeckungen gekommen ſeyn würde. Allein durch Hülfe einer guten Theorie haben ihn einige Jahre in der Ausübung dasjenige gezeiget, was die Praktik vieler Jahrhunderte jederzeit in der Dunkelheit gelaſſen hat.

Wäre es bloß um die Conſtruction der Minen zu thun geweſen, ſo hätte man nur die ſimple Geometrie nöthig gehabt. Um aber das Pulver nicht unnützlich zu verbrauchen und um nur einen beſtimmten Grad der Verwüſtung zu verurſachen, iſt es nöthig, mit der Laſt, die man in die Höhe heben will, die Menge des Pulvers in Verhältniß zu ſetzen. Man kann aber dieſes Gewicht nur durch Ausrechnung des körperlichen Innhalts der Erdmaſſe, die von der Mine in die Luft geſprengt wird, finden. Dieſen Innhal weiß man, wenn man die hohle Figur oder die Höhlung kennet, die die Mine, nachdem ſie geſpielt hat, zurük läßt.

Herr de **Valliere** hat gefunden, daß in ſolchen Böden, die ungefehr in allen ihren Theilen gleich ſtark widerſtehen, dieſe Aushöhlung, oder, wie ſich die **Minirer** ausdrücken, dieſer Trichter

---

es hat der Minirer dadurch Zeit, ſich auf die Flucht zu machen. Man leſe von den Minen unter andern Speckels Architectur von Veſtungen, Straßb. 1589. Belidors vermiſchte Werke, überſetzt vom Herrn Schneller, 8. 1769. Le Blonds Artilleriewiſſenſchaft, überſetzt vom Herrn Jäger, ꝛc. B.

Trichter die Figur eines paraboliſchen Afterkegels habe, das heißt, daß ſie einen ſolchen Körper vorſtelle, der durch die Umwälzung einer Parabel AGDHC (Fig. 30.) um ihre Axe DB erzeugt wird, und deren Brennpunkt in dem Mittelpunkt F des Ofens iſt.

Vor den Beobachtungen dieſes berühmten Generals hielte man dieſen Körper für einen Kegel AFC, deſſen Spitze in F war. Nach der Zeit bemerkte man, daß er ſich mehr einem abgekürzten Kegel AGHC näherte (*a*). Nachdem man aber hierüber eine ſehr groſſe Anzahl von Verſuchen mit der genaueſten Sorgfalt gemacht hatte, ſo erkannte Herr de Valliere, daß die Schräge oder der innere Abhang der Aushöhlung keine grade Linie ſey und muthmaßte daher, daß es wohl ein paraboliſcher Afterkegel ſeyn könnte, deſſen Brennpunkt er in dem Mittelpunkte des Ofens ſetzte. (*)

Um

(*a*) Belidors Curſus Mathematicus.

(*) Der erſte Verdacht, daß dieſe Höhlung kein Kegel ſeyn könne, entſtand daher, weil man ſich nicht vorſtellen konnte, daß das Pulver, welches in der Kammer F iſt, ſeine Würkung juſt nach einem rechten Winkel thäte und daß der Grund des Trichters ſich vollkommen in einer Spitze endigen ſollte. Verſuche lehrten bald die Gewißheit und Richtigkeit der Vermuthung. Man fieng an, die Höhlung für einen abgekürzten Kegel anzuſehen, bey welchem der Halbmeſſer FH der Grundfläche des kleinen abgeſchnittenen Kegels halb ſo groß ſey, als der Radius BC von der Grundfläche des abgekürzten Kegels. Was für ein groſſer Unterſchied aber zwiſchen dieſen 2 Vorausſetzungen in der Berechnung der Minen heraus komme, wird man aus folgender Vergleichung ſehen. Es ſey der abgekürzte Kegel AGHC, ſo iſt der noch fehlende kleine Kegel GEH und der ganze Kegel AEC. Nun verhalten ſich aber die Kegel zu einander, wie die Würfel ihrer Diameter. Folglich verhält ſich der Kegel AEC zum Kegel EGH wie $\overline{AC}^3$ zu

 $\overline{GH}^3$

Um ſeinen Vermuthungen die Gewißheit zu verſchaffen, ſo verlängerte er DF und machte DI ſo groß als DF. Er wußte, daß die Diſtanz FC vom Brennpunct C bis zu jedem Punkte der Krümmung der Parabel allemal der Diſtanz CM oder BI nemlich der Entfernung von dem nämlichen Punkt C bis

GH. Es iſt aber FH $= \frac{1}{2}$ BC vermöge der Bedingung. Folglich iſt auch GH $= \frac{1}{2}$ AC, oder AC iſt noch einmal ſo groß als GH. Folglich verhält ſich AC : GH = 2 : 1. Deswegen verhält ſich auch der Kegel AEC zum Kegel EGH wie 2^3 zu 1^3 wie 8 : 1. Folglich iſt der Kegel AEC achtmal ſo groß als der Kegel EGH. Folglich iſt der abgekürzte Kegel AGHC $= \frac{7}{8}$ von dem Kegel AEC. Nun verhält ſich wegen der ähnlichen Triangel CB : HF = BE : FE. Es verhält ſich aber CB : HF = 2 : 1. (Bedingung) Folglich auch BE : FE = 2 : 1; folglich iſt BF die Helfte von BE. Vergleichen wir nun die beyden Kegel AFC und AEC gegen einander, ſo ſehen wir, daß ſie beyde einerley Grundfläche haben; Sie verhalten ſich alſo zu einander, wie ihre Höhe BF und BE, oder, wie 1 : 2. Folglich iſt der Kegel AFC $= \frac{4}{8}$ von AEC. Folglich verhält ſich der abgekürzte Kegel AGHC zum Kegel AFC $= \frac{7}{8} : \frac{4}{8} = 7 : 4$. Wenn man alſo die Mine als einen Kegel AFC berechnete und fände, daß man nur 4 Centner Pulver gebrauchte, ſo würde man nach der andern Berechnung 7 Centner nöthig haben, wenn anders die Menge Pulvers nach dem Verhältniſſe der Maſſe zunehme, welches aber Herr Belidor in ſeiner neuen Theorie von den Minen anders bewieſen hat.

Endlich fand man auch, daß die Seitenwände keine gerade Linien vorſtellten und man kam durch Nachdenken und Verſuche endlich darauf, dieſen Körper als eine Paraboloide zu berechnen. Statt deſſen aber auch Herr Belidor noch lieber nur eine abgekürzte Paraboloide annehmen mögte. Der Unterſchied, wenn man die Mine als einen abgekürzten Kegel oder als eine Paraboloide berechnet iſt nicht ſehr von Erheblichkeit. Herr Belidor fand, daß wenn er eine Mine, die 40 Schuh zur Linie des ſchwächſten Widerſtands hat, als eine Paraboloide berechnete, er zum körperlichen Innhalt 119821 Cubickſchuh bekam; als abgekürzter Kegel hielte ſie 118115 Cubickſchuh. Folglich iſt der Unterſchied nur $\frac{1}{72}$. B.

bis an die Directrix KM gleich ſey (§. 90) Er trug deswegen FC auf BI und fand FC ſo groß als BI. Er nahm darauf nach Belieben einen Theil der Axe DT, der gröſſer war, als DF. Er ſchnitt davon ein Stück TS = DF oder DI herunter und richtete in S eine Perpendiculairlinie SR auf. Darauf fand er, daß die Diſtanz FR ſo groß als DT ſey. Nothwendige Eigenſchaft! wenn anders dieſer Körper eine Paraboloide ſeyn ſolte. Denn es iſt FR = RP (§. 90.) = SD + DI = SD + TS = DT.

Man wird ſich noch erinnern, daß die Ordinate FH am Brennpunkt der Helfte des Parameters der krummen Linie gleich ſey und daß die Diſtanz DF der 4te Theil des Parameters ſey (§. 78); folglich iſt FH = 2 DF. Auch dieſes lehrte den Herrn **de Valliere** die Erfahrung.

Eigenſchaften genug, die die Parabel kennbar machen. Man muß daher die Höhlung einer Mine als einen **paraboliſchen Afterkegel** berechnen. Zu dieſer Rechnung braucht man nur die Perpendiculairlinie FB zu kennen, die aus dem Ofen auf die oberſte Fläche des Erdreichs, das man in die Höhe werfen will, gezogen iſt. Und weil die Mine nach dieſer Seite zu ihre Würkung äuſſern ſoll, ſo heißt die Perpendiculairlinie FB **die Linie des geringſten Widerſtandes.** Dieſe iſt mit dem Halbmeſſer BC, wodurch die obere Oefnung des Trichters beſchrieben wird, jederzeit von gleicher Gröſſe (*).

(*) Dieſes iſt nur in dem einzigen Fall wahr, wenn die Mine mit einer beſtimmten Ladung von Pulver geſprengt wird. Es iſt nicht ſchwer, ſagt Herr Belidor in ſeiner neuen Theorie der Minen, Minen anzulegen, deren obere Durchmeſſer, 3, 4, 5, 6 mal ſo groß ſind, als die geringſte Widerſtandslinie. Es ſind zu la Fére 1729. die überzeugendſten Verſuche darüber angeſtellet worden, die ich hier nicht anführen mag. Ich bemerke nur, daß man zu Biſy im Jahr 1753 eine Mine ſprengte

Um nun zu erkennen, daß allein die Kenntniß der Länge der Linie FB hinlänglich ſey, den körperlichen Innhalt der Aushöhlung einer Mine oder einer Paraboloide AGDHC zu finden, ſo ſey FB $=$ BC $= a$; und wegen des gleichſchenklichten recht winklichten Triangels FBC iſt $\overline{FC}^2$ oder $\overline{CM}^2$ oder $\overline{BI}^2$ (§. 90) $= \overline{FB}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa$; Folglich iſt BI $= \sqrt{2aa}$ und FI $=$ BI $-$ FB $= \sqrt{(2aa)} - a$; Folglich FD $= \frac{FI}{2} = \frac{\sqrt{(2aa} - a}{2}$; Folglich FB+FD $=$ BD $= a + \frac{\sqrt{(2aa)} - a}{2}$ Dieſes ſind lauter bekannte Gröſſen.

Iſt aber der Radius BC von der Grundfläche des Trichters bekannt, ſo kennt man auch dieſe Grundfläche ſelbſt. Man darf ſie dahero nur durch die Helfte der Höhe BD der Paraboloide multipliciren, um den geſuchten körperlichen Innhalt zu bekommen (§. 72).

Weiß man daher, wie tief der Minirer hinein gehen muß, um ſeinen Ofen zu conſtruiren, ſo kan man den körperlichen Innhalt oder die Anzahl der Cubickſchuh von Erde, die die Mine hinaus werfen wird, finden, und wenn man durch Verſuche, die erforderliche Menge Pulver beſtimmt, um einen Cubickſchuh von dieſer Erde, in welcher die Mine angelegt iſt, in die Höhe zu werfen, ſo weiß man, wie viel Pulver man überhaupt gebrauche, um die ganze Maſſe der Höhlung in die Luft zu ſprengen (*).

Allein

ſprengte, deren kleinſte Widerſtandslinie 12 Schuh war, und die man ſtatt 300 Pfund mit 3000 Pfund Pulver geladen hatte. Dieſe ſolte zum Diameter 24 Schuh haben, hatte aber 72 Schuh. Man ſehe *le Blond* XIV Cap. p. 27. B.

(*) Damit man ſich eine kleine Idee von der etwa zu gebrauchenden Menge Pulvers machen könne, will ich folgendes herſetzen.

1)

Allein mich dünkt, man ſolte für den körperlichen Innhalt, der durch die Mine in die Höhe geworfenen Erde nur den abgekürzten Paraboliſchen Afterkegel AGFHRC annehmen, das heißt, man ſolte nur denjenigen Theil der ganzen Paraboloide rechnen, welcher ſich über die doppelte Ordinate GH an dem Brennpunkt F befindet. Denn die untere Höhlung oder der kleine paraboliſche Afterkegel GDH iſt augenſcheinlich nur durch den Druck des Pulvers gegen den Scheitelpunkt D verurſacht werden. Man muß alſo, um den wahren körperlichen Innhalt der in die Höhe geworfenen Erde zu bekommen von dem ganzen **paraboliſchen Afterkegel** ADC den kleinen GDH abziehen. Man kennt aber auch alle nöthige Dimenſionen deſſelben durch die Dimenſionen des gröſſern. Denn es iſt FH = 2 FD (§. 92. 78.) dieſe iſt eine beſtimmte Gröſſe. Was nun übrig bleibt, nachdem man den kleinen Afterkegel von dem gröſſern abgezogen hat, das iſt der körperliche Innhalt des abgekürzten **paraboliſchen Afterkegels.**

Wolte man aber die Aushöhlung als einen abgekürzten Kegel AGHC ausrechnen, ſo müßte man noch FH meſſen. Alsdenn würde man mit leichter Mühe durch Hülfe der ähnlichen Triangel CBE und HFE die Gröſſe der Höhen FE und BE finden und durch dieſe würde man ſowol den körperlichen Innhalt des groſſen Kegels AEC als auch des kleinern Kegels GEH beſtimmen können. Zöge man darauf GEH von

1) Eine Cubickklafter Sand oder Tuf Erde auf veſtem Lande auszuheben, braucht man wenigſtens 11 Pfund.

2) Zu einer Cubickklafter Leimen im veſten Lande 15 Pfund.

3) Ein Cubickklafter Sand oder umgegrabener Erde 9 Pfund.

4) Ein Cubickklafter Mauerwerk, welches auſſer der Erde ſtehet, erfordert 20-25 Pfund. Steht es aber im Grunde, 35-40 Pfund. Doch hänget alles ſehr von der Güte des Pulvers und von andern Umſtänden ab. Inſonderheit muß man auf die Zähigkeit des Erdreichs ſehen. Eine ſchöne Anweiſung dieſes alles zu berechnen, findet man in **Belidors vermiſchten Werken.** B.

von AEC ab, ſo iſt klar, daß man den körperlichen Inn-halt des abgekürzten Kegels bekommen würde.

* §. 146.

Anmerkung. Diejenigen, die die Höhlung der Mine als einen abgekürzten Kegel betrachten, ſagen, daß man durch Verſuche finde, daß $FH = \frac{BC}{2}$. Allein man muß wohl merken, daß dieſes nicht ſo ſey, wenn man einen ganzen oder abgekürzten paraboliſchen Afterkegel annimmt. Denn ſonſt wäre $GH = BC$. Es iſt aber $GH =$ dem Parameter der erzeugenden krummen Linie (§. 93) Folglich wäre die Ordinate $BC =$ dem Parameter p. Folglich, da $\overline{BC}^2$ ſo groß iſt als $BD \times p$ (§. 20.) ſo wäre $pp = BD \times p$. oder $p = BD$. Man hat aber ſchon geſehen, daß $p = BC$: Folglich wäre $BD = BC$. Es hat aber auch die Erfahrung gezeiget, daß $BC = BF$. Folglich wäre $BD = BF$, welches unmöglich iſt.

Man muß auf dieſe Beobachtung aufmerkſam ſeyn, um ſich für eine Unachtſamkeit zu hüten, worein einige Verfaſſer gefallen ſind, welche immer $FH = \frac{BC}{2}$ annehmen. Ohngeachtet ſie die Aushöhlung der Minen nach einer Paraboloide berechneten.

§. 147.

Weil im nachfolgenden von convexen und concaven Afterkegeln die Rede ſeyn wird, ſo kan man hier ſchicklich zeigen, wie Künſtler ſolche verfertigen können. Ein Afterkegel iſt ein Körper, der durch das Herumwälzen eines Kegelſchnitts um ſeine Axe erzeugt wird. Man nennet ihn aber insbeſondere eine **Paraboloide**, **Ellypſoide**, **Hyperboloide**

boloide je nachdem die erzeugende krumme Linie eine Parabel, Ellypſis oder Hyperbel iſt.

§. 148.

Die Methode, wie Künſtler einen Afterkegel oder irgend einen erhabenen oder hohlen Körper machen können.

Man ziehet auf Kupfer, Stahl ꝛc. die beſtimmte erzeugende krumme Linie. Z. E. eine Parabel, wenn man einen paraboliſchen Afterkegel haben will. Man muß dabey ſehr ſorgfältig darauf ſehen, daß die Materie, worauf man dieſe krumme Linie ziehen will, eine ſo polirte und vollkommene Ebene ſey, als die Kunſt zu liefern im Stande iſt. Man laſſe durch die Axe derſelben eine Stange mit einer Kurbel gehen, wie es die 31te Figur zeiget. Darauf ſchneide man bis auf einen ſcharfen Rand, den die Krümme der Linie abbildet, alles weg, damit bey dem Herumwälzen nur die krumme Linie da ſey, die der beſtimmten Materie die Form gebe. Nun muß man dieſe Materie in der Mitte aushöhlen und zubereiten, daß man innerhalb derſelben die Fläche, auf welche die krumme Linie gezogen iſt, hinein bringen könne. Muß man alsdenn die Axe dieſer Fläche beveſtigen, damit ſie ihre Richtung nicht verändere. Nun wird die krumme Linie durch das Herumdrehen der Kurbel ihre Figur in allen Punkten des Umkreiſes der Materie in oder um welcher ſie ſich herum drehet, eindrücken. Wir ſetzen voraus, daß die Materie weich genug ſey, damit ſie leichtlich durch den ſcharfen Rand ſich krümmen und abſondern laſſe, daß ſie aber doch Veſtigkeit genug dabey habe, die gegebene Form zu behalten. Bringet man in eine ſolche Höhlung eine Materie, die dieſelbe vollkommen ausfüllt, ſo bekommt man einen erhabenen Körper, der die Figur der gebrauchten Form hat.

§. 149.

Man hat Maſchinen angegeben, wodurch man die krummen Linien durch eine zuſammenhangende Bewegung beſchreiben kan (*). Mir kamen dieſelben aber ſehr verdächtig vor, wenn man eine recht genaue Zeichnung haben will. Die Saiten, die Federn, die Falzen ꝛc. ſind Irregularitäten und Veränderungen nicht nur von der Luft und dem Waſſer, der trockenen und der feuchten Witterung, wodurch ſie ſich werfen und krümmen, ausgeſetzet, ſondern man kan ſich auch deswegen nicht ſicher darauf verlaſſen, weil die verſchiedenen Stücke bey der Bewegung ſtärkere oder ſchwächere Drückung erhalten. Man iſt alſo nicht auf alle mögliche Art verſichert, daß man einen einzigen Punkt der zu beſchreibenden krummeu Linie bekomme. Es iſt daher meiner Meinung nach ſehr nothwendig eine erzeugende krumme Linie mit dem Zirkel zu reiſſen; denn dieſes iſt die einfachſte von allen Maſchinen. Man muß nämlich nach und nach die Punkte der verlangten krummen Linie geometriſch ſuchen (§. 25). Wenn man recht viele von ſolchen Punkten beſtimmt, ſo wird dadurch eine krumme Linie beſchrieben werden, die in einem fortgehet oder deren Punkte ſehr nahe aneinander ſind, und die folglich ſo genau und richtig ſeyn wird, als ſie nach menſchlicher Geſchicklichkeit ſeyn kan. Ich mögte auch in dem Falle, wenn die krumme Linie mit einer zuſammengeſezten Maſchine beſchrieben wäre dennoch anrathen, daß man die Zeichnung jederzeit mit dem einfachen Zirkel rectificirte oder berichtigte.

Gebrauch

(*) Man findet ſie in verſchiedenen algebraiſchen Werken, die von der höhern Geometrie handeln. Man ſehe unter andern von Wolfs Werke, Wiedeburgs höhere Geometrie, Bions mathematiſche Werkſchule, *Deschales mund. Math. Catoptr.* L. III. &c. B.

Gebrauch der Parabel bey Verfertigung der Sprachröhren.

§. 150.

Ein Sprachrohr iſt ein Inſtrument, wodurch man in der Ferne mit jemanden verſtändlich reden kan. Es ſind noch kaum 100 Jahre verfloſſen, ſeit dem man dieſe Erfindung zum erſten mal gemacht oder in Europa erneuert hat (*a*). Hauptſächlich auf der See empfindet man die groſſe Nutzbarkeit deſſelben. Es können ſich zwey Schiffe, die ſich einander begegnen, nicht ſo ſicher als 2 Menſchen, einander nähern. Wenn ſie auch nur im geringſten zuſammen ſtoſſen würden, ſo würden ſie doch ihrer ungeheuren Maſſe wegen der Gefahr ausgeſezt ſeyn, ſich einander zu zerſcheitern und dadurch zu Grunde zu gehen.

Man muß indeſſen doch öfters ſich einander Nachrichten ertheilen. Die Zeit erlaubt es nicht immer die Chaluppe in die See zu laſſen. Das Sauſen der Winde und das Geräuſche des Waſſers würde die bloſſe Stimme an Stärke übertreffen. Man muß daher viel lauter reden, als dieſes Geräuſch iſt. Man muß ſich daher um die beſte Conſtruction eines Inſtruments bekümmern, welches uns dieſe Vortheile verſchaffen kan (*).

(*a*) Man ſehe die Anmerkung unten bey dem §. 156.

(*) Dieſe Sprachröhre haben ohne Zweifel einen groſſen Nutzen zur See und zu Lande. Auſſer dem, was unſer Herr Verfaſſer anführt, werden auch die Ruderknechte in einem Schiffe dadurch regiert; auch geben Admiräle dadurch den zerſtreuten Schiffen

Gründe der Erfahrung. 1) Die Stimme oder die Rede wird um deſto deutlicher gehöret, um je gerader ſie gegen den Ort, wo ſie verſtanden werden ſoll, gerichtet iſt.

2) Eine Stimme breitet ſich um deſto weniger in der Runde herum aus, um je gröſſere Stärke ſie beſitzet, ſich gegen den Ort zu bewegen, gegen welchen man ſie fortpflanzen läßt.

3) Um je mehr die Röhren, durch welche die Stimme gehet, innerhalb geebnet ſind, oder je weniger Ungleichheiten ſie haben, um deſto leichter pflanzet ſich die Stimme in die Weite fort.

4) Die Stimme, die durch ein Rohr gehet, welches immer enger wird, breitet ſich nicht ſo ſehr aus und pflanzet ſich nicht ſo weit fort, als wenn ſie durch eine Röhre geht, die ſich nach und nach immer erweitert. Die elaſtiſchen Theile der Luft, die in einen kleinern Raum gebracht ſind, worin ſie ſich nicht ausbreiten können und zu ſehr gedrängt ſind, verlieren viel von ihrer Würkſamkeit (*). Folglich muß der Schall oder die Stimme die Lebhaſtigkeit verlieren und einen kleinern Weg durchlaufen. Grade umgekehrt iſt es, wenn ſie durch Röhren geht, die immer weiter werden.

§. 151.

Schiffen Befehle. Man hat deswegen heut zu Tage auf allen engliſchen und rußiſchen auch auf andern Schiffen ſolche kleine Sprachröhre. Sie dienen auch bey Belagerungen, Schlachten, auch kan man von einem Landhauſe den Arbeitern auf dem Felde mancherley Befehle mittheilen. B.

(*) Dieſes mögte wohl ein Grundſatz ſeyn, der wider die Erfahrung wäre. Man nehme die Verſuche mit den Hörröhren, oder die erſchreckliche Verſtärkung durch Trompeten und andern ſolchen Blasinſtrumenten; ſolten auch die elaſtiſchen Theile der Luft nicht vielleicht noch mehr geſpannt und folglich würkſamer werden? B.

§. 151.

Zuſatz. Aus den vorigen Gründen folget:

1) Daß das Mundſtück eines Sprachrohrs eines von denjenigen Stücken dieſes Inſtruments iſt, welches man mit der größten Sorgfalt bearbeiten muß. Es muß ſich ſo genau an den Mund anſchlieſſen, daß von dieſer Seite im Reden auch kein einziger Strahl der Luft verlohren gehe.

2) Das Hauptſtück des Sprachrohrs muß ſo viel es die Bequemlichkeit erlaubet, nicht aus ineinander geſteckten Röhren verfertiget ſeyn. Dieſes würde durch die daher entſtehenden Ungleichheiten der Fortpflanzung der Stimme hinderlich ſeyn.

3) Unter den zu dieſer Conſtruction tauglichen Materien muß man ſolche wählen, die am wenigſten klingend ſind, oder ſolche, deren Elaſticität am wenigſten zu erregen iſt (*). (Doch darf die Bequemlichkeit nicht zu ſehr darunter leiden) Denn die ſchallenden Körper verbreiten den Schall rund um ſich herum. Dieſes muß aber nothwendig der Fortpflanzung des Schalls gegen einen beſtimmten Ort ein Nachtheil erregen. Um alſo die Würkſamkeit der Federkraft der zu Sprachröhren tauglichen Materien zu verhindern, halte ich es für ſehr gut, die äuſſere Fläche dieſes Inſtruments mit einer Haut oder Leder

---

(*) Dieſe Meinung des Herrn Verfaſſers wird wohl nicht den Beyfall aller Naturkündiger erhalten. Vernunft und Erfahrung zeigen, daß die Urſache der Vermehrung des Schalls nicht allein darin zu ſuchen ſey, in welcher Lage gegen einander die Schallſtrahlen ſich fortpflanzen, ſondern daß durch die Elaſticität des Körpers, woran die Schallſtrahlen ſtoſſen, der Schall ungemein vermehrt werden müſſe. Man leſe folgende Werke darüber nach, die meiſtens meine Behauptung beſtätigen. *Cour de Phyſique Experim. par Deſaguliers Tom. II. Graveſands Phyſ. Elementa math. T. II.* Muſchenbroeck Phyſick §. 1166. Nollets Vorleſungen über die Naturlehre 11te Vorleſung. von Wolfs Verſuche III. Band Cap. II. Krafts *Praelect. Phyſ.* III. B.

der oder Chagrin zu überziehen, welche die Schwingungen der kleinſten Theile aufhielte oder unterdrückte.

Ich werde in der Folge die Schalllinie (Ligne Vocale) oder den Schallſtrahl (Rayon ſonore) eine jede Linie oder gleichſam Faden der Luft nennen, nach welcher die Stimme ſich fortpflanzt. Was die geometriſche Figur des Sprachrohrs anbetrift, ſo müſſen dadurch die Schalllinien eine ſolche Richtung bekommen, daß ſie ſich ſo wenig als möglich, durchkreutzen, und daß ſie folglich eine Neigung erhalten, ſich nach parallelen Richtungslinien zu bewegen. Hierdurch werden ſie insgeſammt auf das vollkommſte nach dem Orte hingehen, in welchem man ſie hören ſoll.

§. 152.

Erſter Hauptſatz Ein Sprachrohr von Cylindriſcher oder kegelförmiger Geſtalt, wie man es gemeiniglich verfertigt, hat nicht die größte mögliche Vollkommenheit (§. 33. 34)

Beweis. Es ſey AA das Mundſtück des Sprachrohrs; BC. Das Hauptſtück; CD der Flügel deſſelben; O*x* deſſen Axe. O der Punkt des Mundſtücks, wovon die Linien OF und OL auslaufen ſollen. Nun beweiſet es die Erfahrung, daß ein Strahl der Luft, welcher von einem Punkte ausfährt oder der durch eine ſehr enge Oefnung gehet, ſich in Form eines Büſchels ausbreite, wenn er kein Hinderniß findet. Folglich werden ſich die mehrſten Schalllinien OF, OL an die innern Wände der Röhre BC anſtoſſen und ſich nach dem Anſtoſſen ſo reflectiren, daß der Reflexionswinkel allemal dem Einfallswinkel gleich ſey. Dieſes iſt das bekannte Catoptriſche Geſetz. Nun behaupte ich aber, daß in einem cylindriſchen Sprachrohre (Fig. 33.) es nicht möglich ſey, daß die reflectirten Linien mit der Axe O*x* parallel werden, wie ſie es doch ſeyn ſolten, um ſich auf einerley Art

zu bewegen. Denn es iſt evident, daß wenn ſie parallel mit der Axe ſeyn ſolten, ſie an der mit der Axe parallellaufenden Wand BC herunter gleiten müßten, wenn ſie auf dieſelbe aufgefallen ſind. Dieſes kan aber niemals geſchehen, denn der ſtumpfe Reflexionswinkel OLC kan ſolchergeſtalt niemals den Einfallswinkel OLB gleich ſeyn.

Ja, man würde nicht einmal einen Reflexionswinkel haben, weil die Schalllinie OL, die an der Wand BC hinſtreicht, ſich nicht vor der Seite des Hauptſtücks des Inſtruments entfernen würde. Folglich — — — —

Es iſt eben ſo leicht, auch bey Sprachröhren von Kegelförmiger Geſtalt zu beweiſen (Fig. 34) daß die reflectirte Linien F*s*, L*t* mit der Axe O*x* nicht parallel ſeyn können. Sie würden ſonſt auch unter ſich parallel ſeyn; und wäre dieſes, ſo würden auch die Reflexionswinkel *t*LC und *s*FC unter einander ſich gleich ſeyn; folglich würden die Einfallswinkel OFB und OLB es auch ſeyn. Dieſes iſt aber unmöglich (Geometrie) Folglich — — —

§. 153.

Anmerkung. Ob ich gleich die kegelförmige Figur nicht für die vortheilhafteſte in Anſehung der Verfertigung der Sprachröhre halte, ſo glaube ich doch nichts deſtoweniger, daß ſie der cylindriſchen vorzuziehen ſey: weil, wenn alle Sachen ſonſt gleich ſind, die reflectirten Linien in der kegelförmigen mehr unter ſich parallel werden, als in der cylindriſchen. Dieſes iſt leicht zu erweiſen. Dadurch ſind ſie aber dem Hin- und Herwerfen in den Hauptſtücke nicht ſo ſehr unterworfen und folglich werden die Modificationen, die der Mund ihnen einmal eingedrückt hat, beſſer erhalten und fortgepflanzt.

Man muß nämlich dieſes immer vor Augen haben, daß es nicht blos darauf ankomme, einen Lerm mit dem Sprach-

rohr

rohr zu machen, ſondern artikulirte Töne und zwar mit dem nämlichen Eindruck, den ſie vom Munde erhalten haben, fortzupflanzen. Man wird unten ſehen, warum eine Kanone, Trompete, ein Waldhorn, eine Trommel, eine Glocke ꝛc. viel weiter gehört werden, als ein Sprachrohr, ohne daß ſie zum Fortpflanzen der Worte und der artikulirten Töne dienen können.

§. 154.

Zweyter Hauptſatz. Die vortheilhafteſte Conſtruction eines einfachen Sprachrohrs, deſſen Hauptſtück nur nach einer einzigen Figur gemacht iſt, iſt dieſe, daß man demſelben die Geſtalt einer Paraboloide gäbe, deren Brennpunkt in dem Mundſtück und juſt da iſt, wo man redet. Alsdenn können die articulirten Töne durch dieſen Brennpunkt, ſo viel möglich iſt, gehen (Fig. 35).

Beweis. Alle Schalllinien OF, OC, oder die mehrſten von ihnen werden nach unſerer Vorausſetzung aus dem Brennpunkt kommen. Sie werden ſich daher nach ihrem Auffallen auf die Paraboloide mit ihrer Axe Ox parallel reflectiren (§. 72); folglich werden ſie alle nach einerley Gegend ſich bewegen, um eine gemeinſchaftliche Würkung hervorzubringen. Dadurch erhält das Sprachrohr die möglichſte Vollkommenheit.

§. 155.

Erſte Anmerkung. Da auch noch andere Urſachen auſſer der Figur da ſeyn können, welche zur Verſtärkung des Sprachrohrs etwas beytragen, ſo iſt wohl zu bemerken, daß unſere Behauptung ſich hier darauf einſchränket, zu beweiſen, daß ein einfaches Sprachrohr, was ſeine geometriſche Figur anbetrift, eine Paraboloide ſeyn müſſe, oder, daß man unter einerley Umſtänden bey jeder andern Conſtruction keinen ſo groſſen Vortheil haben würde.

§. 156.

Zweyte Anmerkung. Es iſt ein ſehr groſſer Unterſchied zwiſchen dem, wie die Luft in einem Sprachrohr und zwiſchen dem, wie ſie in einem Horn oder Trompete modificirt wird. Es geſchiehet hauptſächlich vermöge der Federkraft ihrer eigenen Materie, die die Luft durch ſehr ſchnelle, ſehr gedrungene, ſehr heftige Schwingungen ſtöſſet, daß dieſe Inſtrumente ſo weit gehört werden können. Eben ſo muß die Luft, wenn man auf dieſen Inſtrumenten bläßt, nothwendig mit einer groſſen Geſchwindigkeit ſich bewegen; die Materie der Sprachröhre aber darf nicht ſchallend ſeyn (§. 151) weil dadurch

1) nothwendig eine Veränderung in den Schwingungen der kleinſten Theile derſelben vorgehen müßte; es würde folglich das Hauptſtück des Inſtruments beſtändig ſeine Figur verändern. Dieſes würde aber nothwendig die Regularität in der Reflexion der Schalllinien hindern (*).

2) Weil man mit einer gewiſſen gemäßigten Stimme reden muß, damit man die Worte deutlich unterſcheiden könne. Hieraus erkennet man, daß wenn man auch nahe genug wäre, niemand uns würde verſtehen können, wenn man durch ein Waldhorn oder Trompete redet. Durch ein Sprachrohr verſteht man uns aber.

Man wird weiter unten ſehen, daß wenn man eine Ellypſoide mit einer Paraboloide verbindet, der Effect des Sprachrohrs viel kräftiger werden könne. Allein dieſes iſt ein zuſammen geſetztes Inſtrument. Hier aber haben wir es nur mit den einfachen zu thun.

Abhand-

(*) Dieſe Behauptung wird, durch die Erfahrung meiner Meinung nach ſattſam widerleget. Man leſe auſſer den vorhin angeführten Büchern auch des gelehrten und würdigen Herrn Silberſchlags in Berlin ſeine Kloſtervergiſche Verſuche. B.

Abhandlung
von der Erfindung der Sprachröhre.

Ob wir gleich von den Alten weder eine Theorie noch Praxis von der Verfertigung der Sprachröhre bekommen haben, ſo muß man doch bekennen, daß dieſe Erfindung in dem vorigen Jahrhundert nur wieder erneuert iſt. Der Pater Kircher, ein Jeſuit, ſagt S. 132. ſeiner Phonurgie, daß, wie er in der Vaticaniſchen Bibliotheck zu Rom allerley aufgeſucht habe, er ein Buch gefunden habe, welches folgenden Tittel hatte: *Secreta Ariſtotelis ad Alexandrum M.* Geheimniſſe des Ariſtotels, die an Alexander den Groſſen gewidmet und überſchicket ſind. Hierin wird unter andern auch von einem ſehr wunderbaren Horn, (Fig. 32) welches dieſer groſſe Feldherr gebraucht haben ſoll, geredet. Der Ton deſſelben war ſo ſtark, daß man ihn bey ſeiner ganzen Armee verſtehen konnte, und daß er ſein Heer dadurch verſammlete, wenn es auch in der Ründe um ſeinem Hauptlager auf 100 Stadien zerſtreuet war. Der Pater Kircher rechnet 8 Stadien auf 1 italiäniſche Meile. Folglich machen 100 Stadien 12½ italiäniſche Meilen, daß iſt eine Weite von 6 franzöſiſchen Meilen. Ich weiß nicht, ob wir ſolche ſtarke Sprachröhre haben. Es hatte 5 Cubitus oder 15 Palmen zum Diamerer. Nimmt man 1 Cubitus für 1½ Schuh, ſo wird der Diameter 7½ Schuh ſeyn. Dieſes macht eine ungemeine Gröſſe für ein ſolches Inſtrument aus. Hier ſind die Worte dieſes ſinnreichen und gelehrten Jeſuiten ſelbſt: *ubi, inter caetera, de cornu prodigioſo Alexandri magni haec leguntur: faciebat hoc cornu adeo vehementem ſonum, vt eo exercitum ſuum ad centum ſtadia (quorum 8 vnum milliare Italicum conficiunt) diſperſum convocaſſe*

vocaſſe prohibentur: habebat autem, vt libellus monſtrat, quinque cubitos in Diametro.

Ohngeachtet dieſes Zeugniſſes gab der Ritter Morland, ein Engländer, im Jahr 1670 oder 71, als wäre er der Erfinder geweſen, einen Tractat über die Verfertigung verſchiedener Sprachröhren heraus (*). Ich habe in demſelben gar keine Theorie gefunden, auſſer einigen, wie mich dünkt, unbeſtimmten Riſonnements über die Art, wie die Luft, während ihres Durchgehens durch dieſes Inſtrument, ihre Federkraft anwende. Hätte der Engländer nur der erſte ſeyn wollen, der ihren Gebrauch von neuem bekannt machen wolte, ſo könnte man ihm einen Theil der Ehre, die man den erſten Erfindern ſchuldig iſt, zugeſtehen. Ohngeachtet das wahre Genie ſich Mittel vorſtellet, die noch nicht in dem Verſtande ſeiner Vorgänger geweſen ſind, oder deren vorige Erfindung nicht zu ſeiner Kenntniß gekommen iſt; ſo heißt es doch gewiſſermaſſen eine ganz neue Entdeckung machen, wenn man das verlohrne wieder erfindet. Allein der Ritter Morland iſt bey weitem nicht in einer ſo vortheilhaften Lage und der Pater Kircher hat ſich mit den ſtärkſten Gründen über die unrechtmäßige Beſitzung, die ſich dieſer Engländer anmaßte, beſchwert. Es iſt auſſer allem Zweifel, daß dieſe Ehre dieſem berühmten Jeſuiten gehöre. Schlaget ſein bekanntes Werk, *Ars magna lucis & umbrae*, auf, welches zu Rom 1646 gedruckt iſt, ſo werdet ihr daſelbſt finden, daß mehr als 24 Jahr vor der Bekanntmachung des Tractats des Ritter Morlands der Pater Kircher ein kegelförmiges Sprachrohr verfertiget habe, das 21 Palmen in der Länge und deſſen Ablauf oder Flügel 3 Palmen und das Mundſtück $\frac{1}{4}$ Palme hatte; Daß dieſer groſſe Phyſicker ſich deſſelben bediente, um mit dem Thürhüter des Collegiums zu Rom zu reden, und dadurch die Antwort wie-

(*) Dieſes Buch heißt: *Account of the Speaking Trompet.* B.

der zu hören. Dieſes iſt in einem andern ſeiner Werke, welches er *Muſurgia* nennet, beſtätiget. Es iſt dieſes ein ſehr curiöſer Tractat von der Muſick. Er erklärt ſich ausdrücklich über dieſen Diebſtahl auf der 112ten Seite ſeiner **Phonurgie**, die im Jahr 1673 gedruckt iſt, Man lieſet daſelbſt, daß 24 Jahr vorher, ehe der **Ritter Morland** ſeinen Tractat von den Sprachröhren bekannt gemacht habe, ein Sprachrohr von ſeiner Erfindung gemacht worden ſey, und daß eine groſſe Anzahl Menſchen dieſes Inſtrument im **Jeſuitercollegium** zu Rom geſehen habe. Wenn man ſich ſelbſt die Mühe nimmt, die verſchiedenen Streitſchriften, die deswegen heraus gekommen ſind, zu unterſuchen, ſo wird man finden, daß der gelehrte Diebſtahl des engliſchen Verfaſſers gänzlich bewieſen ſey, und daß ſeine Arbeit ſelbſt, wenn man ihn auch nicht weiter als Erfinder betrachtet, weit unter der Abhandlung des **Pater Kirchers** ſey (*).

Uebrigens

(*) Ob Morland oder Kircher der wahre Erfinder der Sprachröhren zu nennen ſey, iſt, wie ich glaube, durch die vom Herrn Verfaſſer angeführten Gründe noch nicht entſchieden. Was 1) dieſes anbetrift, daß ſchon Alexander der Groſſe ein ſolches Inſtrument ſoll beſeſſen haben, ſo iſt das Zeugniß, welches man aus dem Kircher anführt, nichts weniger als beweiſend. Wo ſteht denn ein Wort davon, daß dadurch articulirte Töne wären gehöret worden? Es heißt, Alexander habe auf 100 Stadien ſein Heer durch den heftigen Ton deſſelben zuſammen gerufen. Konnte dieſes nicht durch den bloſſen Schall geſchehen, und waren eben Worte dazu nöthig? Ruft man nicht heut zu Tage hundertmal Soldaten durch einen Kanonenſchuß zuſammen und commandirt ſie ſogar dadurch? Man verſteht uns durch einen ſolchen Schall, ohne daß wir unſre Gedanken durch articulirte Töne entdeckten. 2) Es iſt eben ſo wenig ausgemacht, daß Morland ſich mit Federn geſchmücket habe, die er dem lieben Pater Kircher ausrupfte. Materie und Form ſcheint mir in dieſen Schlüſſen des Herrn Abts nicht die beſte zu ſeyn. Denn iſt es fürs erſte ſo gewiß, daß Kircher ein kegelförmiges Sprachrohr 24 Jahr vor dem

Ritter

Uebrigens würde dieſe Auseinanderſetzung ſehr gleichgültig ſeyn, wenn man nicht überzeugt wäre, daß die Achtung, wovon man ſich natürlicher Weiſe für die Urheber nützlicher Erfindungen durchdrungen findet, eine der größten Quellen des allgemeinen Wohls ſey.

§. 157.

Gebrauch der Parabel in Verfertigung der Hörröhren oder ſolcher Hörner, wodurch man die Fehler des Gehörs verbeſſern kan. Diejenigen, die ſchwer hören, oder die das, was man ein hartes Gehör nennet, beſitzen, können ihre Zuflucht zu einem Horn nehmen, deſſen Hauptſtück die Form eines paraboliſchen Afterkegels hat (§. 36). Es kommt nur darauf an, dem Trommelfell eine Bewegung zu geben, die ſtärker als die gewöhnliche iſt. Wenn der Brennpunkt F dieſes Horns an der Oeffnung oder nahe bey der Windrohr G, das heißt, bey der kleinen

Ritter Morland bekannt gemacht habe? Es giebt groſſe Gelehrte, die ſehr daran zweifeln. Man will nur etwas von Cylindriſchen Röhren wiſſen, die im eigentlichſten Verſtande noch nicht einmal den Namen von Sprachröhren verdienen. Wenn ſich nun 2tens Kircher gleich über einem geſchehenem Diebſtahl des Morlands beklagte, iſt er deswegen unſtreitig geſchehen? „Ja! Kircher hatte 24 Jahr vorher ſeine Erfindung bekannt gemacht" —— Wie? wenn Morland ſie nicht geleſen hätte? Von Italien bis Engelland iſt ein ſtarker Sprung: nnd iſt es nicht gar wohl möglich, daß verſchiedene Männer auf einerley Einfall kommen? Der Herr Verfaſſer gebraucht dieſes ſelbſt gar vortheilhaft in der Carteſianiſchen Erfindung des Geſetzes der Strahlenbrechung. Warum ſoll man Morland nicht ein gleiches Recht wiederfahren laſſen? Wie ſieht es alſo um dieſe Art zu ſchlieſſen aus? Morland hätte die Schrift des Kirchers leſen können; folglich hat er ſie geleſen. Er hätte ſeine Erfindung der Zeit nach vom Kircher borgen können; folglich hat er ſie würklich geborget. Der Herr Verfaſſer wird es mir alſo vergeben, daß mich ſein hiſtoriſcher Beweis dieſesmal nicht überzeuge. B.

krummen Röhre lieget, die man ins äuſſere Ohr ſetzet; und wenn man das Horn gegen diejenige Seite richtet, von welcher man etwas hören will, ſo werden alsdenn alle Schalllinien als AB, CD, welche an den innern Wänden mit der Axe OF parallel anſtoſſen, in den Brennpunkt F reflectirt werden (§. 81.) Sie werden alſo in dieſem Punkte viel dichter ſeyn, als irgend wo anders. Auf dieſe Art werden ſie hauptſächlich ihre Schnellkraft gegen die Seite G verwenden, wo ſie den wenigſten Widerſtand haben. Denn gegen die andere Seite ſetzet die Bewegung der Stimme ihnen ein Hinderniß. Sie werden alſo mit einer mehr als gewöhnlichen Heftigkeit längſt der Röhre G hinunter fahren und das Trommelfell ſtärker in Bewegung ſetzen. Es iſt dieſes eines von den Theilen des Ohrs, welches die zitternde Bewegung der Luft, die bekanntermaſſen die Urſache des Schalls iſt zu oem Innern des Gehörs fortpflanzt.

§. 159.

Gebrauch der Parabel in der Verfertigung der Brennſpiegel. Richtet die Axe einer hohlen Paraboloide, deren innere Wände wohl geglättet und polirt ſind ungefehr gegen den Mittelpunkt der Sonne (§. 37). Wenn dieſer hohle Körper auch nur von Papier oder Pappdeckel gemacht iſt, ſo wird dadurch dennoch eine ſo groſſe Anzahl von Strahlen das Innere dieſes Inſtrumens mit der Axe parallel oder doch faſt parallel anſtoſſen (*a*) daß die Vereinigung derſelben in den Brennpunkt

(*a*) Die Lichtſtrahlen, die von einem ſehr entfernten Punkt auf eine kleine Oberfläche fallen, ſind in Betracht der Entfernung von dem leuchtenden Punkt ſinnlich parallel. Um dieſes leicht zu begreifen, ſtellet euch einen Büſchel von Lichtſtrahlen vor, die von dem leuchtenden Punkt G auslaufen (Fig. D. Platte 3.), und die zwiſchen den Linien GA, GC eingeſchloſſen ſind, und den merklichen Winkel AGC machen. Dieſe ſind nun nicht parallel. Wenn man aber die Seite

punkt F eine ſo groſſe Hitze verurſachen wird, daß brennbare Materien ſich entzünden werden. Die Erfahrung ſtimmet hiemit vollkommen überein.

§. 159.

Anmerkung. Da der Brennpunkt F einer Paraboloide oder der erzeugenden Parabel ziemlich nahe bey dem Scheitelpunkt H ſich befindet, wenn der Parameter von einer mittelmäßigen Gröſſe iſt, weil der Brennpunkt nur um den 4ten Theil des Parameters vom Scheitſpunkt entfernt iſt (§. 78), ſo muß man einen Theil dieſes Körpers z. E. GHT herunter ſchneiden, um ſich dem Brennpunkte F bequem von der Seite H nähern zu können, oder wenn dieſer Brennpunkt auſſer dem Spiegel fallen ſoll. Nun werden die noch übrigen Lichtſtrahlen in einem Punkt F verſammlet, der auſſerhalb

 der

Seite G bis nach H zurückſetzet, ſo wird der Winkel AGC in den Winkel AHC verwandelt, da die Baſis AC die nämliche bleibt, Nun iſt dieſer Winkel viel kleiner, als damals, wie die Spitze noch in G war. Dieſes iſt ſehr leicht zu beweiſen, wenn man die Linie HGB ziehet. Wenn man ſolchergeſtalt die Spitze H immer weiter von der Baſis entfernet, ſo wird der Winkel AHC immer kleiner und folglich endlich ſo klein werden, daß er in Betracht der Winkel HAC und HCA für nichts zu achten iſt. Folglich werden dieſe Winkel alsdenn beynahe 2 rechte Winkel ausmachen. Wenn man folglich HA und HC von einerley oder faſt von gleicher Gröſſe annimmt, ſo wird der Winkel HAC vollkommen oder beynahe ſo groß ſeyn, als der Winkel HCA; folglich wird keiner von beyden merklich von einem rechten Winkel verſchieden ſeyn, und die Linien AH und CH ſind dem Augenſchein nach auf AC perpendiculair. Nun ſind aber 2 Linien, die auf einerley Linie perpendiculair ſtehen, unter einander parallel. Wenn folglich die Baſis AC ſehr klein und die Entfernung BH ſehr groß iſt, ſo werden die Strahlen AH und CH die gegen die Spitze H zulaufen, ſich auch in einer groſſen Weite nicht merklich von der parallelen Lage entfernen.

der Höhlung deſſelben iſt; man erkennet aber auch zugleich, daß der Brennpunkt von ſeiner Stärke verliere.

Inzwiſchen kan der Brennpunkt einer Paraboloide dennoch eine beliebige Entfernung von dem Scheitelpunkt dieſes Körpers bekommen. Denn man kann den Parameter von einer beliebigen Gröſſe annehmen. Folglich wird auch der 4te Theil deſſelben, welcher immer die Entfernung des Brennpunkts iſt, von beliebiger Gröſſe ſeyn können. Iſt aber dieſe Entfernung zu groß, ſo hört der Brennpunkt auf brennend zu ſeyn. Weil Erfahrung und Vernunftſchlüſſe zeigen, daß das reflectirte Licht nach und nach, ſo, wie es ſich von den reflectirten Punkten entfernet, ſeine Stärke verliere. Es ſchwimmet in der That eine ſo groſſe Menge kleiner veſter Körperchen zu aller Zeit in der Luft, daß ſie einen Theil der Strahlen, woraus ein Büſchel Licht beſteht, zurück ſtoſſen. Wenn dieſer reflectirte Büſchel eine groſſe Weite zu durchlaufen hat, ſo wird er immer ſchwächer und behält am Ende nur noch eine unmerkliche Hitze.

§. 160.

Wenn dieſes Uebel nicht wäre, ſo könnte man durch eine hohle Paraboloide einen brennenden Punkt in eine brennende Linie von unbeſtimmter Länge verwandeln, das heißt, man könnte brennende Körper in jeder Diſtanz anzünden. Man dürfte nur einen ſehr ſchmalen paraboliſchen Spiegel B (Fig. 38) ſo ſtellen, daß er mit dem viel gröſſern paraboliſchen Spiegel A einerley Brennpunkt F hatte. Denn nun muß ſich nothwendig die dicke cylindriſche Maſſe von Lichtſtrahlen RR, die nach dem Brennpunkt F der abgekürzten Paraboloide A reflectirt worden ſind, (§ 81) hernach jenſeits dieſes Brennpunkts gegen B in divergirende Strahlen vertheilen. Dieſe werden auf die innern Wände des Spiegels B fallen und in *rr* mit einander parallel werden (§. 82). Da man aber dieſe kleine Paraboloide als ſehr ſchmahl angenom-

nommen hat, ſo werden die Lichtſtrahlen einen ſehr dichten cylindriſchen Büſchel von Licht ausmachen und alſo in einer ſehr weiten Entfernung brennbare Körper entzünden können. Der Brennpunkt wird gewiſſermaſſen in allen Punkten dieſer ſtrahlenden Linie von unbeſtimmter Länge ſeyn. Dieſe Würkung aber, die man beym erſten Anblick natürlicher Weiſe vermuthet, wird durch die phyſiſche Urſachen, die wir angeführet haben, zerſtöhret (§. 159). Wir rechnen nicht einmal, daß die Vielheit der Reflexionen die Stärke des Lichts ſchwächet, und daß die parallelen Lichtſtrahlen niemals ſo viele Stärke zum Brennen haben können, als wenn ſie in einem Brennpunkt vereiniget wären (*).

§. 161.

Wenn man die Flamme eines Wachsſtocks oder eines Lichts in dem Brennpunkt einer hohlen Paroboloide ſtellet (Fig. 37), deren innere Wände nach Möglichkeit eben gemacht und vergoldet ſind; wenn man darauf dieſen Spiegel in eine Laterne ſetzet, ſo wird dadurch die ganze Laterne gleichſam brennend erſcheinen, und das Licht des Wachsſtocks wird auf eine groſſe Weite und mit einer ſolchen Stärke reflectirt und fortgepflanzt werden, daß man dabey leſen könnte.

Die Urſache davon iſt dieſe, weil die Lichtſtrahlen, welche durch den Brennpunkt F gehen bey dem Auffallen auf die hohle Fläche der Parabel mit der Axe parallel reflectirt werden

(*) Man ſehe hiervon des Pater Kirchers *Magiam catoptric Libr. X. Pars III. Kolhanſii Optic p 175. Kepleri Dioptr. p.* 56 und 106. Man hat ſich auch bemühet, Spiegel zu erfinden, die ſich ſelbſt verbrennen. Die Conſtruction derſelben giebt man auf folgende Art an. Es ſey (Fig. 37) DHN ein paraboliſcher Spiegel und in F der Brennpunkt deſſelben. Man ſchneide das Stück LHK herunter und ſetze ſtatt deſſelben einen ebenen Boden LK hinein, auf welchen der Brennpunkt falle, ſo wird ſich der Spiegel ſelbſt verbrennen. B.

den (§. 82) und folglich einen Lichtcylinder bilden, der ſich grade zu auf eine groſſe Entfernung mit einiger Kraft fortpflanzt, wenn gleich nur ein kleiner Theil der Flamme des Wachsſtocks vollkommen in dem Brennpunkt F iſt. Auch der Pater Tacquet hat im 3ten Buch ſeiner Catoptrik verſichert, daß man allein durch Hülfe eines ſolchen Spiegels im Stande ſey, auf 400 Schuh weit vom Spiegel ein Buch mit kleiner Schrift zu leſen, wenn die Flamme des Wachsſtocks im Brennpunkte ſtehet.

§. 162.

Anmerkung. Dieſe Arten von Laternen ſollen hauptſächlich das Licht im Tragen grade vorwärts fortpflanzen. Die Wände, die den Spiegel einſchlieſſen, müſſen mit dem Horizonte parallel laufen. Das übrige iſt, wie gewöhnlich.

§. 163.

Auch wäre es viel vortheilhafter, wenn man den innern Flächen der Wände eines Kamins eine paraboliſche Geſtalt gäbe. Damit dieſes aber von den Arbeitsleuten mit Bequemlichkeit geſchehen könnte, ſo müßte der Baumeiſter einen Arm von einer Parabel, deren Länge ein Verhältniß gegen die Tiefe des Kamins hätte, geometriſch auf ein Brett zeichnen. Nur müßte er dahin ſehen, daß der Brennpunkt dieſer krummen Linie gegen die Mitte des Heerdes falle. Dieſes wäre ſehr leicht, wenn er dem Parameter oder der doppelten Ordinate LK am Brennpunkte (§. 93) eine Länge gäbe die der Breite des Kamins gleich wäre. Dieſes würde eine Art von Modell ſeyn, deſſen die Maurer in ihrer Conſtruction ſich bedienen könnten. Solche Kamine würden ohne Zweifel dadurch auf eine viel vortheilhaftere Art ein Zimmer erwärmen. Denn der Brennpunkt dieſer erzeugenden Parabel wäre in der ganzen Höhe von 3 bis 4 Schuh, die ſich über die Mitte des Heerdes erhebt,

hebt. Es würde alsdenn die Flamme oder alle vom Feuer durchdrungene Körperchen, die in dieſer Brennlinie ja ſelbſt um derſelben herum ſich befinden, ihre Hitze oder ihre kleine Feuertheilchen nach den Linien FL und FG — — gegen die paraboliſche Wände richten, und von da müßten ſie bekanntermaſſen nach den Richtungslinien LR, die mit der Axe HO vollkommen oder doch beynahe parallel ſind reflectirt werden (§. 82), folglich würden ſie accurat ins Zimmer zurück geworfen werden. Sie würden ſich alſomit den directen Lichtſtrahlen vereinigen und man müßte viel weniger Holz und Zeit gebrauchen, daſelbſt eine mäßige Wärme hervor zu bringen. Denn bey der gewöhnlichen Conſtruction wird ein groſſer Theil der Feuerſtrahlen in ſich ſelbſt oder in den Kamin zurück geworfen und von dem beſtändigen Storm der Luft, der ſich, ſo bald das Feuer angezündet iſt, dahin ſtürzt, ſogleich weggeführet.

Will man noch ſparſamer und haushältiſcher ſeyn und bey einerley Koſten einen beliebigen Grad der Wärme hervor bringen, ſo ſetze man eben ſo, wie man Waſſer durch Röhren und Hähne führet, grade unter dem Heerde zwiſchen den Balken und Steinen ein Behältniß oder Becken: von Luft einen Quadratſchuh groß und nach Umſtänden 3 bis 4 Schuh tief. Durch die Seitenflächen dieſes Behältniſſes müßten 2 Röhren gehen, die man zwiſchen den Balken und dem Pflaſter bis gegen die Mitte der Mauer, die an beyden Seiten daran ſtößt durchlaufen ließ. Endlich müßte bey ihrem Ausgange ein Hahn angebracht werden, wovon wir den Gebrauch ſogleich ſehen werden.

Seitdem man das terreſtriſche Feuer mit Verſtand zu gebrauchen angefangen hat, weiß man, daß die Wärme deſſelben mehr unterwärts als oberwärts gehe. Daß ſie ſich mehr herunter ziehe, als ſteige, oder daß ſie wenigſtens mehr darzu beſtimmt ſey. Folglich wird die Hitze des Heerds ſehr ſchnell bis zu dem Be-

cken hindringen; ſie wird die daſelbſt enthaltene Luft erwärmen, ſie verdünnen und ſie ſpecifiſch leichter machen, als eine nämliche Menge unverdünnter oder in ihrem ordentlichen Zuſtand ſich befindenden Luft. Die äuſſere Luft wird ſich folglich in die offene Röhren hinein ſtürzen, und wenn ſie in das Behältniß kömmt, die daſelbſt erwärmte Luft wegjagen, um ſelbſt bald darauf von einer ſtärkern Luft wieder heraus getrieben zu werden. Man wird daher einen beſtändigen Umlauf der Luft bekommen, die in dem Behältniſſe erwärmet iſt, und nun ihre Wärme mit ins Zimmer bringt. Folglich muß daſſelbe in kurzer Zeit einen hinreichenden Grad der Wärme bekommen. So bald man nun auf einem Thermometer oder ſonſt bemerkt, daß es denjenigen Grad der Wärme, die der Geſundheit am zuträglichſten oder zu einem andern erforderlichen Bedürfniſſe hinlänglich iſt, erreichet hat, ſo ſchließt man den Hahn zu, um es beynahe in dieſem Zuſtande zu erhalten. So wird daher die untere Wärme, die ohne dieſes Kunſtſtück faſt gänzlich verlohren geht, die vornehmſte Quelle der benöthigten Wärme werden.

§. 164.

Weil die Licht- oder Feuerſtrahlen FH (Fig. 39), die durch den Brennpunkt F einer hohlen Paraboloide gehen, mit ihrer Axe FG parallel reflectirt werden (§. 82), ſo iſt es offenbar, daß dieſe Strahlen, die ſolchergeſtalt auf die hohle Oberfläche einer andern Paraboloide OLS fallen, deren Axe GF und Brennpunkt G in einerley Linie mit der Axe und dem Brennpunkt des erſten Spiegels lieget; es iſt offenbar ſage ich, daß dieſe zum 2ten mal reflectirte Strahlen LG ſich wieder in dem Brennpunkt G vereinigen werden (§. 81) und folglich daſelbſt brennbare Körper entzünden können.

Dieſe Theorie iſt durch ſehr viele Verſuche beſtätigt. Herr **Du Fay**, Mitglied der Königl. Akademie der Wiſſenſchaften zu Paris, erfuhr, daß man einen glücklichen Verſuch

davon

davon zu Prag gemacht habe; er nahm ſich daher vor, ihn zu Paris zu wiederhohlen. Es geſchahe dieſes würklich in Gegenwart des Herrn Mairans. Dieſer Gelehrte war ein Mitglied und ehemaliger Secretair dieſer nämlichen Akademie, und ich habe aus dem Munde dieſes berühmten Mannes ſelbſt folgende Nachricht erhalten. Im Jahr 1726 ſezte man nach Anleitung der 39ten Figur 2 hohle paraboliſche Spiegel 6 Schuh weit von einander. In einem der Brennpunkte F legte man glüende Kohlen, und in dem andern Brennpunkt G Schießpulver. Darauf ließ man in dem Brennpunkt F einen Blasbalg gehen, um die Kohlen anzublaſen und man ſahe in kurzer Zeit das Pulver in G Feuer fangen. Dieſes alles begreift man beym erſten Anblick der Figur, wenn man ſich an die Theorie von dem Brennpunkt erinnert, den wir ſo oft erklärt haben (*).

§. 165.

(*) Dieſer Verſuch erfordert nach dem Zeugniſſe des Herrn Abbé Nollets keine groſſe Vollkommenheit der Spiegel. Es iſt auch nicht nöthig, daß die Spiegel juſt eine paraboliſche Krümmung haben. Zahn in ſeinem *Oculo artificiali p.* 753. erzählet, daß er von einem glaubwürdigen Manne erfahren habe, daß er in Wien einem Verſuche beygewohnet habe, bey welchem durch 2 ſphaeriſche hohle Spiegel in einer Weite von 20 Schuh brennbare Materien angezündet worden. So verſichert der Cavalieri in ſeinem Buche von den Kegelſchnitten im 27ten Capittel, daß er in dem Brennpunkt eines bleyernen kugelichten Hohlſpiegels glüende Kohlen gelegt, und die Strahlen mit einem andern paraboliſchen Spiegel, der aber ſo abgeſtuzt war, daß ſein Brennpunkt ſich hinter demſelben befand (§. 159) aufgefangen und ſolchergeſtalt brennbare Materien angezündet habe. Eben ſo wenig kommt es auf die Materie an, woraus dieſe Spiegel verfertiget werden. Herr Varing, der dieſes Kunſtſtück von den Jeſuiten zu Prag gelernet hatte, und von welchem es Herr Nollet empfieng, gebrauchte nur vergoldete hölzerne Spiegel. Herr Du Fay bediente ſich vergoldete Gipsſpiegel von 20 Zoll im Diameter und zündete damit guten Zunder auf 50 Schuh wei-

§. 165.

Der Pater Kircher erzählt in ſeiner Phonurgie einen Zug aus der Geſchichte, wo eine Handlung vorkommt, die viel curiöſer iſt, als das vorhergehende. Er hatſie, wie er ſagt, in der Geſchichte der Abyßinier des Johann Paez geleſen (*). Dieſer Geſchichtſchreiber erzählt, daß man durch einen groſſen paraboliſch ausgehölten Felſen auf 50 Schritte weit eine ſchwache Stimme, welche von einem weit entlegenen Orte herkam, habe hören können. Dieſem Felſen grade gegen über befindet ſich ein anderer, auf deſſen Spiße man ſehr deutlich alles, was ſehr entfernte Perſonen, ſo ſchwach als möglich reden, verſtehen kann. Schrie man daſelbſt, ſo würde man die vereinigte Stimmen eines ganzen Heeres zu hören glauben. Die Prieſter dieſes Landes haben den Nußen, den man von dieſer Art von Wundern ziehen konnte, ſehr wohl eingeſehen. Um dem Volke zu beweiſen, daß ſie unmittelbar mit der Gottheit in einer Verbindung ſtünden, lieſſen ſie diejenigen, die ſich bey ihnen Raths erhohlen wolten, auf die Spiße dieſes Felſens ſteigen; darauf redeten ſie mit einer ſehr ſchwachen Stimme von demjenigen Orte, der ihnen zu ihrer Abſicht am geſchickteſten ſchien, und dieſe Reden kamen als ein Widerhall in die Ohren der Rathfragenden. Dieſe bemerkten rund um ſich her keine ordentliche Urſache dieſer

---

weit an. Herr Abbé Nollet hat Spiegel von wohl geglätteten Kartenpapier verſilbern laſſen und ſie ſehr gut befunden. Doch hält er mit Recht vergoldete höher. Seine Spiegel waren ſphaeriſch und aus einer Kugel gemacht, deren Diameter 4 Schuh hatte. Der Spiegel hatte 18 Zoll im Diameter. B.

(*) Dieſer Name ſoll ohne Zweifel Peter Paez heiſſen, der in Abyßinien als Beichtvater des Kayſers geſtorben iſt und von den Irrthümern der Abyßiner geſchrieben hat. conf. Jöchers gelehrt. Lexic. B.

dieſer Würkung, und hielten ſich daher für würklich begeiſtert. Allein der Leſer ſiehet daraus, daß man durch ſolche Kunſtſtücke im Stande iſt Dinge zu verrichten, die für den gemeinen Mann erſtaunlich ſind.

Laſſet uns des Pacz eigene Worte anführen. Er ſetzet die Scene in das Gebürge von Goyam. — — *Eſt hiſce in montibus (Goyamae) rupes ingens ea naturae induſtria excavata ut ſpeculum remote aſpicientibus appareat. Huic alia rupes oppoſita, in cujus cacumine nil adeo ſubmiſſe a quantumvis remotis dici poſſit, quod non audiatur: clamantibus vero in dicto loco, ſonum adeo intendi, ut vox exercitus alicujus videatur. Norunt occultam reſonantis naturae vim ſacrificuli iſtius loci, qui ut ſe divinos demonſtrent, homines in cacumine montis poſitos occultis hujuſmodi vocibus de rebus futuris admonent; ii vero ſe numinis voce afflatos arbitrati, non raro in maximas calamitates devolvuntur, dum juſſa exequi inconſultius properant.*

Vorausgeſezt, daß die Sache wahr ſey, ſo glaube ich mit dem Pater Kircher, daß dieſes allein durch die Figur eines hohen ſphaeriſchen oder paraboliſchen Spiegels geſchehe, die die Natur dem erſtern Felſen gegeben hat, und wo der Brennpunkt des Spiegels ſich genau auf der Spitze des 2ten Felſens befindet. Durch eine ſolche Lage werden die mehreſten Schußſtrahlen RL (Fig. 37.) von dem hohlen Felſen wie in einem Punkt gegen den andern Felſen, auf deſſen Spitze ſich das Wunder zeigt, zurück geworfen (*).

* §. 166.

(*) Aehnliche curiöſe Echos findet man unter andern in den phyſiſchen Abhandlungen der Akademie zu Paris, vom Herrn von Steinwehr überſezt, im erſten Theile Seite 94 und

* §. 166.

Bisher iſt nur von hohlen paraboliſchen Spiegeln gezeiget worden, daß die durch den Brennpunkt gehende Strahlen mit der Axe parallel zurück geworfen werden. Allein man findet auch, daß der convexe paraboliſche Spiegel SaS (Fig. 40) die nämlichen Eigenſchaften habe, wenn die Strahlen rS die erhabene Fläche deſſelben in einer Richtungslinie berühren, die durch den Brennpunkt F gehen.

Um dieſes zu beweiſen, ziehe man durch einen beliebigen Punkt S die Tangente mt an die erzeugende Parabel (§. 30), durch dieſen nämlichen Punkt S laſſe man eine Linie dg gehen, die mit der Axe Fg parallel iſt, ſo wird man finden, daß der Einfallswinkel rSm dem Winkel FSt gleich ſey. Nun iſt der Winkel $FSt = dSm$ (§. 81) $= tSg$; folglich iſt $rSm = tSg$; folglich iſt dieſer Winkel FSt der Reflexionswinkel, das heißt, die Strahlen rS müſſen ſich nach den Linien Sg, die mit der Axe aF und folglich auch unter ſich parallel ſind, reflectiren (*a*).

* §. 167.

---

und folg. und im 3ten Theile Seite 779. In Muſchenbrocks Naturwiſſenſchaft vom Gottſched überſezt, in der Anmerkung zum §. 1161. In dem *Mercur de France* vom Jahr 1770 im Januar und in vielen andern Büchern. B.

(*a*) Bemerket, daß ein Strahl, der auf eine krummlinigte Fläche fällt, ſich ſo reflectire, als fiele er auf die Tangente dieſer krummlinigten Fläche, die durch den Einfallspunkt gezogen iſt. Denn, wenn man durch dieſen Punkt würklich eine Berührungsfläche gehen ließ, ſo würde man die Direction haben, die dieſe krumme Fläche in dieſem Punkt hat. Folglich würde man auch den Winkel haben, den dieſe Fläche mit einem daſelbſt einfallenden Lichtſtrahl machen würde. Anders kan man den Winkel nicht beſtimmen, welchen eine grade Linie mit einer krummen macht. Denn eine Tangente an einem Einfallspunkt iſt unveränderlich, und macht mit der krummen Linie einen Winkel der kleiner iſt, als irgend ein gradlinigter Winkel. Wenn man ſonſt den Winkel, welchen eine grade Linie macht, indem

* §. 167.

Gebrauch der Parabel in Verdoppelung des Würfels. Es kommt darauf an, 2 mittlere Proportionallinien zwiſchen der Seite AD des gegebenen Würfels und zwiſchen der Linie AC zu finden, die doppelt ſo groß iſt (*) (Fig. 41).

Nimmt

---

indem ſie auf eine krumme fällt, durch die Divergenz dieſer graden Linie mit einem Theil der krummen Linie ſchätzen wolte, ſo würde man keine Regel haben. Denn eine krumme Linie verändert in jedem Punkte ihre Direction. Folglich würde der Winkel kleiner oder gröſſer ſeyn, je nachdem man kleinern oder gröſſern Theil der krummen Linie für den Schenkel dieſes Winkels annähme.

(*) Die Aufgabe von der **Verdoppelung des Würfels** iſt von jeher unter den Geometern von groſſem Anſehen geweſen. Die Geſchichte dieſes Problems, die ohne Zweifel eine Erfindung eines Mathematickers geweſen, um dem Problem ein gewiſſes feyerliches Anſehen zu geben, iſt nach der Erzählung des Philopponus folgende. Es herrſchte in dem Athenienſiſchem Gebiete die Peſt auf eine erſchreckliche Art. Man ſchickte nach Delphos um den Apoll zu befragen, wie dieſes Uebel abgewendet werden könne? Er gab zur Antwort, daß er ihnen helfen würde, wenn man ſeinen Altar, der ein vollkommener Würfel war, ſo verdoppeln würde, daß er wieder ein richtiger Cubus ſey. Daher heißt dieſes Proplem das Delphiſche. Dieſes ſchien den Unwiſſenden eine Kleinigkeit zu ſeyn. Sie nahmen die Seite des Altars doppelt ſo groß und lieferten alſo einen 8mal ſo groſſen Würfel. Wie hierauf die Peſt noch nicht aufhören wolte, ſo ſchickten ſie aufs neue Geſandten zum Apoll. Er antwortete, man habe ſeiner Forderung keine Genüge gethan. Nun fieng man an zu vermuthen, daß mehr geheimnißvolles dahinter ſtäcke, und ſuchte die Hülfe der Geometer, die ſelbſt ſehr verlegen dabey waren. **Plato**, dieſer groſſe Mathematicker lehnte die Auflöſung von ſich ab, nach dem Zeugniß des **Valerius Maximus**, und ſchickte die Geſandten zum Eudoxus, nicht aber, wie er irrig vorgiebt zum Euclides, welcher um ein halbes Seculum ſpäter lebte. Die Geſchichte dieſes Problems wird vom Eratoſtenes auf eine andere eben ſo fabelhafte Weiſe erzählet. Doch worzu dieſes erdichtete! Iſt es

nicht

Nimmt man folglich AC für die Axe der zu beſchreibenden Parabel und AD für den Parameter an, ſo kan man

---

nicht glaublich, und ganz natürlich, daß denkende Geometer, da ſie ähnliche Flächen nach einem gegebenen Verhältniſſe vermehren konnten, daß ſie dieſes auch bey Körpern zu bewerkſtelligen werden gewünſchet haben? Nun wuſten ſie, daß ſich ähnliche Körper zu einander verhalten, wie die Würfel ihrer ähnlichen Seiten; folglich reducirten ſie die Aufgabe darauf, einen Cubus nach einem gegebenen Verhältniſſe machen zu können. Nach dem Zeugniſſe des Eutoccius in ſeinen Commentarien über das 2te Buch des Archimeds von der Kugel und dem Cylinder ſuchten auſſer dem Plato, Appollonius von Pergen, Eratoſtenes, Pappus, Diocles, Nicomedes und andere dieſen Knoten aufzulöſen. Man findet in der theoretiſchen und practiſchen Geometrie des Johann Ardüſer verſchiedene Auflöſungen davon. Man leſe auch deswegen Sluſius ſein Meſolabium; von Wolf Analyſis und des Paulus Mathias Doria ſeinen Brief an den Hyacinth, worin von der Apolloniſchen Parabel gehandelt wird; imgleichen die Ausgabe des Euclides vom Richardus Seite 545 und die vortrefliche Geſchichte der Mathematick vom Montucla 1 B. Seite 186. folg. Hippocrates von Chius fand zuerſt, daß dieſe Aufgabe aufgelöſet ſeyn würde, wenn man zwiſchen 2 gegebenen Linien oder Gröſſen 2 mittlere Proportionalgröſſen oder Linien finden könnte. Die Richtigkeit davon erhellet folgendermaſſen. Es ſey die Seite des gegebenen Würfels $= a$, ſo iſt der Würfel ſelbſt $= a^3$, die Seite des zu findenden doppelten Würfels ſey $= y$, ſo iſt dieſer Würfel $= y^3$. Folglich iſt nach der Forderung $y^3 = (a^3)$ und alſo $y = \sqrt[3]{(2(a^3)} = a\sqrt[3]{2}$. Dieſe Gröſſe iſt aber die erſte von den 2 mittlern Proportionallinien zwiſchen a und $2a$, welches folgendergeſtalt bewieſen wird: Es ſey die erſte unbekannte mittlere Proportionallinie $= y$, die zwote $= z$, ſo verhält ſich $a : y : z : 2a$. Folglich iſt $az = y^2$ und $z = \frac{y^2}{a}$, und $z^2 = \frac{y^4}{a^2}$. Es iſt aber auch $z^1 = 2ay$ folglich iſt $\frac{y^4}{a^2} = 2ay$; folglich $y^4 = 2a^3y$ und $y^3 = 2(a^3)$. Folglich $y = a\sqrt[3]{2}$. Folglich iſt nach

man dieſe krumme Linie nach §. 25 beſchreiben: Und nachdem man die Linie AD von dem Scheitelpunkt A in D auf die Axe getragen hat, ſo muß man in der Mitte von AD die Perpendiculairlinie MO = AD aufrichten und aus dem Punkt O einen Cirkel durch den Punkt A beſchreiben. Wenn man nun aus dem andern Durchſchnittspunkte des Cirkels und der Parabel auf der Axe eine Perpendiculairlinie GS aufrichtet, ſo werden die Linien GS und AS die 2 geſuchten mittlern geometriſchen Proportionallinien zwiſchen AD und AC ſeyn.

Beweis. 1) Das Centrum des Cirkels befindet ſich nothwendig auſſerhalb der Parabel. Denn AD iſt der Parameter (Bedingung); Es wird daher die Ordinate DL an dem Punkt D der Linie AD gleich ſeyn (§ 27). Nun iſt aber AD = OM (Conſtruction); folglich iſt DL = OM. Allein DL > MT (§. 10) folglich iſt OM > als die Ordinate MT, die aus dem Punkt M gezogen iſt. Folglich iſt das Centrum des Cirkels auſſerhalb der Parabel. Es iſt alſo ein Theil des Cirkels innerhalb der Parabel und ein Theil auſſerhalb derſelben (Conſtruction); folglich durchſchneidet er nothwendig die Parabel in 2 Punkten; einmal wenn er hinein gehet und das zweytemal, wenn er wieder aus der Parabel heraus kommt.

2) Itzt behaupte ich, daß folgendes Verhältniß richtig ſey: AD : GS = GS : AS = AS : AC. Denn wenn man aus dem Mittelpunkt O des Cirkels die Perpendiculairlinie OR auf GS fallen läßt, ſo wird man gleich anfangs finden, daß RS = OM = AD = $\frac{1}{2}$ AC ſey; folglich iſt 2 RS = AC. Es iſt aber 2 RS = RS + RH + HS = RS +

nach dem obigen *y* oder die erſte von den 2 mittlern Proportionallinien zwiſchen *a* und 2*a* die Seite des doppelten Würfels; Folglich iſt auch in unſerm § nur zwiſchen AD und AC die erſte von den 2 mittlern Proportionallinien zu ſuchen, wenn man die Seite eines Würfels haben will, der doppelt ſo groß ſey, als der Würfel von der Seite AD. B.

$GR + HS$ (denn GR iſt $= RH$ aus geometriſchen Gründen) $= GS + HS$; folglich iſt $GS + HS = AC$.

Allein wegen der Natur des Cirkels verhält ſich $AS : GS = HS : DS$ (*a*) $= HS : AS - AD$; folglich iſt $GS \times HS = (AS \times AS) - (AS \times AD)$ oder $(GS \times HS) + (AS \times AD) = AS \times AS$. Nun iſt $AS \times AD = \overline{GS}^2$ (§. 20) folglich $GS \times HS + \overline{GS}^2 = \overline{AS}^2$; folglich $(HS + GS) \times GS = \overline{AS}^2$ und da $HS + GS = AC$, wie wir dieſes ſchon gezeiget haben, ſo iſt $AC \times GS = \overline{AS}^2$; folglich verhält ſich $GS : AS = AS : AC$. Es verhält ſich aber auch $AD : GS = GS : AS$ (§ 20); folglich verhält ſich endlich auch $AD : GS = GS : AS = AS : AC$. w. z. E. W.

§. 168.

Zuſatz. Folglich verhält ſich auch $\overline{AD}^3 : \overline{GS}^3 = AD : AC$ (*b*). Es iſt aber $AC = 2 AD$ (Beding). Folglich

(*a*) Die Richtigkeit dieſes Verhältniſſes erkennet man auf folgende Art. Man ziehe die Hülfslinien HA und GD (Tab. XI Fig. 12) ſo entſtehen dadurch 2 Triangel AHS und GDS. In dieſen beyden Triangel iſt der Winkel S beyden gemeinſchaftlich, und der Winkel A $=$ dem Winkel G, weil es Winkel an der Peripherie ſind, die auf einerley Bogen ſtehen; folglich iſt auch der Winkel $GDS = AHS$; folglich ſind die beyden Triangel ſich ähnlich; folglich verhält ſich auch $AS : GS = HS : DS$. B.

(*b*) Um dieſes Verhältniß wohl zu verſtehen, bemerke man, daß wir zum Schluß des vorigen § folgende Proportionen bekommen: $AD : GS = GS : AS = AS : AC$. oder zuſammengezogen $AD : GS : AS : AC$. Folglich heißt das Verhältniß, welches unſer Herr Autor in dieſem § angiebt, in Worten ſo viel: In einer geometriſchen Reihe von 4 Größſen verhält ſich der Cubus des erſten Gliedes zum Cubus des

lich iſt $\overline{GS}^3 = 2\,\overline{AD}^3$; Dieſes beweiſet, daß der Würfel $\overline{GS}^3$, der zur Seite die erſte von den 2 mittlern Proportionallinien GS und AS zwiſchen AD und dem Duplum derſelben AC hat, auch doppelt ſo groß ſey, als der gegebene Würfel $\overline{AD}^3$.

Gebrauch der Parabel
bey der Theilung eines Winkels in 3 gleiche Theile (*).

§. 1.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel DCH (Tab. XI. Fig. 8) in 3 gleiche Theile zu theilen.

des 2ten Gliedes, wie das erſte Glied, zum 4ten. Wir wollen, um uns kürzer ausdrücken zu können, die 4 Größen, die in einem aneinander hängenden Verhältniß ſtehen, $a.\,b.\,c.\,d.$ nennen. Es iſt alsdenn zu beweiſen, daß $a^3 : b^3 = a : d$ ſich verhalte. Da a, b, c, d in einer continuirlichen Verhältniß ſtehen, ſo verhält ſich alſo auch

1) $a : b = b : c$: folglich iſt $ac = bb$. folglich auch $a^2c = ab^2$; folglich $a^2 : b^2 = a : c$.

2) Verhält ſich auch nothwendig $a : b = c : d$. folglich $ad = bc$. Nun hatten wir ſo eben die Gleichung $a^2c = ab^2$. Folglich iſt auch $a^2c\ ad = ab^2bc$ oder $a^3cd = b^3ac$. oder $a^3d = b^3a$; folglich verhält ſich $a^3 : b^3 = a : d$.

Es muß alſo auch das Verhältniß wahr ſeyn $\overline{AD}^3 : \overline{GS}^3 = AD : AC$. B.

(*) Es iſt dieſes eine Aufgabe, die eben ſo berühmt iſt, als das Problem von der Verdoppelung des Würfels. Ob dieſe Aufgabe ſchon eben ſo alt ſey, als jene, läßt ſich nicht mit Gewiß-heit

Auflöſung. Wir ſetzen voraus, daß wir den Radius DC und die Sehne des ganzen Bogens DH kennen. Es kommt itzt darauf an, die Sehne DF zu finden, die zu dem dritten Theil des Bogens DFGH gehört. Wir wollen uns hier einbilden, daß die Theilung würklich ſchon geſchehen ſey, und daß dadurch der ganze Winkel DCH in die 3 gleichen Winkel DCF, FCG und GCH zerleget worden ſey. Man ziehe alsdenn die Sehnen DF, FG, GH, die auch von gleicher Gröſſe ſeyn werden. Endlich ziehe man FI mit GL parallel. Nun wollen wir die verſchiedenen Linien benennen und aus dem, was wir von ihnen wiſſen, eine Gleichung herzuleiten ſuchen, deren Wurzel uns endlich DF geben wird. Es ſey DH $= a$, DC $= b$, DF $= y$. Nun iſt der Winkel FDH ein Winkel an der Peripherie, der auf dem Bogen FGH ſtehet; folglich iſt ſein wahres Maas $= \frac{1}{2}$ FGH (Geometrie) $=$ DF (Conſtr.) Das Maas des Winkels DCF iſt auch $=$ DF. Folglich iſt der Winkel FDH $=$ DCF. Nehmen wir itzt die beyden Triangel DCF und DFK vor uns, ſo iſt 1) der Winkel DFC $=$ DFC. 2) FDH $=$ DCF; folglich iſt auch FDC $=$ FKD, und die ganzen Triangel ſind ſich ähnlich. Folglich verhält ſich auch CF : FD $=$ FD :

---

heit ausmachen, aber doch als wahr vermuthen. Es iſt glaublich, daß man anfieng, ſich die Frage vorzulegen, wie kan man einen gradlinichten Winkel in 3 gleiche Theile theilen? nachdem man ihn in 2 ſolcher Theile zu vertheilen wuſte. Ja! natürlicher Weiſe machte man die Frage noch allgemeiner und ſuchte, wie man einen Winkel nach einem gegebenen Verhältniſſe theilen könne? Denn darzu ſcheint die Quadratrix, die wenigſtens in der Platoniſchen Schule bekannt war, erfunden zu ſeyn. Es iſt alſo nach aller Wahrſcheinlichkeit dieſe Aufgabe von der Dreytheilung des Winkels ſehr alt. Soll dieſe Aufgabe aufgelöſet werden, ſo kann dieſes nur durch Hülfe der höhern Geometrie geſchehen. Von den verſchiedenen Auflöſungen, die man darzu angegeben hat, führe ich hier diejenige an, zu welcher man die Parabel gebraucht. Von andern wird an einem andern Orte zu reden ſich Gelegenheit zeigen. B.

FD : FK oder $b : y = y : \frac{yy}{b}$; folglich iſt FK $= \frac{yy}{b}$. Es verhält ſich auch CD : CF = DK : DF; und da CD = CF, ſo iſt auch DK = DF = y. Folglich iſt auch der Winkel DKF = DFK. Betrachten wir ferner die beyden Triangel DKF und FIK, ſo iſt der Winkel FCG = CFI als Wechſelwinkel (Conſtr.) folglich DCF = CFI. Folglich nach dem vorhin bewieſenen 1) FDK = KFI; 2) DFK = DKF; Folglich ſind die Triangel DKF und IKF ſich ähnlich; folglich verhält ſich auch DF : FK = FK : KI oder $y : \frac{yy}{b} = \frac{yy}{b} : \frac{y^3}{bb}$. Es iſt alſo KI $= \frac{y^3}{bb}$. Nun iſt DF = DK, GH = LH (aus dem nämlichen Grunde) und FC = IL (Geom.) Folglich iſt DF + FG + GH = AK + IL + LH = DK + IK + KL + LH = DH + IK $= a + \frac{y^3}{bb}$. Folglich iſt DF + FG + GH $= a + \frac{y^3}{bb}$. Es iſt aber DF + FG + GH = 3 DF $= 3y$: Folglich iſt $3y = a + \frac{y^3}{bb}$; folglich $3ybb = abb + y^3$. Folglich $y^3 - 3bby + abb = o$. Um nun die Wurzel von dieſer Gleichung oder den eigentlichen Werth von y zu bekommen, mache man folgende Conſtruction (Tab. XI. Fig 9) Man beſchreibe mit DC der vorigen Figur $= b$ als einem Parameter die Parabel GAHF. Man mache den Theil der Axe AD $= 2b$. Man ſetze an dem Punkt D die Perpendiculairlinie DC $= \frac{1}{2}a$. Man nehme darauf C für ein Centrum und beſchreibe mit dem Radius CA einen Cirkel, der die Parabel in 4 Punkten durchſchneiden wird. Man ziehe von den Durchſchnittspunkten H und F Perpendiculairlinien HI und FE auf die Axe der Parabel, ſo ſind HI und FE Ordinaten der Parabel und AI und AE die Abſciſſen. Folglich HI $= y$ und AI $= x$. Können wir nun zeigen, daß vermöge dieſer Conſtruction und der Suppoſition, daß HI

$= y$ ſey, die obige Gleichung $y^3 - 3bb\,y + abb = o$ entſtehen werde, ſo muß HI würklich die geſuchte Wurzel oder der verlangte Werth von DF (in der vorigen Figur), folglich die Sehne zu dem 3ten Theile des Bogens DFGH ſeyn. Dieſes iſt aber würklich alſo, wie aus folgendem Beweiſe erhellen wird. Es iſt vermöge der Eigenſchaft der Parabel $bx = y^2$ (§. 20). Folglich iſt $x = \frac{y^2}{b}$. Nun ziehe man aus C eine Parallellinie mit HK und verlängere HI bis in K, ſo iſt $KC = AD - AI = 2b - \frac{y^2}{b}$. Es iſt auch $KH = HI + IK = HI + DC = y + \frac{1}{2}a$. Endlich iſt $CH = CA = \surd(\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2) = \surd(4bb + \frac{1}{4}aa) =$; Folglich iſt $\overline{CH}^2 = \frac{1}{4}aa + 4bb$. Es iſt aber auch $\overline{CH}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KH}^2 = (2b - \frac{y^2}{b})^2 + (y + \frac{1}{2}a)^2 = 4bb - 4y^2 + \frac{y^4}{bb} + yy + ay + \frac{1}{4}aa$; folglich iſt $\frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + \frac{y^4}{bb} + yy + ay + \frac{1}{4}aa$. Folglich, wenn man $\frac{1}{4}aa$ und $4bb$ auf beyden Seiten gegen einander aufhebt, und $+yy$ von $-4yy$ würklich wegnimmt, ſo iſt $\frac{y^4}{bb} - 3yy + ay = o$. Folglich $y^4 - 3bbyy + abby = o$. Folglich endlich $y^3 - 3bby + abb = o$. Folglich iſt HI eine Sehne, die den gegebenen Bogen DFGH und folglich den Winkel DCH in 3 gleiche Theile theilet. Es iſt auch FE eine wahre Wurzel und eine Sehne, die den Bogen HBD, als das Complementum des vorigen zum ganzen Cirkel in 3 gleiche Theile theilet (*).

Von

(*) Bin ich wider alles Vermuthen einigen Perſonen dunkel geblieben, ſo mögen ſie zuverſichtlich glauben, daß die Dunkelheit nicht in dem Vortrage ſelbſt, ſondern in ihren wenigen Fähig-

Von der Ellypſe.

* §. 1.

Erſter Hauptſatz. Es ſey AMD (Fig. 42) eine ſolche krummlinichte Figur, daß die Quadrate $\overline{BM}^2$ der Ordinaten BM, die auf einer ihrer Sehnen perpendiculair ſtehen, beſtändig den ihnen zugehörigen Rectangeln $AB \times BD$, der durch BM gemachten Segmente gleich ſind: So behaupte ich, daß dieſe Figur ein Cirkel ſey, deſſen Diameter AD iſt.

Beweis. Es ſey C die Mitte von AD. Nun iſt $AB = AC - BC$ und $BD = AC + BC$; Denn es iſt $CD = AC$; Weil folglich nach der Bedingung $\overline{BM}^2 = AB \times BD$, ſo iſt auch $\overline{BM}^2 = (AC - BC) \times (AC \times BC) = AC^2 - \overline{BC}^2$ Laſſet uns itzt die Linie CM ziehen. Es iſt klar, daß $\overline{BM}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{BC}^2$; Folglich iſt $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{BC}^2$; Hieraus folgt, daß $AC = CM$; Folglich iſt jeder Punkt M des Umkraiſes der krummen Linie gleich weit

 von

Fähigkeiten zur Mathematick oder in einer gar zu geringen Aufmerkſamkeit liege. Ich befürchte eher von einigen Männern den Vorwurf einer zu ſorgfältigen Auseinanderſetzung, der mir aber weder unerwartet noch empfindlich ſeyn würde. Ein ſtiller Dank, den ein junger Liebhaber der erhabenen Mathematick mir zollet, weil ich ihm auf ſeinem mühſamen Wege einige Steine auf die Seite geſchaft habe, iſt mir viel zu ſchätzbar, als daß ich nicht mit Vergnügen das ſchlechte Gemurmel ſolcher Leute anhören ſolte, die, um ſelbſt nur immer glänzend zu ſcheinen, ihre Schüler in der Finſterniß unterhalten. Man leſe Crouſaz Vorrede zu ſeinem *Comment.* über den *l'Hôpital.* B.

von dem Centrum entfernt; Folglich iſt die gegebene Figur ein Cirkel, deſſen Diameter AD iſt.

§. 2.

Zuſatz. Hieraus folgt, daß im Cirkel die Quadrate der Ordinaten GP, BM ſich zu einander verhalten, wie die correſpondirenden Rectangel, das heißt, $\overline{GP}^2 : \overline{BM}^2 = AG \times GD : AB \times BD$. Denn es iſt $\overline{GP}^2 = AG \times GD$ (§. 1) und $\overline{BM}^2 = AB \times BD$: Folglich verhält ſich $\overline{GP}^2 : \overline{BM}^2 = AG \times GD : AB \times BD$ (*a*).

§. 3.

Anmerkung. Damit wir uns nicht in verdrüßliche Wiederhohlungen einzulaſſen nöthig haben, ſo bemerke man in Anſehung des folgenden, daß die Flächen, wodurch wir den Kegel ſchneiden, allezeit als perpendiculair gegen den Axentriangel ABC dieſes Körpers angenommen werden (Fig. 83) und wenn mehrere Flächen ſich durchſchneiden, daß ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt LOM gegen die Fläche dieſes Triangels und folglich gegen alle diejenigen Linien perpendiculair ſey, die auf dieſer Fläche durch den Punkt O gezogen werden, in welchem der Kegel durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt LOM durchſchnitten wird. Denn dieſes alles iſt im §. 2. 5. 6. der Parabel bewieſen worden.

§. 4.

Erklärung. Wenn die Seiten AB, AC eines Axen-

(*a*) Der umgekehrte Satz des §. 2 iſt falſch, das heißt, man kann nicht ſchlieſſen, daß die Ordinaten zu einem Cirkel gehören, weil die Quadrate derſelben ſich untereinander verhalten, wie die correſpondirenden Rectangel. Dieſe Eigenſchaft kann auch der Ellypſe zukommen, wie wir es §. 10 zeigen werden.

Axentriangels von einem ungleichſeitigen Kegel (Fig. 43) durch eine Fläche GLRM ſo durchſchnitten werden, daß der gemeinſchaftliche Durchſchnitt GR dieſer Ebene und des Triangels mit der Seite AB einen Winkel AGR = ACB macht, der von dem Diameter BC mit der andern Seite AC gemacht wird, ſo ſagt man, daß die Seiten antiparallel mit der Baſis durchſchnitten ſind.

§. 5.

Zweyter Hauptſatz. Wenn man einen ungleichſeitigen Kegel antiparallel mit ſeiner Baſis durchſchneidet, ſo iſt die Ebene GLRM, die dadurch entſtehet, ein Cirkel.

Beweis. Man laſſe durch einen beliebigen Punkt der antiparallelen Fläche eine Ebene gehen, welche den Kegel parallel mit ſeiner Baſis durchſchneidet, um dadurch einen Cirkel DLPM zu bekommen, der mit der Baſis dieſes Kegels parallel iſt, und deſſen Diameter DP mit dem Diameter BC parallel iſt, (§. 1. der Parabel) und daß der Winkel DPA = BCA = AGR ſey (Beding.) Da man ferner die Baſis dieſes Kegels gegen die Fläche des Triangels ABC als perpendiculair annimmt, ſo wird auch der Cirkel DLPM gegen dieſe nämliche Fläche perpendiculair ſeyn, und folglich wird der gemeinſchaftliche Durchſchnitt LOM dieſer beyden Ebenen GLRM und DLPM gegen die Linien DP, GR, die auf dieſem Triangel gezogen ſind, perpendiculair und folglich in der Mitte O durchſchnitten werden. Nun ſind die Triangel DOG und POR der antiparallelen Lage wegen ſich ähnlich; folglich verhält ſich DO : OG = OR : OP. Deswegen iſt $OG \times OR = DO \times OP = \overline{OL}^2$ oder $\overline{OM}^2$ (Geometr.) folglich iſt $OG \times OR = \overline{OL}^2$. Folglich iſt die Ebene GLRM ein Cirkel (§. 1).

* §. 6.

Dritter Hauptſatz. Wenn aber der Kegel ſo durchſchnitten wird, daß der Schnitt LMTP (Fig 44) weder parallel noch antiparallel mit der Baſis dieſes Körpers iſt, das heißt, daß der Winkel ACT > oder < BCA, ſo wird dieſer Durchſchnitt kein Cirkel ſeyn.

Beweis. Man laſſe durch die Mitte O der Linie LT eine mit der Baſis BC antiparallele Ebene gehen, ſo wird dadurch der Cirkel GMRP entſtehen (§. 5); folglich iſt PO = OM und $\overline{PO}^2$ oder $\overline{OM}^2 = OG \times OR$. Würde aber die Figur LMPT auf ein Cirkel ſeyn, ſo wäre auch $\overline{OM}^2 = LO \times OT$; folglich $LO \times OT = GO \times OR$, oder es verhielte ſich $LO : GO = OR : OT$; Folglich würden die Triangel GOL und ROT ſich ähnlich ſeyn (Geometr.); Folglich würden die den gleichnamigten Seiten LO, OR entgegenſtehenden Winkel OGL, und OTR ſich gleich ſeyn (Geom.). Folglich wäre der Winkel LTA = RGA = ACB. (Conſtr.); Folglich würde LT parallel mit BC ſeyn. Dieſes iſt aber gegen unſere Bedingung. Folglich kann die Figur LMTP kein Cirkel ſeyn.

§. 7.

Anmerkung. Man könnte durch den Punkt O ſtatt der antiparallelen Ebene, eine mit der Baſis parallellaufende gehen laſſen. Solchergeſtalt wäre aber der 3te Satz nicht aus dem 2ten hergeleitet worden. Dieſes iſt aber ein Fehler, wenn man anders verfahren kan.

§. 8.

Zuſatz. Weil alſo die Figur LMTP kein Cirkel iſt, und weil LT durch die Mitte deſſelben gehet (indem die Perpendi-

pendiculairlinien, die aus irgend einem Punkt M des Umkreiſes auf dieſe Linie gezogen ſind, in 2 Theile getheilet werden), ſo kann der Punkt O nicht gleich weit von allen Punkten dieſes Umkreiſes entfernet ſeyn. Laſſet uns alſo ſehen, von welcher Seite ſich die größte Entfernung zeiget.

Es ſind hier 2 Fälle. Denn durch dieſen Durchſchnitt LT kann der Winkel TLA $<$ oder $>$ gemacht worden ſeyn als BCA oder RGA, der durch die antiparallele Linie GR, die durch die Mitte O der Seite LT gezogen iſt, entſtanden iſt. In dem erſten Falle, das heißt, wenn der Winkel $TLA < RGA$ iſt, ſo iſt die Linie LT gröſſer als die Perpendiculairlinie MOP, die auf der Mitte O aufgerichtet iſt. In dem 2ten Fall, oder wenn $TLA > RGA$ iſt, ſo iſt LT kleiner als MOP.

Beweis des erſten Falls. Man ziehe durch die Mitte O die Antiparallellinie GOR (Fig. 44) und zugleich durch den nämlichen Punkt die Parallellinie DH. Man wird alsdenn finden, daß, da GR antiparallel iſt, (Conſtr.) der Winkel ODG in dem Triangel GOD dem Winkel ORH in dem Triangel HOR gleich ſey. Es iſt aber der äuſſere Winkel ORH gröſſer, als der innere OTR; folglich iſt $ODG > OTR$; folglich kann man bey dem Winkel ODG oder ODL einen Winkel ODS nehmen, der dem Winkel OTR oder OTH gleich iſt, und folglich wird DS die Linie LT in einem Punkt S zwiſchen O und L ſchneiden; Folglich iſt $OS < OL$ oder OT und die Triangel ODS und OTH ſind ſich ähnlich: Folglich verhält ſich $OS : DO = OH : OT$ oder es iſt $OS \times OT = DO \times OH = \overline{OM}^2$ oder $\overline{OP}^2$. (indem man nämlich einen Cirkel annimmt, deſſen Diameter DH iſt, weil ſonſt OM der gemeinſchaftliche Durchſchnitt des Cirkels und der Figur LMPT wäre. Denn man kann aus dem Punkt O nur eine einzige Perpendiculairlinie auf die Fläche des Triangels ABC aufrichten) folglich

folglich iſt $OL \times OT$ oder $\overline{OL}^2 > OS \times OT$; Folglich auch $> \overline{OM}^2$; folglich iſt $OL > OM$; folglich iſt 2 OL oder $LT > 2\,OM$ oder MP. w. d. 1ſte z. E. W.

Beweis des 2ten Falls (Fig. 45), wo der Winkel $TLA > RGA$ der antiparallelen Linie RG, die durch die Mitte O der Linie LT gezogen iſt. Man ziehe, (wie vorhin), mit BC die Parallellinie DOH, ſo wird der Winkel $ODG = ORH$ ſeyn. Es iſt aber $ORH < OTH$; Folglich iſt ODG oder $ODL < OTH$. Wenn man folglich DS ſo weit verlängert, bis ſie mit der verlängerten Linie TL zuſammen ſtößt, um dadurch den Winkel ODS zu bekommen, der dem Winkel OTH gleich iſt, ſo wird DS nothwendig mit OL in einem Punkt S zuſammen ſtoſſen, der auf der andern Seite von O gegen L zu liegt, und es wird $OS > OL$ und die Triangel ODS und OTH ſich ähnlich ſeyn. Folglich verhält ſich $OD : OS = OT : OH$. oder $OS \times OT = OD \times OH = \overline{OM}^2$. Es iſt aber $OS \times OT > OL \times OT$ oder $\overline{OL}^2$; Folglich iſt $\overline{OM}^2 > \overline{OL}^2$ oder $OM > OL$. Folglich 2 OM oder $MP > 2\,OL$ oder LT. W. d. z. E. W.

§. 9.

Erklärungen. Es ſey izt LMSTPL (Fig. 46) ein Durchſchnitt eines Kegels, der durch eine Fläche entſtehet, welche die beyden Seiten AB und AC des Axentriangels ABC dieſes Körpers ſo durchſchneidet, daß ſie weder parallel noch antiparallel mit der Baſis BC iſt. Dieſes iſt nun nach §. 6 kein Cirkel, ſondern nach der Benennung der Alten eine Ellypſe (*a*), und wenn man annimmt, daß der Winkel ALT kleiner ſey, als der Winkel, den die antiparallele Linie macht, ſo

(*a*) Man wird den Grund davon im §. 23. ſehen.

ſo wird LT die Hauptaxe oder groſſe Axe oder die gröſte Länge der Ellypſe ſeyn (§. 8). Eine jede Linie OS oder rM, die von einem beliebigen Punkt des Umkreiſes dieſer Figur perpendiculair auf LT herunter gezogen iſt, iſt eine Ordinate gegen dieſe Axe; die Theile der Axe OT und OL, die durch die Ordinate OS beſtimmt werden, heiſſen Segmente; die Perpendiculairlinie lD, die auf der Mitte K der Linie LT aufgerichtet iſt, heißt die kleine Axe oder *axis conjugatus* (a) gegen die Axe LT. Eine jede Linie, die von einem Punkt der Peripherie der Figur auf lD herunter gezogen iſt, heiſſet eine Ordinate der kleinen Axe, und die Theile der kleinen Axe, die durch dieſe Ordinate beſtimmt werden, ſind Segmente derſelben (*).

§. 10.

Vierter Hauptſatz. In einer Ellypſe, das heißt, in einen Kegelſchnitt, wie LMSTPL iſt, der kein Cirkel iſt, (§ 6)

(a) Die Urſache dieſer Benennung wird im §. 21. erklärt werden.

(*) Die gewöhnlichſte Art, wie man ſich die Entſtehung der Ellypſen vorſtellet, iſt freylich diejenige, da man ſich dieſelbe als aus einem Kegel geſchnitten gedenket. Ja! man glaubt vielleicht gar berechtigt zu ſeyn, jeden andern Körper als untauglich dazu anzuſehen. Nichts deſtoweniger iſt es gewiß, daß man auch aus jedem Cylinder vollkommene Ellypſen ſchneiden kann, und zwar ſolche Ellypſen, die mit den aus einem Kegel entſtandenen genau einerley ſind. Dieſes hat ſchon vor mehr als 1000 Jahren der Serenus eingeſehen, der in 2 ganzen Büchern, worin natürlicher Weiſe viele artige Nebenunterſuchungen vorkommen, ausführlich davon gehandelt hat. Man darf nur den Cylinder ſchief durchſchneiden, ſo hat man eine Ellypſe, und es wird keinem, der ein wenig ſich geübet hat, ſchwer werden, die Richtigkeit dieſer Behauptung zu beweiſen. Man leſe darüber des Halleys Ausgabe des Serenus. Auch hat Deschales in ſeinem *Mundus mathematicus* nach dem Serenus die Eigenſchaften dieſer Ellypſe unterſucht. B.

(§. 6) verhalten ſich die Quadrate der Ordinaten $\overline{OS}^2$, $\overline{rM}^2$, wie die Rechtecke aus den correſpondirenden Segmenten der Axe, das heißt, es verhält ſich $OS : \overline{rM}^2 = OT \times OL : rL \times rT$ (Fig. 46).

Beweis. Man laſſe durch zwey beliebige Punkte S und M des Umkreiſes dieſer Figur 2 Ebenen gehen, welche den Kegel mit ſeiner Baſis parallel durchſchneiden. Dieſe werden alsdenn Cirkel vorſtellen. Folglich iſt $\overline{OS}^2 = OR \times OQ$ und $\overline{rM}^2 = rF \times rG$ (Geom.) Laſſet uns nun die ähnlichen Triangel LRO und LFr betrachten. Da verhält ſich $OR : rF = OL : rL$ und wegen der beyden ähnlichen Triangel TOQ und TrG iſt $OQ : rG = OT : rT$. Wenn man folglich dieſe Glieder der beyden Proportionen der Ordnung nach durch einander multiplicirt, ſo finden wir dieſes Verhältniß $OR \times OQ : rF \times rG = OL \times OT : rL \times rT$. Wenn wir in dieſem Verhältniß $\overline{OS}^2$ anſtatt $OR \times OQ$ und $\overline{rM}^2$ in der Stelle von $rF \times rG$ ſetzen, ſo wird daraus: $\overline{OS}^2 : \overline{rM}^2 = OL \times OT : rL \times rT$. w. z. E. W.

§. 11.

Allein wenn man fände, daß die Quadrate der Ordinate OS, rM gegen die Linie LT ſich unter einander verhielten, wie die Rechtecke der correſpondirenden Segmente, ſo dürfte man daraus noch nicht ſchlieſſen, daß die äuſſerſten Punkte S und M dieſer Perpendiculairlinien in einer Ellypſe wären. Denn dieſe nämliche Eigenſchaft kommt auch dem Cirkel zu (§. 2) Deswegen iſt der vorige Satz umgekehrt falſch (*a*).

§. 12.

(*a*) Allein es wird wahr ſeyn, wenn man voraus ſetzt, oder ſonſt ſchon

§. 12.

Fünfter Hauptſatz. Es verhält ſich das Quadrat $\overline{OS}^2$ jeder Ordinate OS der groſſen Axe LT zu dem Rechteck $OT \times OL$ aus den correſpondirenden Segmenten, OT und OL, wie das Quadrat der kleinen Axe zum Quadrat der groſſen Axe, oder wie das Quadrat der halben kleinen Axe zum Quadrat der halben groſſen Axe, das heißt, $\overline{OS}^2 : OT \times OL = \overline{KD}^2 : \overline{KT}^2$.

Beweis. Wenn KD eine Ordinate iſt, ſo folgt daraus (§. 10) daß $\overline{OS}^2 : \overline{KD}^2 = OT \times OL : KT \times KL$ oder $\overline{KT}^2$. Wenn man folglich die Glieder verſetzt, ſo verhält ſich $\overline{OS}^2 : OT \times OL = \overline{KD}^2 : \overline{KT}^2$. w. z. E. W.

§. 13.

Anmerkung Ich glaube, daß man mir den Beweis ſchenken werde, daß der Umkreis der Ellypſe eine krumme Linie ſey. Und da ſie auf einer Ebene beſchrieben iſt, ſo laſſet uns darin die andern Eigenſchaften, die nicht von dem Körper, von dem ſie erzeugt ſind, abhängen, aufſuchen. Laſſet uns aber immer das nachfolgende aus den vorhergehenden herleiten.

§. 14.

Erſter Zuſatz. Laſſet uns izt die 47te Figur betrachten, worin AB die groſſe Axe iſt; CD aber die kleine Axe; G das Centrum der Ellypſe; MP eine Ordinate an der groſſen Axe. In dieſem Fall heißt ein jeder Theil GP dieſer Axe

---

ſchon weiß, daß das Quadrat einer jeden Ordinate nicht den Rechteck aus den Segmenten der Axe gleich iſt, die durch dieſe Ordinaten entſtanden ſind.

Axe, welcher zwiſchen dem Centrum G und dem Endpunkt einer Ordinate MP enthalten iſt, eine Abſciſſe (*). Es ſey folglich $AB = 2a$; AG oder $GB = a$; $CD = 2b$; CG oder $GD = b$; $MP = y$; $GP = x$: So iſt $AP = a - x$ und $PB = a + x$; folglich iſt $AP \times PB = (a - x)(a + x) = aa - xx$.

Wenn man alſo die Eigenſchaft der Ellypſe, die man im 5ten Hauptſatze beſtimmt hat, analytiſch ausdrücket, ſo bekommt man folgendes Verhältniß: yy ($\overline{MP}^2$) : $aa - xx$ ($AB \times PB$) $= bb$ ($\overline{CG}^2$) : aa ($AG \times GB$ oder $\overline{GB}^2$) Hieraus ſchließt man, daß $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ ſey. Eine Gleichung, die allen Punkten dieſer krummen Linie in Abſicht auf ihre groſſe Axe zukommt, und wodurch ſie vom Cirkel unterſchieden iſt. Denn im Cirkel ſind die Axen oder Diameter ſich gleich. Alſo $a = b$: Folglich wird aus der vorigen Gleichung für den Cirkel $aa - xx = yy$.

§. 15.

Zweyter Zuſatz. Weil $\overline{MP}^2 : AP \times PB = \overline{CG}^2 : \overline{GB}^2$ und $CG < GB$; ſo ſiehet man, daß $\overline{MP}^2 < AP \times PB$, das heißt, daß das Quadrat einer Ordinate an der groſſen Axe einer Ellypſe kleiner ſey, als das Rechteck aus den correſpondirenden Segmenten dieſer Axe. Dieſes beſtimmet einen andern Unterſchied zwiſchen dieſer krummen Linie und den Cirkel. Denn in dieſem iſt das Quadrat der Ordinaten dem Rechteck aus den correſpondirenden Segmenten gleich.

§. 16.

(*) Das heißt, die Abſciſſen nehmen ihren Anfang von dem Mittelpunkt der Ellypſe. Dieſes iſt aber nicht immer nothwendig, ſondern die mehrſten Auctoren rechnen den Anfang der Abſciſſen von A und alsdenn heiſſet AT oder AP eine Abſciſſe. B.

§. 16.

Dritter Zuſatz. Der Ausdruck für das Quadrat der Abſciſſe iſt dieſer: $xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$. Denn nach dem §. 14 iſt $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$. Nun verſetze man die Glieder $-xx$ und $-\frac{aayy}{bb}$ ſo iſt $aa - \frac{aa - yy}{bb}$ oder $\frac{aabb - aayy}{bb} = xx$.

§. 17.

Vierter Zuſatz. Es iſt das Quadrat der Ordinate $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$. Man darf nur, um ſich hievon zu verſichern, die beyden Helften der Gleichung $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ mit bb multipliciren, ſo iſt $aabb - bbxx = aayy$; folglich $\frac{aabb - bbxx}{aa} = yy$.

§. 18.

Fünfter Zuſatz. Wenn man beſtändig die Gleichung $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ annimmt, ſo iſt offenbar, daß, wenn die Abſciſſe x gröſſer wird, die Ordinate y kleiner werden müſſe. Denn wenn x gröſſer wird, ſo wird auch xx gröſſer und folglich wird $aa - xx$ kleiner; weil man von dem Quadrat aa eine gröſſere Gröſſe xx abziehet. Wenn aber $aa - xx$ kleiner wird, ſo muß auch die andere gleiche Gröſſe $\frac{aayy}{bb}$ kleiner werden. Da aber aa und bb beſtändige Gröſſen ſind, ſo kan jene in Betracht dieſer nicht kleiner werden. Folglich wird ſie es in Anſehung des yy. Wenn alſo die Abſciſſen wachſen, ſo nehmen die Ordinaten ab, das heißt, die Ordinaten werden kleiner, je weiter ſie vom Mittelpunkt der Ellypſe ſich

entfernen. Folglich iſt die Helfte der kleinen Axe die größte Ordinate gegen die groſſe Axe und die beyden Endpunkte der kleinen Axe C und D beſtimmen die größte Breite der Ellypſe.

§. 19.

Sechſter Zuſatz. Hieraus folgt, daß eine Perpendicularlinie DA an einem Endpunkt D der kleinen Axe die krumme Linie nur in einem einzigen Punkt D berühren werde. Denn wenn DQ parallel mit der groſſen Axe AB iſt (Conſtr.), und ſie berührte die krumme Linie in einem andern Punkt H, ſo würde, wenn man aus dieſem Punkt die Ordinate HK zöge HK = DG ſeyn, das heißt, die Ordinaten würden nicht kleiner werden, ſo wie ſich vom Centrum entfernen. Dieſes iſt aber unmöglich.

§. 20.

Siebender Zuſatz. Laſſet uns von einem beliebigen Punkt M auf die kleine Axe die Perpendicularlinie oder die Ordinate $MR = GP = x$ ziehen, ſo iſt $RG = MP = y$; $CR = CG - RG = b - y$; $RD = GD + RG = b + y$; Folglich iſt $CR \times RD = bb - yy$. Es iſt aber (§. 16) $\frac{aabb - aayy}{bb} = xx$ oder $xx \times bb = (bb - yy)\,aa$; Folglich iſt $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$ oder es verhält ſich $xx : bb - yy = aa : bb$; das heißt, $\overline{MR}^2 : CR \times RD = \overline{AG}^2 : \overline{CG}^2$.

§. 21.

Achter Zuſatz Die Ellypſe hat alſo einerley Eigenſchaften, man mag die Ordinaten auf der groſſen oder kleinen Axe nehmen. Daher nennet man dieſe Axen conjugirte Axen, von dem lateiniſchen Worte conjugatus, verbunden, das heißt Axen, die eine Ver-

Verwandſchaft mit einander haben Man wird folglich, wie im §. 18 daraus ſchlieſſen können, daß, wenn die Abſciſſen y der kleinen Axe gröſſ r werden, die Ordinaten x kleiner werden; daß die Helfte der groſſen Axe die gröſte Ordinate der kleinen Axe ſey, und daß die beyden Endpunkte A und B, die gröſte Weite der Ellypſe beſtimmen; daß aber auch im Gegentheil nach dem 2ten Zuſatze (§. 15) das Quadrat eine Ordinate an der kleinen Axe gröſſer ſey, als das Rechteck aus den damit correſpondirenden Segmenten der Axe. Weil in der Proportion $xx : bb - yy = aa : bb$ (§. 20), $aa > bb$ iſt, ſo muß auch $xx > bb - yy$ oder $\overline{MR}^2 > CR \times RD$ ſeyn. Dieſes iſt ein neuer Unterſchied zwiſchen der Ellypſe und dem Cirkel.

§. 22.

Neunter Zuſatz. Aus dem Satze, daß die Ordinaten der kleinen Axe, ſo wie ſich vom Centrum entfernen, immer kleiner werden, folgt, daß eine Perpendiculairlinie AV an einem der Endpunkte der groſſen Axe die krumme Linie nur in einem einzigen Punkt berühre. Denn wenn ſie dieſelbe in einem andern Punkt T berührte, und man zöge aus dieſem Punkt eine Ordinate TN an die kleine Axe, die mit der Perpendiculairlinie AV parallel iſt, (Conſtr.), ſo würde TN = AG ſeyn; das heiſſet, die Ordinaten an der kleinen Axe würden nicht kleiner werden, ſo wie ſich vom Centrum entfernen. Dieſes widerſpricht aber dem §. 21.

§. 23.

Zehnder Zuſatz. Wenn die Abſciſſen GP und GS ſich gleich ſind (Fig. 48) ſo ſind es auch die zu ihnen gehörige Ordinaten PV und SK. Denn wenn man die vorige Benennung behält und GS $= t$, SK $= z$ ſetzet, ſo iſt (§ 16)

$xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$ und aus der nämlichen Urſache $tt = \frac{aabb - aazz}{bb}$. Folglich, weil nach der Bedingung GP = GS oder $x = t$ ſo wird auch $xx = tt$ ſeyn und folglich $\frac{aabb - aayy}{bb} = \frac{aabb - aazz}{bb}$. Wenn man folglich mit bb auf beyden Seiten multiplicirt, darauf von beyden Seiten $aabb$ abzieht und die beyden Reſte durch aa dividirt, ſo iſt $-zz = -yy$ oder $zz = yy$ oder $z = y$, das heißt, SK = PV.

§. 24.

Wenn aber umgekehrt die Ordinaten SK und PV ſich gleich ſind, ſo ſind auch ihre Abſciſſen GS und GP es gleichfalls. Um ſich davon zu überzeugen muß man ſich erinnern, daß (§. 17) $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ und eben ſo $zz = \frac{aabb - bbtt}{aa}$; Folglich da $y = z$ iſt (Beding.), ſo wird auch $yy = zz$ und folglich $\frac{aabb - bbxx}{aa} = \frac{aabb - bbtt}{aa}$ ſeyn. Daraus ſchließt man, wie in §. 23, daß $x = t$ oder GP = GS ſey.

§. 25.

Eilfter Zuſatz. Wenn man alſo die beyden Endpunkte V und K jeder 2 gleicher Ordinaten PV und SK durch die Linie VK mit einander verbindet, ſo wird dieſe Linie durch das Centrum G gehen uud daſelbſt in 2 gleiche Theile getheilet werden.

Denn es iſt offenbar, daß die rechtwinklichten Triangel GPV und GSK ſich ähnlich ſind. Folglich verhält ſich PV : SK = GP : GS = GV : GK. Nun iſt aber PV = SK (Beding.) Folglich, GP = GS und GV = GK, das heißt, die Entfernung PS dieſer gleichen Ordination iſt durch die

die Linie VK in 2 gleiche Theile getheilet worden. Es theilet aber das Centrum der Ellypſe dieſe nåmliche Diſtanz auch in 2 gleiche Theile (§. 24); Folglich iſt G der Mittelpunkt derſelben; Folglich wird eine jede Linie VGK, die durch das Centrum G der Ellypſe gehet, und ſich an den 2 Punkten dieſer krummen Linie endiget, in dem Punkt G in 2 gleiche Theile getheilet. Daher heiſſet eine jede Linie, die VGK åhnlich iſt, ein **Diameter.**

§. 26.

Wenn man umgekehrt von den Endpunkten V und K eines Diameters die Ordinaten VP und KS fallen låßt, ſo ſind dieſe von einerley Gröſſe und ihre Abſciſſen GP und GS werden ſich auch gleich ſeyn. Denn vermöge der åhnlichen Triangel GPV und GSK haben wir folgendes Verhåltniß: VG : GK = VP : KS = GP : GS Nun iſt VG = GK (§. 25), weil VGK ein Diameter iſt (Beding.); Folglich iſt VP = KS und GP = GS.

§. 27.

Zwölfter Zuſatz. Weil Ordinaten, die gleichweit vom Mittelpunkte entfernet ſind, ſich gleich ſind (§. 23), ſo iſt die Ellypſe gegen ihr unterſtes Ende L nicht weiter, als gegen ihr oberſtes Ende T. (Fig. 46) obgleich der Kegel dünner oder ſpitziger in T als in L iſt (*a*).

* §. 28.

(*a*) Dieſe Betrachtung kann uns in unſern Urtheilen ſehr zurückhaltend machen. Wenn man den Kegel in der Queere oder von oben nach unten ſo durchſchneidet, daß dadurch eine Flåche LSTPL (Fig. 46) entſtehet, ſo urtheilet man ſogleich, daß dieſe Art von Ovale die Geſtalt einer Birne oder Klocke haben müſſe, weil der Kegel von oben nach unten zu immer dicker wird. Dieſes iſt alſo ſehr falſch, wie man es auch ohne Theorie finden kann. Man darf nur einen Kegel nach der gegebenen

* §. 28.

Dreyzehender Zuſatz. Wenn man das Verhältniß anſetzet: AB : CD = CD zu einer dritten Proportionallinie P. (Fig. 47) oder $2a : 2b = 2b : \frac{4bb}{2a} = \frac{2bb}{a}$ ſo iſt $p = \frac{2bb}{a}$. Dieſe 3te Proportionallinie wird alsdenn der Parameter der groſſen Axe genennet. Nach dieſer Vorausſetzung findet man, daß das Rechteck AP×PB jeder 2 Segmente der groſſen Axe ſich zum Quadrate $\overline{PM}^2$ ihrer Ordinate verhalte, wie die groſſe Axe AB zum Parameter p; oder, wenn man die Proportion anſezt $2a : 2b = b : p$, ſo iſt $aa - xx$ (AP×PB) : yy ($\overline{PM}^2$) $= 2a$ (AB) : p.

Beweis. Weil $2a : 2b = 2b : p$. (Beding.), ſo verhält ſich auch $4aa : 4bb = 2a : p$ (*); Folglich iſt $\frac{4aa}{4bb}$ oder $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$. Wenn man folglich $\frac{2a}{p}$ in der Gleichung $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ (§. 14) in der Stelle von $\frac{aa}{bb}$ ſetzet, ſo wird daraus $aa - xx = \frac{2aayy}{p}$ oder $(aa - xx)\,p = 2a \times yy$. Hieraus folgt das Verhältniß: $aa - xx : yy = 2a : p$.

§. 29.

Vierzehnter Zuſatz. Setzet man ferner an: CD : AB

---

nen Anweiſung zerſchneiden, ſo wird man den Beweis vor Augen liegen haben.

(*) Man ſehe die Erläuterung, die ich zum §. 168 der Parabel gegeben habe. B.

$AB = AB : m$, und m heißt der Parameter der kleinen Axe CD, ſo wird man finden, daß der Rechteck $CR \times RD$ aus 2 Segmenten der kleinen Axe ſich zum Quadrat $\overline{MR}^2$ ihrer Ordinate verhält, wie die kleine Axe CD zum Parameter m. Nun ſey $2b : 2a = 2a : m$, ſo verhält ſich $CR \times RD$ ($bb - yy$) : $\overline{MR}^2$ (xx) $=$ CD ($2b$) : m.

Dieſes als richtig zu erkennen, darf man nur den Beweis vom §: 28 wiederhohlen, indem man ſpricht: Weil $2b : 2a = 2a : m$., ſo verhält ſich auch $4bb : 4aa = 2b : m$, oder $\frac{bb}{aa} = \frac{2b}{m}$: Folglich verwandelt ſich die im §. 20 geſtandene Gleichung $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$ in folgende: $bb - yy = \frac{2bxx}{m}$ oder $(bb - yy)\, m = 2b \times xx$ Hieraus folgt das Verhältniß: $bb - yy : xx = 2b : m$.

* §. 30.

Anmerkung. Die Gleichung $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$ (§. 28) oder $bb - yy = \frac{2bxx}{m}$ (§. 29) heißt die Gleichung der Ellypſe in Vergleichung gegen den Parameter. Dieſe Gleichung kann ſo, wie die Gleichung aus den Axen dienen, die krumme Linie zu beſchreiben, und die Eigenſchaften derſelben zu entdecken. Ja ſie iſt noch einfacher, weil $\frac{2a}{p}$ ein Verhältniß von ſimpeln Linien, da hingegen $\frac{aa}{bb}$ ein Verhältniß von Quadraten iſt.

§. 31.

Funfzehnder Zuſatz. Das Quadrat $\overline{PM}^2$ der Ordinate der groſſen Axe iſt kleiner, als das Rechteck aus AP und dem Parameter dieſer Axe p.

Beweis. Man hat im §. 28 geſehen, daß dieſer Parameter $p = \frac{2bb}{a}$ ſey. Nun weiß man aber daß $GP = x$ und $AP = a - x$ iſt. Man muß folglich beweiſen, daß $\overline{PM}^2 < AP \times p$, oder daß $yy < (a - x)\, p$ oder endlich daß $yy < (a - x)\, \frac{2bb}{a}$ ſey. Man erinnere ſich deswegen daran, daß $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ ſey (§. 17), ſo verhält ſich $\overline{PM}^2 : AP \times p = \frac{aabb - bbxx}{aa} : (a - x)\, \frac{2bb}{a}$; und wenn man die 2 letzten Glieder durch $\frac{bb}{a}$ dividirt, $= \frac{aa - xx}{a} : (a -) \, 2$; und wenn man noch einmal mit $a - x$ dividirt $= \frac{a + x}{a} : 2$; oder wenn man mit a multiplicirt, $= a + x : 2a$. Folglich iſt $\overline{PM}^2 : AP \times p = a + x : 2a$. oder $= BP : BA$. Es iſt aber $BP < BA$. Folglich iſt auch $\overline{PM}^2 < AP \times p$. W. z. E. W.

* §. 32.

Anmerkung. Weil alſo das Quadrat $\overline{PM}^2$ der Ordinate PM nicht ſo groß iſt, als $AP \times p$, oder weil zu dieſer Gleichheit noch etwas fehlet: ſo haben die alten Geometer dieſe krumme Linie deswegen eine Ellypſe genennet Denn das griechiſche Wort Ἐλλειπσις, wovon das Wort Ellypſe offenbar hergeleitet iſt, bedeutet einen Mangel oder etwas fehlendes.

§. 33.

§. 33.

Sechzehnder Zuſatz. Wenn man mit dem Halbmeſſer AG $=a$ aus dem Endpunkt C oder D der kleinen Axe, als aus einem Mittelpunkt auf der groſſen Axe die Punkte F und f bemerket, und wenn man von dieſen ſolchergeſtalt beſtimmten Punkten nach einem Punkt der krummen elliptiſchen Linie die Linien FM und fM ziehet, ſo iſt die Summe derſelben FM $+f$M jederzeit der groſſen Axe AB oder $2a$ gleich (Fig. 47).

Beweis. Man benenne die Entfernung GF oder Gf der Punkte F und f vom Centrum G mit dem Buchſtaben c und erinnere ſich des 5ten Hauptſatzes (§. 12), woraus folgende Gleichung entſtand: $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ (§. 14), woraus man ſchloß, daß $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ ſey (§. 17). Auch bemerke man, daß, wenn man CF $=$ AG $=a$ ziehet, wegen des recht winklichten Triangels FGC, $\overline{FG}^2 = \overline{FC}^2 - \overline{CG}^2$ oder $cc = aa - bb$ (a) und wenn man von dem Punkt M die Ordinate PM ziehet, FP $=$ FG $-$ GP $= c - x$; Folglich iſt $\overline{FP}^2 = cc - 2cx + xx$, und P$f$ $=$ fG $+$ GP $= c + x$; Folglich $\overline{Pf}^2 = cc + 2cx + xx$. Folglich iſt $\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{FP}^2 = yy + cc - 2cx + xx$; wenn man folglich in dieſer lezten Gleichung den Werth von cc und yy ſetzet, ſo iſt $\overline{FM}^2 = \frac{aabb - bbxx}{aa} + aa - bb - 2cx + xx$,

---

(a) Weil $cc = aa - bb$, ſo iſt $bb = aa - cc = (a - c)(a + c)$. Nun iſt $(a - c) =$ AG $-$ GF $=$ AF und $a + c =$ GB $+$ GF $=$ FB. Woraus man ſiehet, daß bb oder $\overline{CG}^2 =$ AF $\times$ FB ſey, oder daß AF $= \frac{\overline{CG}^2}{FB}$.

oder wenn man alles unter einerley Benennung bringt, $\overline{FM}^2 = \frac{aabb - bbxx + a^4 - aabb - 2a^2cx + aaxx}{aa} = \frac{a^4 - 2a^2cx + aaxx - bbxx}{aa}$; ſetzet man folglich cc an der Stelle von $aa - bb$, wodurch xx multiplicirt wird, ſo iſt $\overline{FM}^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + ccxx}{aa}$ und wenn man folglich die Quadratwurzel ausziehet, $FM = \frac{aa - cx}{a}$.

Eben ſo iſt $\overline{fM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{Pf}^2 = yy + cc + 2cx + xx$ und wenn man die vorige Subſtitution macht, $= \left(\frac{aabb - bbxx + a^4 - aabb + 2a^2cx + a^2x^2}{aa}\right) = \frac{a^4 + 2a^2cx + a^2 - b^2x^2}{aa}$, und wenn man an die Stelle von $a^2 - b^2$, wodurch xx multiplicirt wird, cc ſetzet $= \frac{a^4 + 2a^2cx + ccxx}{aa}$. Wenn man folglich die Quadratwurzel ausziehet ſo iſt $fM = \frac{aa + cx}{a}$

Folglich iſt $FM + fM = \frac{aa - cx}{a} + \frac{aa + cx}{a} = \frac{2aa}{a} = 2a$.
W. z. E. W.

§. 34.

Erſter Zuſatz. Hieraus folgt, daß wenn man durch einen beliebigen Punkt M (Fig. 49) der krummen Linie eine Linie fM ziehet, und ſie ſo lange verlängert, bis $MP = MF$ iſt; wenn man alsdenn PF ziehet, und endlich durch die Mitte L dieſer Linie und durch den gegebenen Punkt M eine andere Linie OLMS ziehet; Es folgt, ſage ich, aus dem vorigen, daß dieſe Linie die Tangente an dem Punkt M ſey.

Beweis. Es iſt bloß dieſes zu beweiſen, daß OLMS die

die krumme Linie nur in einem einzigen Punkt berühre. Nun ſtehet aber OLMS (Conſtr.) auf der Mitte der Linie PF perpendiculair. Wenn ſie folglich die krumme Linie in irgend einem andern Punkt Q berührte, ſo würde QP = QF ſeyn; Folglich $fQ + QP = fQ + QF = 2a = AB$ (§. 33), Es iſt aber $fM + MF$ auch $= 2a$ (§ 33) $= fM + MP$ (Conſtr.); Folglich iſt $fQ + QP = fM + MP = fP$. Das heißt, eine grade Linie fP würde einer krummen Linie fQP gleich ſeyn, die zwiſchen den nämlichen Punkten P und f wäre. Dieſes iſt aber unmöglich (Geom.); Folglich —

§. 35.

Zweyter Zuſatz. Es iſt der Winkel $FMO = fMS$. Denn $FMO = PMO$ (Conſtr.) $= fMS$ ſeinem Verticalwinkel; Folglich iſt $FMO = fMS$, das heißt, wenn man von dem Punkten F und f die Linien FM und fM an einem und denſelben Punkt M ziehet, ſo wird der Winkel, den ſie mit der Tangente an dieſem Punkte machen, auf beyden Seiten ſich gleich ſeyn.

§. 36.

Dritter Zuſatz. Wenn man folglich in einem der Punkte F einen leuchtenden Körper oder ein Feuer ſetzte, ſo werden alle Licht- oder Feuerſtrahlen, die auf die krumme Linie fallen, in einen andern Punkt f zurückgeworfen werden; denn giengen die reflectirten Strahlen nicht nach f, ſo würde der Einfalls- und Reflexionswinkel ſich nicht gleich ſeyn. Deswegen werden die Punkte F und f, die nach dem 6ten Hauptſatze (§. 33) beſtimmt ſind, Brennpunkte genennet.

Dieſe Eigenſchaft der Ellypſe iſt ſehr merkwürdig. Wir werden alsdenn Gebrauch davon machen, wenn wir dieſe krumme Linie auf die ausübenden Künſte anwenden.

* §. 37. I.

Die Entfernung AF (Fig. 47) des einen Brennpunkts F einer Ellypſe von dem nächſten Endpunkte der Axe iſt gröſſer, als der 4te Theil des Parameters dieſer krummen Linie; das heißt: $AF > \frac{p}{4}$.

Beweis. $AF = \frac{\overline{CG}^2}{FB}$ (Anmerk. §. 33), und $p = \frac{4bb}{2a}$ (28) folglich iſt $\frac{p}{4} = \frac{bb}{2a} = \frac{\overline{CG}^2}{AB}$. Nun iſt klar, daß $\frac{\overline{CG}^2}{FB} > \frac{\overline{CG}^2}{AB}$ weil $FB < AB$ iſt; folglich iſt $AF > \frac{p}{4}$.

* §. 37. II.

Wenn man durch das Centrum einer Ellypſe G (Fig. 49) mit einer beliebigen Tangente HR eine Parallellinie NV ziehet, ſo wird dieſe Parallellinie von der Linie FK, die aus dem entfernteſten Brennpunkt F nach dem Berührungspunkt K gezogen wird, ein Stück TK herunter ſchneiden, welches ſo groß iſt, als die Helfte der groſſen Axe: das heißt $TK = a = \frac{AB}{2}$.

Beweis. Man ziehe aus dem andern Brennpunkt f mit NV eine Parallellinie fe, ſo iſt der Winkel $Kef = KTV = HKT$, als deſſen Wechſelwinkel, $= fKR$ (§. 35) $= efK$, als deſſen Wechſelwinkel (Conſtr.): Folglich iſt der Winkel $Kef = efK$; folglich $Ke = Kf$ und $Fe = FK - Ke = FK - Kf$. Da ferner $FG = Gf$, ſo iſt auch $FT = Te$ oder $Te = \frac{Fe}{2} = \frac{FK - Kf}{2}$ (weil $Fe = FK - Kf$); Folglich iſt $Te + eK = \frac{FK - Kf}{2} + Kf$ (denn es iſt

iſt $Kf = eK$); Folglich iſt $TK = \frac{FK + Kf}{2} = \frac{AB}{2}$ (§. 33) W. z. E. W.

§. 38.

Fünfter Zuſatz. Es iſt offenbar, wenn man die Perpendiculairlinie Md aus dem Berührungspunkt M aufrichtet, daß dieſe nicht durch das Centrum G gehen werde; weil Md und FP (Conſtr.) auf der Tangente OS perpendiculair ſtehen; ſo geben die ähnlichen Triangel fPF und fMd folgendes Verhältniß: $fM : MP$ oder $MF = fd : dF$. Es iſt aber $fM > MF$. Folglich iſt auch $fd > dF$; folglich iſt der Punkt d der Linie Md, die auf der krummen Linie perpendiculair ſtehet, nicht im Mittelpunkt der Ellypſe. Hier iſt alſo noch ein anderer Unterſchied zwiſchen dem Cirkel und der Ellypſe. Denn im Cirkel gehet eine jede Linie, die auf der Peripherie perpendiculair ſtehet, durch den Mittelpunkt.

§. 39.

Sechster Zuſatz. Man ſiehet alſo, daß eine jede Linie MG, die von einem Berührungspunkt M nach dem Mittelpunkt G der Ellypſe gezogen wird, mit der Tangente einen ſchiefen Winkel GMO mache. (Man ſetzt voraus, daß der Berührungspunkt keiner von den Endpunkten der Axen ſey) und daß der Winkel FMf durch die Perpendiculairlinie Md in 2 gleiche Theile getheilet werde.

§. 40.

Wenn hingegen der Winkel FMf durch die Linie Md in 2 gleiche Theile getheilet iſt, ſo behaupte ich

1) daß dieſe Linie auf der Tangente OS an dem Berührungspunkt M perpendiculair ſtehe.

2) Daß dieſe nemliche Linie OS, die an das äuſſerſte Ende

de dieſer Linie Md perpendiculair gezogen iſt, nothwendig eine Tangente der Ellypſe an dem Punkt M ſey.

Beweis. 1) $dMF = dMf$ (Beding.) und $FMO = fMS$ (§. 35.) folglich iſt $dMO = dMS$: folglich iſt Md perpendiculair auf OS

2) Weil der Winkel $dMO = dMF + FMO = dMf + fMS$ und weil $dMF = dMf$ (Beding.) ſo iſt $FMO = fMS = PMO$ als einem Verticalwinkel. Folglich iſt $FMO = PMO$. Wenn man deswegen $MP = MF$ macht, und die Linie PF ziehet, ſo iſt der Winkel $MPL = MFL$ und der Winkel $MLP = MLF$; das heißt, OS iſt gegen die Baſis PF des gleichſchenklichten Triangels PMF perpendiculair, folglich gehet ſie durch die Mitte dieſer Grundlinie; folglich iſt ſie eine Tangente an dem Punkt M. (§. 34.)

* §. 41.

Siebender Zuſatz. Laſſet uns nach Gefallen eine Linie DM mit der groſſen Axe AB einer Ellypſe parallel ziehen (Fig. K.), und aus dem Punkt, wo ſie dieſe krumme Linie berührt, laſſet uns nach den Brennpunkten F und f, die Linien MF und Mf ziehen. Laſſet uns den Winkel FMf durch die unbeſtimmte Linie LH in 2 gleiche Theile theilen, ſo wird ſie alsdenn auf der Tangente CME, die an dem Punkt M gezogen iſt, perpendiculair ſtehen. (§. 40.) Laſſet uns $MD = Mf$ machen. Wenn man nun aus den Punkten D und f die Perpendiculairlinie DL und fH auf LH ziehet, ſo verhalten ſich dieſe zu einander, wie die groſſe Axe zur Entfernung der beyden Brennpunkte von einander, das heißt, $DL : fH = AB : Ff$.

Beweis. Vermöge der Bedingung iſt DM mit AT parallel, und alſo der Winkel $DML = ATM$. Wenn man nun

nun die Perpendiculairlinie MP fallen läßt, ſo ſind die rechtwinklichten Triangel DLM und MPT ſich ähnlich. Folglich verhält ſich DL : MP = MD oder Mf : MT. Ziehet man nun aber die Linie TS auf Mf perpendiculair, ſo ſind die rechtwinklichten Triangel fHM uud MST, die den Winkel fMH mit einander gemein haben, ſich ähnlich; folglich verhalten ſich Mf : MT = fH : TS; folglich DL : MP = fH : TS oder DL : fH = MP : TS = fM : fT. (*) Wenn man aber fM ſo lange verlängert, bis MO = MF wird, und alsdenn OF ziehet, die gegen die Tangente CE perpendiculair (Bew. §. 34.) und folglich parallel mit MT oder LH ſeyn wird, die auch auf der nemlichen Linie CE perpendiculair ſtehet, (Conſtr. Geometr.) ſo bekommt man das Verhältniß fM : fT = fO : Ff; folglich DL : fH = fO : Ff = fM + MF : Ff. (weil fO = fM + MF) = AB : Ff. (Denn fM + MF = AB (§. 33.); folglich DL : fH = AB : Ff. W. z. E. W.

Wenn man im umgekehrten Falle die Linie fH auf die Linie LMH perpendiculair ziehet, die einen Winkel FMf, der durch 2 Linien MF und Mf, die von dem nemlichen Punkt einer Ellypſe nach ihren beyden Brennpuncten F und f gezogen ſind, gemacht wird, in 2 gleiche Theile theilet, und wenn man hernach eine 4te Proportional-Linie zu den 3 Linien Ff, AB und fH ſucht, und an dem Punkt M auf der verlängerten Linie HM einen rechtwinklichten Triangel MDL conſtruirt, deſſen Hypothenuſe = Mf oder DM, und worinn die eine von den beyden andern Seiten = DL iſt, ſo wird alsdenn DM mit AB parallel ſeyn.

Be-

(*) Denn in den beyden Triangeln fPM und fST iſt 1) der rechte Winkel bey S und P in beyden ſich gleich 2) der Winkel TfS = PfM. Folglich ſind dieſe beyden Triangel ſich ähnlich; Folglich verhält ſich MP : TS = fM : fT. Es verhielte ſich aber auch DL : fH = MP : TS : Folglich iſt auch DL : fH = fM : fT. B.

Beweis. Es verhält ſich, vermöge der Conſtruction, DL : fH = AB : Ff = fO : fF (weil fO = AB Conſtr. und §. 35.) = fM : fT, (weil MT mit OF, vermöge der Conſtruction, parallel iſt) = DM : fT, (weil DM = fM nach der Conſtruction.) Folglich iſt DL : fH = DM : fT oder DL : DM = fH : fT. Folglich ſind die rechtwinklichten Triangel DLM und fHT ſich ähnlich. (Geometr.) Folglich iſt der Winkel DML = fTH = ATM. Folglich haben die 2 Linien DM und AT oder AB eine gleiche Neigung gegen die nämliche Linie LH; Folglich ſind ſie unter einander parallel. W. z. E. W.

Man muß ſich bemühen, dieſen Zuſatz nebſt dem umgekehrten Satz von ihm wohl zu verſtehen. Wir werden ihn in der Dioptrik gebrauchen.

* §. 42.

Achter Zuſatz. Eine jede Tangente OS (Fig. 49.) an irgend einem Punkt M der Ellypſe, die von den Endpunkten der Axen unterſchieden iſt, hat nothwendig eine Neigung in irgend einem Punkt O mit der verlängerten groſſen Axe zuſammen zu ſtoſſen. Denn wäre OS mit der groſſen Axe AB parallel, ſo würde der Winkel FfM = LMP = LMF (Conſtr) = MfF, als Wechſelwinkel, ſeyn; Folglich würde der Winkel FfM dem Winkel MFf gleich ſeyn; Folglich Mf = MF, welches unmöglich iſt; Folglich iſt die Tangente OS nicht mit der groſſen Axe AB parallel; Folglich ſtößt ſie mit derſelben würklich in einem Punkt O zuſammen, oder hat wenigſtens eine Neigung dazu.

* §. 43.

Neunter Zuſatz. Die Diſtanz FA des einen Brennpunkts F von dem nächſten Endpunkt A der groſſen Axe, iſt gröſſer als der 4te Theil des Parameters der Hauptaxe AB der Ellypſe.

Denn

Denn es iſt FA = AG — FG = $a - c$ und der Parameter $p = \frac{2bb}{a}$ (§. 28.) Folglich $\frac{p}{4} = \frac{2bb}{4a} = \frac{bb}{2a}$. Nun verhält ſich aber $a - c$ (FA) : $\frac{bb}{2a} = 2aa - 2ac : bb$, (wenn man nämlich die 2 erſten Glieder dieſes Verhältniſſes mit $2a$ multiplicirt, und wenn man ferner nach der Note zum §. 33 an die Stelle von bb, $aa - cc$ ſetzet) wie $2aa - 2ac : aa - cc$; und wenn man die beyden lezten Glieder durch $a - c$ dividirt, wie $2a : a + c$ Folglich verhält ſich FA : $\frac{bb}{2a}$ oder $\frac{p}{4} = 2a : a + c$ = AB : BF. Es iſt aber AB > BF; Folglich auch FA > $\frac{p}{4}$ (*).

§ 44.

Zehnter Zuſatz. Die Ordinate FN (Fig. 48) an einem von den Brennpunkten der Ellypſe, iſt ſo groß, als $\frac{p}{2}$ oder als die Helfte des Parameters der groſſen Axe AB.

Beweis. Nach dem fünften Hauptſatz (§. 12) iſt AF = AG — FG = $a - c$ und FB = $a + c$: Folglich iſt AF × FB = $(a - c)(a + c) = aa - cc = bb$ (Anmerk. zum §. 33): Folglich verhält ſich $\overline{FN}^2$ (yy) : AF × FB (bb) = $\overline{CG}^2$ (bb) : $\overline{AG}^2$ (aa) (§. 12.) Folglich iſt $\overline{FN}^2$ oder $yy = \frac{b^4}{aa}$; Folglich FN = $\frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$ (§. 28). W. z. E. W.

(*) Man ſehe den §. 37. I. allwo dieſer nämliche Satz ſchon einmal auf eine etwas veränderte Art bewieſen worden iſt. B.

* §. 45.

Siebender Hauptſatz. Wenn man in der 50ten Figur an dem Berührungspunkt M eine Linie Md annimmt, die gegen die Tangente OM perpendiculair iſt, und die Ordinate MP an die Axe AB ziehet, ſo iſt der halbe Unterſchied der Linien FM und fM, die aus den Brennpunkten an dieſen Punkt M gezogen worden $= \frac{cx}{a}$.

Beweis. Nach dem 6ten Hauptſatze (§ 33) war $2a = f\text{M} + \text{FM}$; Wenn man nun den Unterſchied zwiſchen dieſen 2 Linien $2d$ nennet, ſo wird der halbe Unterſchied $= d$ ſeyn; Folglich iſt $\text{FM} = a + d$ und $\text{FM} = a - d$ (*); Folglich

(*) Es iſt $f\text{M} + \text{FM}$ eine Summe und nach der Figur fM gröſſer als FM; Folglich iſt auch zwiſchen ihnen eine Differenz denkbar. Nun iſt die ganze Summe $f\text{M} + \text{FM} = 2a$; Folglich die halbe Summe $= a$. Iſt die ganze Differenz $= 2d$, ſo iſt die halbe Differenz $= d$ Es will alſo der Ausdruck im Texte $f\text{M} = a + d$ und $\text{FM} = a - d$ ſo viel ſagen: Man bekommt die gröſte von 2 Gröſſen, die zuſammen eine Summe ausmachen, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt und man bekommt die kleinſte von dieſen Gröſſen, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz ſubtrahirt. Daß aber dieſes richtig ſey, kann man folgendermaſſen erkennen. Es ſey die gröſte Gröſſe $= \text{Q}$ und die kleinſte $= q$. Die Summe derſelben $= \text{S}$ und und ihre Differenz $= \text{D}$; ſo entſtehet ohne Zweifel die Summe, wenn ich die beyden Gröſſen Q und q addire: Folglich iſt $\text{Q} + q = \text{S}$. Die Differenz aber entſtehet, wenn von Q die kleinere abgezogen wird; Folglich iſt $\text{Q} - q = \text{D}$. Es iſt alſo

$$\text{Q} + q = \text{S}$$
$$\text{Q} - q = \text{D}$$

Folglich $2\,\text{Q} = \text{S} + \text{D}$

Folglich $\text{Q} = \frac{\text{S} + \text{D}}{2} = \frac{1}{2}\text{S} + \frac{1}{2}\text{D}$

Eben

lich $\overline{fM}^2 = aa + 2ad + dd$ und $\overline{FM}^2 = aa - 2ad + dd$; Ferner iſt $FP = FG - GP = c - x$ und $Pf = Gf + GP = c + x$; Folglich $\overline{FP}^2 = cc - 2cx + xx$ und $\overline{Pf}^2 = cc + 2cx + xx$: Nach dieſer Vorausſetzung kann bewieſen werden, daß $d = \frac{cx}{a}$.

Vermöge des rechtwinklichten Triangels FMP iſt $\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2$ oder $aa - 2ad + dd = cc - 2cx + xx + yy$ (A) Eben ſo erhalten wir durch den rechtwinklichten Triangel fPM folgende Gleichung: $\overline{fM}^2 = \overline{Pf}^2 + \overline{PM}^2 = aa + 2ad + dd = cc + 2cx + xx + yy$ (B). Ziehen wie dieſe 2 Gleichungen A und B gehörig von einander ab, ſo iſt $4ad = 4cx$; Folglich $d = \frac{cx}{a}$. W. z. E. W.

* §. 46.

Achter Hauptſatz. Machet man die Verlängerung $MV = FM$, ſo iſt FM oder $MV = \frac{aa - cx}{a}$.

Beweis. Weil nach dem Beweiſe des §. 45 FM oder $MV = a - d$ und weil $d = \frac{cx}{a}$ (§. 45), ſo iſt $FM = MV = a - \frac{cx}{a} = \frac{aa - cx}{a}$. W. z. E. W.

Eben ſo: $Q + q = S$

$Q - q = D$

Folglich $2q = S - D$

$q = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} D$.

Dieſe Ausdrücke beweiſen die Richtigkeit der Benennung des Herrn Autors. B.

* §. 47.

Neunter Hauptſatz. Die Entfernung Fd des Brennpunkts F von dem Punkt d, wo die Perpendiculairlinie Md auf die Tangente der Axe ſtößt, iſt $=\frac{a^2c-c^2x}{aa}$.

Beweis. Nachdem man FV, welche Linie nothwendig auf OM perpendiculair ſtehet (Beweis §. 34), gezogen hat, ſo werden die Triangel fMd und fVF ſich ähnlich ſeyn; Folglich verhält ſich fV : fF$=$MV oder FM : fd. Es iſt aber fV$=f$M$+$FM$=2a$ (§. 33); fF$=2c$ und MV oder FM$=\frac{aa-cx}{a}$ (§. 46). Folglich, wenn man dieſe analytiſchen Werthe in der vorhergehenden Proportion ſetzet; ſo verhält ſich $2a : 2c = \frac{aa-cx}{a}$: Fd. Folglich iſt F$d=\frac{a^2c-c^2x}{aa}$. W. z. E. W.

* §. 48.

Zehnter Hauptſatz. Man behalte immer die obige Conſtruction, ſo iſt der Ausdruck für die Subtangente Pd dieſer: Nämlich es iſt P$d=\frac{bbx}{aa}$.

Beweis. Man weiß, daß FP$=$FG$-$GP$=c-x$ und F$d=\frac{a^2c-c^2x}{aa}$ (§. 47). Nun iſt P$d$$=Fd-FP=\frac{a^2-c^2x}{aa}-c+x$, und wenn man alles unter einerley Benennung bringt, und was ſich aufheben läßt, wegnimmt $=\frac{aax-ccx}{aa}$; Folglich iſt P$d=\frac{a^2x-c^2x}{aa}$. Es iſt aber $a^2-c^2=bb$. Folglich iſt P$d=\frac{bbx}{aa}$. W. z. E. W.

* §. 49.

* §. 49.

Zuſatz. Hieraus folgt, daß GP : $Pd = 2a : p$. Denn weil $GP = x$ und $Pd = \frac{bbx}{aa}$ (§. 48), ſo verhält ſich auch GP : $Pd = x : \frac{bbx}{aa} = aax : bbx = aa : bb = 2a : p$. (Bew. §. 28); Folglich GP : $Pd = 2a : p$. W. z. E. W.

* §. 50.

Eilfter Hauptſatz. Es iſt die Subtangente $PO = \frac{aa - xx}{x}$.

Beweis. Weil der Triangel OMd bey M rechtwinklicht und weil MP auf Od perpendiculair iſt, ſo verhält ſich $Pd : PM = PM : PO$ (Geometr.) Nun iſt $Pd = \frac{bbx}{aa}$ (§. 48) und $PM = y$. Folglich $\frac{bbx}{aa} : y = y : PO = \frac{aayy}{bbx}$. Allein $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (§. 17) Folglich iſt $PO = \frac{aa\,(aabb - bbxx)}{(aa)\,(bbx)} = \frac{aa - xx}{x}$. W. z. E. W.

*§. 51.

Ein anderer Beweis, der aus der allgemeinen Methode, die Tangenten der krummen Linien zu ziehen, die im §. 28. 29. der Parabel erklärt iſt, gefolgert iſt.

Wenn wir den Faden der Wahrheiten, die wir eben veſtgeſetzt haben hätten, zerreiſſen wollen, ſo hätten wir gleich anfangs und unmittelbar nach dem 4ten Hauptſatze (§. 10) den Werth der Subtangente $PO = \frac{aa - xx}{x}$ finden können, wie wir ſogleich zeigen werden (§. 50).

Geſetzt alſo, man wolle an dem Punkt N der Ellypſe eine Tangente ziehen, ſo iſt offenbar, daß ſie irgend in einem Punkt O die verlängerte Axe berühren müſſe (§ 42) Indem man folglich die Ordinate NP ziehet, ſo iſt es klar, wenn man in dem rechtwinklichten Triangel NOP das Verhältniß der Subtangente PO gegen eine bekannte Gröſſe beſtimmen könnte, daß man die Tangente ON habe.

Laſſet uns deswegen annehmen, daß ON eine Sekante ſey, daß heißt, daß ſie die krumme Linie in 2 Punkten N und Q durchſchneide, und daß man 2) die Ordinate QT gezogen habe. Es ſey ferner $AG = a$; $GP = x$; $PT = r$; $GT = GP - PT = x - r$; $AP = a - x$; $PB = a + x$; Folglich iſt $AP \times PB = aa - xx$; $AT = AG - GP + PT = a - x + r$. $TB = PG + GB - PT = a + x - r$; Folglich $AT \times TB = (a - x + r)(a + x - r) = aa - xx + 2rx - rr$; $PO = s$; $OT = PO + PT = s + r$; Folglich $\overline{PO}^2 = ss$ und $\overline{OT}^2 = ss + 2rs + rr$.

Laſſet uns itzt bemerken, daß nach dem 4ten Hauptſatz (§. 10) folgendes Verhältniß ſtatt habe: $\overline{QT}^2 : \overline{PN}^2 = AT \times TB : AP \times PB$ und wegen der ähnlichen Triangel OTQ und OPN verhält ſich $\overline{QT}^2 : \overline{PN}^2 = \overline{OT}^2 : \overline{PO}^2$. Folglich iſt $AT \times TB : AP \times PB = \overline{OT}^2 : \overline{PO}^2$. Das iſt, wenn man für die Glieder dieſer Propoſition die analytiſchen Gröſſen ſetzt: $aa - xx + 2rx - rr : aa - xx = ss + 2rs + rr : ss$. Wenn man folglich das 2te Glied vom erſten und das 4te vom 3ten abzieht, ſo verhält ſich $2rx - rr : aa - xx = 2rs + rr : ss$; Wenn man folglich die Producte aus den mittelſten und äuſſerſten Gliedern macht, ſo iſt $2rs^2x - r^2s^2 = 2a^2rs - 2rsx^2 + a^2r^2 - r^2x^2$, oder wenn man durch r dividirt, ſo iſt $2ssx - rss = 2a^2s - 2sx^2$

+

$+a^2r-rx^2$ (B). Dieſes iſt die Gleichung, worauf man kommt, wenn die Linie ONQ eine Sekante iſt. Allein, wenn man ſich einbildet, daß ſie ſich um den Punkt O drehe, bis die Punkte N und Q zuſammen fallen, welches geſchiehet, wenn ſie die Tangente wird, ſo wird QT alsdenn NP werden und die Differenz PI der Abſciſſen wird o werden. Folglich iſt alsdenn $r=o$. Dadurch werden alle Glieder in der Gleichung B in welchen r ſich findet, wegfallen. Folglich wird dieſe Gleichung folgende werden: $2ssx=2aas-2ssx$. Wenn man folglich mit $2s$ dividirt, ſo iſt $sx=aa-xx$ und folglich s oder $PO=\frac{aa-xx}{x}$, wie im §. 50.

* §. 52.

Erſter Zuſatz. Folglich iſt $PO \times x=aa-xx=(a-x)(a+x)$. Folglich verhält ſich $x : a-x=a+x$: PO oder GP : AP = BP : PO. In dieſer Proportion ſind die 3 erſten Glieder gegeben, wenn man den Punkt N und die Axe AB kennet. Dieſe determinirt PO und folglich auch ON.

* §. 53.

Es ſey hingegen der Punkt N und die Axe AB einer Ellypſe gegeben, und man ſetze das Verhältniß an: GP : AP = BP zu einem 4ten Gliede. Dieſes Glied trage man von P in O um ON zu ziehen. Nun behaupte ich, daß dieſe Linie ON die Tangente in dem Punkt N ſeyn werde.

Denn wäre ſie die Tangente nicht, ſo würde man an den Punkt N eine andere Tangente NS ziehen können, welche oberhalb oder unterhalb ON fiele, und man würde alsdenn folgendes Verhältniß haben: GP : AP = BP : PS (§. 52; weil in dieſem Falle PS die Subtangente ſeyn würde. Es verhält ſich aber vermöge der Bedingung GP : AP =

BP : PO ; Folglich wäre PS = PO, welches unmöglich iſt.

Man hat alſo durch dieſe Umkehrung des vorigen Satzes ein 2tes Mittel, an einen gegebenen Punkt einer Ellypſe eine Tangente zu ziehen, ohne ſeine Zuflucht zum §. 34 zu nehmen.

* §. 54.

Zweyter Zuſatz. Wenn man noch $GP = x$ zu $PO = \frac{aa - xx}{x}$ addirt (§. 50. 51), ſo iſt $GP + PO = x + \frac{aa - xx}{x} = \frac{xx + aa - xx}{x} = \frac{aa}{x}$. Folglich iſt $GO = \frac{aa}{x}$ oder $GO \times x = a \times a$ oder $GO \times GP = GA \times GA$. Folglich verhält ſich GP ; GA = GA : GO. Dieſes iſt ein drittes Mittel die Tangente ON zu bekommen.

* §. 55.

Dritter Zuſatz. Wenn man $GA = a$ von $GO = \frac{aa}{x}$ abziehet (§. 54) ſo iſt $GO - GA = \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x} = AO$. Folglich $AO \times x = aa - ax = (a - x)\,a$ oder $AO \times GP = AP \times GA$. Folglich verhält ſich GP : AP = GA : AO : Ein 4tes Mittel eine Tangente an den Punkt N zu ziehen.

* §. 56.

Vierter Zuſatz laſſet uns die kleine Axe DC verlängern, bis ſie mit der Tangente OM in R zuſammen ſtößt, und laſſet uns die Ordinate ML dieſer Axe ziehen, ſo wird der Ausdruck für die Subtangente LR folgender ſeyn: $LR = \frac{bb - yy}{y}$.

Beweis. Es iſt $GL = PM = y$ und wegen der ähnlichen

lichen Triangel OGR und OPM verhält ſich GR : PM = GO : OP Es iſt aber GO $= \frac{aa}{x}$ (§ 54) und OP $= \frac{aa-xx}{x}$ (§. 50. 51); Folglich wird aus der vorigen Proportion folgende: GR : $y = \frac{aa}{x} : \frac{aa-xx}{x}$; Folglich iſt GR $= \frac{aay}{aa-xx}$; Folglich iſt LR = GR — GL $= \frac{aay}{aa-xx} - y = \frac{aay-aay+yxx}{aa-xx}$; Folglich iſt LR $= \frac{yxx}{aa-xx}$ (A); Es iſt aber $xx = \frac{aabb-aayy}{bb}$ (§. 16). Wenn man daher den Werth von xx in der Gleichung A ſetzet, ſo wird daraus

$$LR = \frac{\frac{aabby-aay^3}{bb}}{aa - \frac{aabb+aayy}{bb}} = \frac{\frac{aabby-aay^3}{bb}}{\frac{aabb-aabb+aayy}{bb}}$$

$= \frac{aabby-aay^3}{aayy} = \frac{bb-yy}{y}$, wenn man durch aay dividiret: Folglich iſt LR $= \frac{bb-yy}{y}$. W. z. E. W.

* §. 57.

Fünfter Zuſatz. Weil LR $= \frac{bb-yy}{y}$, ſo iſt LR $\times y = bb - yy\ (b+y)\ (b-y)$; folglich verhält ſich $y : b+y = b-y$: LR oder GL : DL = LC : LR. Wenn folglich der Punkt M und die kleine Axe gegeben ſind, und man ziehet die Ordinate ML, ſo iſt die Subtangente LR beſtimmt, und folglich auch die Tangente MR.

* §. 58.

Sechſter Zuſatz. Wenn man y = GL zu der Größ-

ſe $\frac{bb-yy}{y}$ addirt, ſo iſt LR + GL $= \frac{bb-yy}{y} + y = \frac{bb-yy+yy}{y} = \frac{bb}{y}$; Folglich iſt LR + GL, das heißt, GR $= \frac{bb}{y}$ oder GR $\times y = bb$. Daraus ziehet man das Verhält⸗ niß $y : b = b$: GR oder GL : GC $=$ GC : GR Die⸗ ſes giebt ein Mittel GR und folglich die Tangente MR zu be⸗ kommen.

*§. 59.

Siebender Zuſatz. Wenn man $b =$ GC von $\frac{bb}{y} =$ GR ſubtrahirt, ſo iſt GR — GC $= \frac{bb}{y} - b = \frac{bb-by}{y}$; Folg⸗ lich iſt GR — GC, das heißt, CR $= \frac{bb-by}{y}$ oder CR $\times y = bb - by = (b-y)\, b$. Folglich $y : b = b - y$: CR oder GL : GC $=$ LC : CR. Dieſes iſt ein neues Mittel die Tangente MR zu bekommen.

§. 60.

Anmerkung. Alle dieſe Zuſätze beweiſen, daß man ſich der groſſen oder kleinen Axe bedienen könne, um an irgend einen Punkt, der von dem Endpunkt der Axe unterſchieden iſt, eine Tangente zu ziehen. Denn es iſt leicht, das Umge⸗ kehrte aller dieſer Sätze als wahr zu beweiſen, ſo wie man es im §. 53 gethan hat.

§. 61.

Achter Zuſatz. (*a*) An den Endpunkten der groſſen Axe

(*a*) Man kann die folgenden §. von 61 — 66 vorbeyſchlagen, doch

Axe AB (Fig. 51) laſſet uns die Perpendiculairlinien BQ und AS aufrichten, die in den Punkten Q und S durch die Tangente OS an dem Punkt M determinirt ſind, ſo wird das Product aus dieſen Perpendiculairlinien dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich ſeyn, das heißt, $BQ \times AS = \overline{CG}^2$.

Beweis. Man ziehe die Ordinate $PM = y$ und es ſey immer $AG = GB = a$; $GP = x$; $OP = \frac{aa - xx}{x}$ (§. 50. 51); So iſt $OB = OP + GP - GB = \frac{aa - xx}{x} + x - a$, und wenn man alles unter einerley Benennung bringt, und was ſich aufhebt, wegläßt, $= \frac{aa - ax}{x}$; Folglich iſt $OB = \frac{aa - ax}{x}$. Eben ſo iſt $OA = BA + OB = 2a + \frac{aa - ax}{x} = \frac{2ax + aa - ax}{x} = \frac{ax + aa}{x}$; Folglich iſt $OA = \frac{ax + aa}{x}$. Dieſes ſey voraus geſezt.

Durch die ähnlichen Triangel OPM, und OBQ bekommen wir folgendes Verhältniß: $OP : PM = OB : BQ$, oder wenn wir die analytiſchen Ausdrücke ſubſtituiren, $\frac{aa - xx}{x} : y = \frac{aa - ax}{x} : BQ$. Wenn wir folglich das 1ſte und 3te Glied durch $\frac{a - x}{x}$ dividiren, und darauf das 3te Glied zum 2ten machen, ſo verhält ſich $a + x : a = y :$ BQ

doch ſind die Zuſätze von einem ſehr groſſen Nutzen in der phyſiſchen Aſtronomie; vornämlich zum Verſtande des Buchs des Herrn Sigorgne. Und man findet ſie nirgends mit einer gehörigen Ausführlichkeit bewieſen. Ich habe mir in dieſem Betracht Mühe gegeben, nichts auszulaſſen, welches Anfänger aufhalten könnte.

BQ (M): Gleichermaſſen geben die ähnlichen Triangel OPM und OAS folgendes Verhältniß: OP : PM = OA : AS oder $\frac{aa - xx}{x} : y = \frac{ax + aa}{x}$: AS. Wenn wir folglich das erſte und dritte Glied durch $\frac{a + x}{x}$ dividiren und alsdenn das 3te Glied zum 2ten machen, ſo verhält ſich $a - x : a = y$: AS (N): wenn wir folglich die Glieder dieſer beyden Verhältniſſe M und N der Ordnung nach durch einander multipliciren, ſo verhält ſich $aa - xx : aa = yy$: BQ × AS = $\frac{aayy}{aa - xx}$ (T) Es iſt aber $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (§. 17); wenn man folglich in der Gleichung T dieſen Werth von yy ſubſtituirt, ſo findet man, daß BQ × AS = $\frac{aa \times (aa - xx) \times bb}{aa\ (aa - xx)}$ $= bb$ ſey, das heißt: BQ × AS = $\overline{CG}^2$. W. z. E. W.

§. 62.

Neunter Zuſatz. Wenn man aus den Brennpunkten F und f die Perpendiculairlinien FH und fh auf eine Tangente der Ellypſe an einem Punkt M, der von den Endpunkten der Axen verſchieden iſt, ziehet, ſo wird das Product aus dieſen Perpendiculairlinien dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich ſeyn, oder $fh \times FH = \overline{OG}^2$.

Beweis. Man behalte die nämliche Benennung wie oben. Man nenne $Gf = GF = c$ und ziehe $FC = a$ (§. 33), damit $cc = aa - bb$, ſo iſt $Of = OP + GP - Gf = \frac{aa - xx}{x} + x - c = \frac{aa - cx}{x}$; folglich iſt $Of = \frac{aa - cx}{x}$ und $OF = OP + GP + GF = \frac{aa - xx}{x} + x + c = \frac{aa + cx}{x}$;

Folglich

Folglich iſt $OF = \frac{aa + cx}{x}$ Man hat auch geſehen, (§. 61) daß $OB = \frac{aa - ax}{x}$ und daß $OA = \frac{aa + ax}{x}$.

Itzt merke man, daß die ähnlichen rechtwinklichten Triangel Ohf und OBQ folgendes Verhältniß geben: $Of : OQ = fh : BQ$ (S); Eben ſo, daß die ähnlichen Rechtwinklichten Triangel OHF und OAS dieſes Verhältniß geben $OF : OS = FH : AS$ (T); Wenn man alſo die Glieder dieſer Verhältniſſe T und S der Ordnung nach durch einander multiplicirt, ſo verhält ſich $Of \times OF : OQ \times OS = fh \times FH : BQ \times AS$ (K). Wenn man folglich beweiſet, daß $Of \times OF = OQ \times OS$, ſo wird auch bewieſen ſeyn, daß $fh \times FH = BQ \times AS$ und folglich $= \overline{CG}^2$ ſey. (§. 61).

I. Man hat geſehen, daß $Of = \frac{aa - cx}{x}$ und $OF = \frac{aa + cx}{x}$; Folglich $Of \times OF = \frac{(aa - cx)}{x} \times \frac{(aa + cx)}{x} = \frac{a^4 - c^2x^2}{xx}$ und wenn man $aa - bb$ an der Stelle von cc ſetzet $= \frac{a^4 - aaxx + bbxx}{xx}$; Folglich iſt $Of \times OF = \frac{a^4 - a^2x^2 \times {}^2 + b^2x^2}{xx}$.

II. Laſſet uns itzt die analytiſchen Werthe von OQ und OS ſuchen und laſſet uns deswegen gleich anfangs bemerken, daß wegen des rechtwinklichten Triangels OPM, $\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \frac{(aa - xx)^2}{x^2} + yy$; Folglich $OM =$

$\sqrt{}(aa$

$\sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}+y^2\right)}$ Wenn man nun die ähnlichen Triangel OPM und OBQ betrachtet, ſo bekommen wir folgendes Verhältniß : OP : OM = OB : OQ oder wenn man die analytiſchen Werthe ſubſtituirt, $\frac{aa-xx}{x^2}:\sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}+y^2\right)}=\frac{aa-xx}{x^2}:OQ$ Wenn man folglich das erſte und dritte Glied durch $\frac{a-x}{x}$ dividirt, und alsdenn das 2te Glied zum 3ten, und das dritte zum zweyten macht, ſo verhält ſich $a+x:a=\sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}+y^2\right)}:OQ$. (G) Eben ſo geben die ähnlichen Triangel OPM und OAS folgendes Verhältniß: OP: OM = OA : OS oder $\frac{aa-xx}{x}:\sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}\right)+y^2}=\frac{aa+ax}{x}:OS$. Wenn man folglich das erſte und dritte Glied durch $\frac{a+x}{x}$ dividirt und das 2te und 3te Glied mit einander verwechſelt, ſo verhält ſich $a-x:a=\sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}+yy\right)}:OS$. (L). Wenn man folglich die einzelnen Glieder der Verhältniſſe G und L der Ordnung nach durch einander multiplicirt, ſo verhält ſich $aa-xx:aa=\frac{(aa-xx)^2}{xx}+yy:OQ\times OS=$

$$\frac{\frac{(aa-xx)\,(aa-xx)\,(aa)}{xx}}{aa-xx}+\frac{aayy}{a^2-xx}\quad(T)$$

Nun iſt aber $yy=\frac{aabb-bbxx}{aa}$ (§. 17) $=(aa-xx)\frac{bb}{aa}$

Wenn

Wenn man folglich in der Gleichung $T\,(aa - xx)\,\frac{bb}{aa}$ an der Stelle von yy ſetzet, ſo iſt $OQ \times OS =$

$$\frac{\frac{(aa-xx)\,(aa-xx)\,(aa)}{xx}}{aa-xx} + \frac{aa\,(aa-xx) \times \frac{bb}{aa}}{aa-xx}$$

$$= \frac{(aa-xx)\,aa}{xx} + bb = \frac{a^4-(a^2x^2)+(b^2x^2)}{xx};$$

Folglich iſt $OQ \times OS = \frac{a^4-(a^2x^2)+(b^2x^2)}{xx} = Of \times OF$ (N°. I. dieſes §.). Wenn man folglich das Verhältniß K wieder vornimmt, ſo iſt $fh \times FH = BQ \times AS = \overline{CG}^2$ (§. 61). W. z. E. W.

§. 63.

Zehenter Zuſatz. Laſſet uns an 2 Punkten M und T einer Ellypſe (Fig 52) 2 Tangenten Hh und QR ziehen, und aus einerley Brennpunkt F 2 Perpendiculairlinien FH und FR auf dieſen Tangenten anfrichten. Nun behaupte ich, daß dieſe Perpendiculairlinien gegen einander in dem Verhältniß der Quadratwurzeln aus den Trägern FM und FT wachſen, die von dem Brennpunkt F an die Brennpunkte M und T gezogen ſind, das heißt, daß FH im Verhältniß gegen FR kleiner ſey, als $\sqrt{(FM)}$ gegen $\sqrt{(FT)}$ Es muß folglich bewieſen werden, daß $\frac{FH}{FR} < \frac{\sqrt{FM}}{FM}$.

Beweis. Laſſet uns von dem andern Brennpunkt f die Linie fh auf Hh und fQ auf QR perpendiculair ziehen. Darauf laſſet uns bemerken, daß die Rechtwinklichten Triangel FHM und fhM ſich ähnlich ſind. Denn es iſt der Winkel $FMH = fMh$ (§. 35); Folglich verhält ſich $FM : FH = fM : fh$; Folglich iſt $fh = \frac{FH \times fM}{FM}$; Folglich $fh \times$

FH

$FH = \frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM}$. Nun iſt aber $fh \times FH = \overline{CG}^2$ (§. 62); Daher iſt $\frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM} = \overline{CG}^2$; und folglich $\overline{FH}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$.

Man ſiehet eben ſo, da die rechtwinklichten Triangel FRT und fQT ſich ähnlich ſind, weil der Winkel FTR $=$ fTQ (§. 35), daß auch folgendes Verhältniß ſtatt habe FT: $FR = fT : fQ = \frac{FR \times fT}{FT}$; Folglich $\frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT} = fQ \times FR = \overline{CG}^2$ (§. 62); Folglich $\overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT}$, und alſo verhält ſich $\overline{FH}^2 : \overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM} : \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT} = \frac{FM}{fM} : \frac{FT}{fT}$; Folglich iſt $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$. Allein $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} < \frac{FM}{FT}$ Denn es verhält ſich $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} : \frac{FM}{FT} = \frac{fT}{fM} : 1.$ (wenn man die 2 erſten Glieder durch $\left(\frac{FM}{FT}\right)$ dividiret) $= fT : fM$. Nun iſt aber $fT < fM$; Folglich auch $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} < \frac{FM}{FT}$; Folglich iſt $\frac{\overline{FH}^2}{FR^2} < \frac{FM}{FT}$ und wenn man die Quadratwurze auszie het $\frac{FH}{FR} < \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$. W. z. E. W.

* §. 64.

Zweyter Zuſatz. Wenn man nach dem Zuſatz des erſten

erſten Hauptſatzes der Newtoniſchen Principien annimmt, daß die Geſchwindigkeit eines Planeten in M, welcher ſich in einer ellyptiſchen Laufbahn BMCA um den Brennpunkt F bewegt (Fig. 51), ſich zur Geſchwindigkeit in C, wo die mittlere Entfernung von dem Brennpunkte iſt, verhalte, (a) wie die Perpendiculairlinie FT die von dieſem Brennpunkt auf die Tangente an dem Punkt C gezogen iſt, zur Perpendiculairlinie FH, die von dem nämlichen Brennpunkt auf die Tangente an M gezogen iſt, ſo behaupte ich, daß ſich die Geſchwindigkeit in M zur Geſchwindigkeit in C verhalte, wie die Quadratwurzel aus der Diſtanz fM des Planeten von dem andern Brennpunkt f zur Quadratwurzel aus der Diſtanz FM von dem Hauptbrennpunkt F.

Beweis. Es ſey c die Geſchwindigkeit des Planeten in dem Punkt M und C ſeine Geſchwindigkeit in C; ſo iſt zu beweiſen, daß $c : C = \sqrt{fM} : \sqrt{FM}$ Nun verhalten ſich aber nach der Bedingung $c : C = FT$ oder $CG : FH$ Folglich iſt $c^2 : \overline{C}^2 = \overline{CG}^2 : \overline{FH}^2$. Es iſt aber $\overline{CG}^2 = fh \times FH$ (§. 62) Folglich verhält ſich $c^2 : C^2 = fh \times FH : \overline{FH}^2$ Allein es ſind die rechtwinklichten Triangel fhM

(a) Es iſt FC die mittlere Entfernung des Planeten von dem Brennpunkt F, weil FC die mittlere arithmetiſche Proportionallinie zwiſchen der größten Entfernung FB und der kleinſten FA iſt. Denn FC = GA (§. 33) Nun verhält ſich FB — GB oder GA = GA — FA (*). Folglich FB — FC = FC — FA.

(*) Um die Richtigkeit dieſes Verhältniſſes deutlich einzuſehen, ſey AG = GB = FC = a, und FG, als die Abſciſſe, = x; ſo iſt AF = a — x. Es iſt alſo das obige Verhältniß analytiſch ausgedrückt folgendes $(a + x) - a = a - (a - x)$. Daß aber dieſes würklich ein arithmetiſches Verhältniß ſey, davon kann man ſich überzeugen, wenn man die Summen aus den beyden äuſſerſten und innerſten Gliedern macht; dieſe werden ſich gleich ſeyn; denn es iſt $(a + x) + (a - x) = 2a$. B.

und FHM ſich ähnlich, weil der Winkel $fMh = FMH$ (§. 35) Folglich verhält ſich $fh : FH = fM : FM$, und folglich $c^2 : C^2 = fM : FM$. Hieraus ziehet man den Schluß, daß $c : C = \sqrt{fM} : \sqrt{FM}$. W. z. E. W.

§. 65.

Zwölfter Zuſatz. Es verhält ſich der Radius Vector FM zum Sinus des Winkels $FMH = \sqrt{(FM \times fM)} : CG$.

Beweis. Denn, wenn man FM für den Sinus Totus oder für den Radius des Bogens, der den Winkel FMH miſſet, annimmt, ſo iſt klar, daß FH der Sinus des Winkels FMH ſey. Folglich iſt zu beweiſen, daß $FM : FH = \sqrt{(FM \times fM)} : CG$. Nun verhält ſich aber $F\text{M} \times F\text{M} : F\text{M} \times f\text{M} = F\text{M} : fM = FH : fh$ (denn die rechtwinklichten Triangel FHM und fhM ſind ſich ähnlich) $= FH \times FH : fh \times FH$. Folglich $F\text{M} \times F\text{M} : F\text{M} \times f\text{M} = FH \times FH : fh \times FH$. Es iſt aber $fh \times FH = \overline{CG}^2$ (§. 62) Folglich $F\text{M} \times F\text{M} : F\text{M} \times f\text{M} = FH \times FH : \overline{CG}^2$. Wenn man folglich die Quadratwurzel auszieht und das 2te und 3te Glied mit einander verwechſelt, ſo verhält ſich $F\text{M} : FH = \sqrt{(F\text{M} \times F\text{M})} : CG$. W. z. E. W.

§. 66.

Aufgabe. Aus den gegebenen 2 Axen der Ellypſe AB und CD die Brennpunkte zu finden, und die krumme Linie zu beſchreiben (Fig. 53).

Auflöſung. I. Laſſet die Linien AB und CD ſich in ihrer Mitte G perpendiculair durchſchneiden, und nehme an, daß $AB > CD$ ſey. Traget nun AG oder GB von den Endpunkten C oder D der kleinen Axe nach F und f auf die

groſſe

groſſe Axe, ſo ſind die alſo beſtimmten Punkte F und f die Brennpunkte der zu beſchreibenden krummen Linie (§. 33. 35. 36).

II. Weil nun die Summe der Linien, die aus den Brennpunkten F und f nach einerley Punkt der Ellypſe gezogen werden, jederzeit der groſſen Axe AB gleich ſind (§. 33), ſo laſſet uns AB in L von G gegen F zu in 2 beliebige Theile theilen. Darauf laſſet uns aus dem Brennpunkt F mit der Linie AL einen Bogen in a und a beſchreiben: So ſind dieſe beyden Punkte in der geſuchten Ellypſe. Wenn man ſolchergeſtalt die groſſe Axe in 2 andere Theile in den Punkten H und K theilet, und eben ſo, wie kurz vorher verfährt, ſo wird man nach der Figur ſo viele Punkte der geſuchten krummen Linie bekommen, als man verlangt. Wenn man nun dieſe alle durch eine einzige Linie verbindet, ſo wird dieſe Linie die verlangte Ellypſe ſeyn.

Beweis. Von einem jeden Punkt b, der nach der vorgeſchriebenen Conſtruction determinirt wird, laſſet uns die Perpendiculairlinie $bS = y$ auf $AB = 2a$ ziehen, damit $AG = GB = FC = a$ ſey. Es ſey ferner $CG = GD = b$; $GS = x$; Der Unterſchied zwiſchen Fb und $bf = 2d$: Da folglich $Fb + bf = 2a$ (§. 33), ſo iſt $Fb = a - d$ nnd $fb = a + d$ (*); $FG = Gf = c$; Fo glich $FS = FG - GS = c - x$ und $fS = Gf + GS = c + x$; und weil der Triangel FGC ein rechtwinklichter iſt, ſo iſt $\overline{FC}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{CG}^2$ oder $aa = cc + bb$. Woraus folgt, daß $cc = aa - bb$. Dieſes alles ſey vorausgeſezt.

Izt iſt vermöge des rechtwinklichten Triangels fSb, $\overline{fb}^2 = \overline{fS}^2 + \overline{bS}^2$ oder $aa + 2ad + dd = cc + 2cx + xx + yy$ (M) und aus dem rechtwinklichten Triangel FSb

T 2 ſchlieſſen

(*) Siehe meine Anmerkung zum §. 45. B.

ſchlieſſen wir, daß $\overline{Fb}^2 = \overline{FS}^2 + \overline{bS}^2$, oder $aa - 2ad + dd = cc - 2cx + xx + yy$. (L) Wenn man folglich die erſte Helfte der Gleichung L von der erſten Helfte der Gleichung M und die 2te von der 2ten abzieht, ſo iſt $4ad = 4cx$; Folglich $d = \frac{cx}{a}$ und $dd = \frac{c^2x^2}{aa}$. Wenn man folglich in der Gleichung M $\frac{cx}{a}$ an der Stelle von d und $\frac{ccxx}{aa}$ an der Stelle von dd ſetzet, ſo wird aus dieſer Gleichung werden $aa + 2cx + \frac{ccxx}{aa} = cc + 2cx + xx + yy$ oder, wenn man von beyden Seiten $2cx$ abziehet, ſo iſt $aa + \frac{c^2x^2}{aa} = c^2 + x^2 + y^2$. Wenn man folglich durch aa multiplicirt, $a^4 + c^2x^2 = a^2 c^2 + a^2x^2 + a^2y^2$. Setzet man alſo in dieſer lezten Gleichung $aa - bb$ in der Stelle von cc, ſo bekommt man $a^4 + a^2x^2 - b^2x^2 = a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 + a^2y^2$. Und wenn man von beyden Seiten $a^4 + a^2x^2$ abzieht und $-a^2b^2$ auf die andere Seite bringt, ſo iſt $a^2b^2 - b^2x^2 = a^2y^2$, oder $(aa - xx)\,bb = aa \times yy$. Daraus folgt dieſes Verhältniß $yy : aa - xx = bb : aa$: der $\overline{bS}^2 : AS \times SB = \overline{CG}^2 : \overline{AG}^2$. Dieſes iſt die Charakteriſtiſche Eigenſchaft der Ellypſe (§. 12. 14), wenn $AG > CG$, wie man hier annimmt. Folglich ſind der Punkt b und alle andere Punkte a d. m. n. o — —, die man auf eine gleiche Art gefunden hat, in einer Ellypſe, wovon AB und CD die Axen ſind. W. z. E. W.

§. 67.

Lehnſatz. Wenn man einen Cirkel ARB (Fig. 54) über der groſſen Axe AB einer Ellypſe ACB beſchreibt, und wenn man die Ordinaten Jb, Kd — — am Cirkel ziehet, die

die in den Punkten f und g die Ellypſe durchſchneiden, ſo werden die Ordinaten fb, gd. ——— der Ellypſe ſich verhalten, wie die correſpondirenden Ordinaten des Cirkels Ib, Kd —— das heißt: $fb : Ib = gd : Kd = CG : RG$.

Beweis. I. Denn es iſt $\overline{fb}^2 : Ab \times bB = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$ (§. 12. 14. 66). Nun iſt aber nach den Eigenſchaften des Cirkels $Ab \times bB = \overline{Ib}^2$. Folglich verhält ſich $\overline{fb}^2 : \overline{Ib}^2 = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$ oder $fb : Ib = CG : RG$.

II. Eben deswegen verhält ſich auch $gd^2 : Ad \times dB = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$. Es iſt aber $Ad \times dB = \overline{Kd}^2$ Folglich verhält ſich $\overline{gd}^2 : \overline{Kd}^2 = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$ oder $gd : Kd = CG : RG$. Folglich, weil $fb : Ib = CG : RG$ (1), ſo verhält ſich auch $fb : Ib = gd : Kd$. W. z. E. W.

§. 68.

Aufgabe. Das Verhältniß der Oberfläche der Ellypſe gegen die Fläche des Cirkels zu finden, der über ihrer größten Axe conſtruirt worden iſt (Fig. 54).

Auflöſung. I. Man nehme an, daß die halbe groſſe Axe in eine ſehr groſſe Anzahl kleiner Theile getheilet worden ſey; (Man zeichnet hier, um die Verwirrung zu vermeiden, nur 4 derſelben) Jmgleichen, daß man aus den Theilungspunkten b. d. e. G ſo wohl auf den Cirkel als auf die Ellypſe Ordinaten gezogen habe, und daß man ferner, um dieſe beyden Figuren äuſſere Parallelogramme beſchrieben habe, ſo iſt aus dem §. 68 der Parabel klar, daß die geſammten Parallelogramme, die um dem 4ten Theil des Cirkels beſchrieben ſind, ſo beſchaffen ſeyn können, daß ihre Summe von dem Quadranten um weniger als jede angebliche Gröſſe

verſchieden ſey. Man kann folglich die Summe dieſer Parallelogramme für die Fläche des Quadranten des Cirkels annehmen und eben ſo die Summe der Parallelagramme, die um dem 4ten Theil der Ellypſe beſchrieben ſind, für die Oberfläche des 4ten Theils der Ellypſe ſetzen.

II. Nach dieſer Vorausſetzung erhellet es, daß das Rechteck $Ab \times bf : Ab \times bl = bf : bl$. Denn ſie haben eine gemeinſchaftliche Baſis Ab Es verhält ſich aber $bf : bl = CG : RG$ (§. 67) Folglich $Ab \times bf : Ab \times bl = CG : RG$.

Eben ſo $bd \times dg : bd \times dK = dg : dK = CG : RG$. Folglich $bd \times dg : bd \times dK = CG : RG$:

Gleichfalls verhalten ſich $de \times eh : de : em = eh : em$ $CG : RG$; folglich $de \times em = CG : RG$.

Endlich verhält ſich $eG \times CG : eG \times RG = CG : RG$. Und folglich hat man dieſe Reihe von gleichen Verhältniſſen $Ab \times bf : Ab \times bl = bd \times dg : bd \times dK = de \times eh : de \times em = eG \times CG : eG \times RG$: Folglich $(Ab \times bf) + (bd \times dg) + (eG \times CG) : (Ab \times bl) + (bd \times dK) + (de \times em) + (eG \times GR) = (Ab \times bf) : (Ab \times bl) = CG : RG$ (*), das heißt, die Fläche des 4ten Theils der Ellypſe verhält ſich zur Oberfläche des Quadranten vom Cirkel $= CG : RG$ (1) $= 2CG : 2RG =$ AB. Folglich verhält ſich **die Oberfläche der ganzen Ellypſe zur Oberfläche des ganzen Cirkels, der über der groſſen Axe beſchrieben iſt, wie die kleine Axe zur groſſen Axe. W. z Th. und z. E. W.**

Zuſatz. Folglich erhält man die Fläche der Ellypſe, wenn man die kleine Axe durch die Fläche des Cirkels, der über

(*) Man ſehe meine Anmerkung zum §. 65 der Parabel; Man wird alsdenn dieſes Verhältniß richtig finden. B.

über ihre groſſe Axe beſchrieben iſt, multiplicirt und dieſes Product durch die nämliche groſſe Axe dividirt.

* §. 69.

Anmerkung Wenn man über der kleinen Axe einen Cirkel beſchreibet, ſo könnte man eben ſo beweiſen, daß die Oberfläche der Ellypſe ſich zur Oberfläche des Cirkels verhalte, wie die groſſe Axe zur kleinen Axe. Daraus erkennet man, daß aus der Quadratur des Cirkels auch die Quadratur der Ellypſe entſtehe.

* §. 70.

Erſter Zuſatz. Daraus folgt, daß der halbe ellyptiſche Abſchnitt *AdgfA* ſich zum halben correſpondirenden Abſchnitt des Cirkels ADKIA verhalte, wie die Fläche der Ellypſis zur Fläche des Cirkels, der über der groſſen Axe derſelben beſchrieben iſt.

Denn man kann, wie vorhin, beweiſen, daß alle Rechtecke, die man um dem halben ellyptiſchen Abſchnitt beſchreiben könnte, ſich zu den, um dem Cirkel beſchriebenen verhalten würden, wie die kleine Axe zur groſſen, oder wie die Fläche der Ellypſe zur Fläche des Cirkels (§. 68).

* §. 71.

Zweyter Zuſatz. Wenn man folglich die Lage der graden Linie FQ zu finden wüßte, (Fig. 55) die durch den Brennpunkt F der Ellypſe gehet, und den Cirkel, der über ihrer groſſen Axe beſchrieben wäre nach einem gewiſſen gegebenen Verhältniß theilte, und wenn man alsdenn die Ordinate QP fallen lieſſe und Fᴍ auf dem Punkt ᴍ, wo QP die Ellypſe durchſchneidet, zöge, ſo würde Fᴍ auch die Fläche der Ellypſe nach dem nämlichen gegebenen Verhältniß theilen.

Laſſet uns daher annehmen, daß die dreyſeitige Figur des Cirkels BFQ ſich zur Cirkelfläche verhalte 1 : 5 : So behaupte ich, daß der Ellyptiſche Triangel BFM ſich auch zur Fläche der Ellypſe verhalte = 1 : 5 :

Beweis. Es ſey die Cirkelfläche = A; die Fläche der Ellypſe = E, ſo iſt zu beweiſen, daß wenn BFQ : A = 1 : 5, auch BFM : E = 1 : 5. Laſſet uns deswegen

1) uns erinnern, daß der halbe ellyptiſche Abſchnitt BMP ſich zum halben Abſchnitt vom Cirkel BQP verhalte = E : A. (§. 70).

2) Daß der Triangel FPM ſich zum Triangel FPQ, der die nämliche Baſis FP hat, verhalte = MP : QP. = kleine Axe : groſſen Axe (§. 67) = E : A (§. 68). Folglich iſt FPM, FPQ = E : A.

Folglich haben wir folgende 2 Proportionen BMP : BQP = E : A und FPM : FPQ = E : A : Folglich ſind die Verhältniſſe der einen gleich den Verhältniſſen der andern. Wenn wir folglich der Ordnung nach die Glieder der beyden Proportionen zuſammen addiren, ſo bekommen wir PMP + FPM : BQP + FPQ = 2E : 2A = E : A (*). Wenn wir folglich das 2te und 3te Glied mit einander verwechſeln, ſo

(*) Um zu zeigen, daß dieſes Verhältniß richtig ſey, ſo iſt allgemein darzuthun, daß wenn man in 2 geometriſchen Proportionen $a : b = c : d$ und $g : h = c : d$, worin die beyderſeitigen Verhältniſſe ſich gleich ſind, die Glieder der 2 Proportionen der Ordnung nach zuſammen addirt, wieder eine würkliche Proportion heraus kommen müſſe, das heißt, daß $a + g : b + h = 2c : 2d$. Es wird aber dieſes Verhältniß ohne allen Zweifel richtig ſeyn, wenn das Product der mittelſten Glieder dem Product der äuſſern Glieder gleich ſeyn wird. Es wird folglich zu beweiſen ſeyn, daß $(b + h)\ 2c = (a + g)\ 2d$ oder daß $2bc + 2ad + 2hc = 2ad + 2gd$. Es iſt aber vermöge der angenommenen Proportionen $ad = bc$ und $gd = hc$; Folglich auch $2gd = 2hc$; Folglich $(b + h)\ 2c = (a + g)\ 2d$ Folglich auch $a + g : b + h = 2c : 2d$. W.

ſo iſt BMP + FPM : E = BQP + FPQ : A. Nun iſt aber BMP + FPM = BFM und BQP + FPQ = BFQ; Folglich BFM : E = BFQ : A. Allein BFQ : A = 1 : 5 (Beding); Folglich BFM : E = 1 : 5. W. z. E. W.

*§. 72.

Anmerkung. Die Theilung des Cirkels nach einem gegebenen Verhältniß durch eine Linie, die durch den Brennpunkt der Ellypſe gehet, wird alſo auch ein Mittel geben, die Fläche der Ellypſe nach einem gegebenen Verhältniſſe zu theilen, indem die Theilungslinien durch den Brennpunkt gehen. Es iſt dieſes eine von den berühmten Aufgaben des Keplers, die in der phyſiſchen Aſtronomie ſo nützlich iſt (*). Da es mir aber ſcheint, daß die geometriſche Auflöſung derſelben von der Quadratur des Cirkels und von der Rectification der Peripherie derſelben abhänge, ſo gebe ich hier ein von mir erfundenes Mittel, wodurch man der Aufgabe ſehr nahe kommt. Wenn die Entfernung *FG* des Brennpunkts *F* vom Centrum G, welche ich die Excentricität nenne, nicht merklich iſt.

*§. 73.

Aufgabe. Die Cirkelfläche nach einem gegebenen Verhältniſſe zu theilen, daß die Theilungslinien durch einen innerhalb demſelben liegenden und vom Mittelpunkt unterſchiedenen Punkt *F* gehen (Fig. 56).

Auflöſung, die ſehr einfach iſt, und wodurch man dem wahren Innhalt ſehr nahe kommt.

T 5 Nach-

(*) Man leſe was der Herr von Tſchirnhauſen hierinn geleiſtet hat, in den Actis Erudit. Lipſ. 1696. und Bernoulli Oper. T. I. p. 159. B.

Nachdem ihr durch die gegebenen Punkte *F* und G einen Diameter AB gezogen habt, ſo theilet den Cirkel nach dem gegebenen Verhältniß ſo, daß ihr die Theilungslinien durch das Centrum G gehen laſſet, das heißt, wenn das Verhältniß z. E. wie 1 : 6 iſt, ſo machet den Bogen BQ = dem 6ten Theil des Umkreiſes, ſo wird der Sector BGQ offenbar der 6te Theil des Cirkels ſeyn. Ziehet darauf *F*R und durch das Centrum G die Parallellinie GM; wenn ihr nun die Linie *F*M ziehet, ſo behaupte ich, daß der Triangel B*F*M den Cirkel faſt nach dem gegebenen Verhältniß theilen werde.

Beweis. Man hat zu zeigen, daß der Triangel B*F*M beynahe dem Ausſchnitt BGQ gleich ſey. Es haben aber dieſe beyden Figuren den Theil BGLM gemeinſchaftlich. Es iſt alſo nur noch übrig zu beweiſen, daß der Triangel *F*GL faſt dem Triangel LQM gleich ſey. Dieſes aber zeiget ſich ſogleich. Denn die beyden Triangel *F*GM und GQM haben einerley Baſis GM und ſind zwiſchen einerley Parallellinien GM und *F*Q gelegen (Conſtr.); Folglich ſind ſie ſich gleich. Und wenn man folglich von ihnen den gemeinſchaftlichen Theil GLM wegnimmt, ſo bekommt man den Triangel *F*GL = dem Triangel LQM, beynahe = der dreyſeitigen Figur LQM. Weil die Sehne QM faſt mit dem Bogen zuſammen fällt. — — W. z. E. W.

* §. 74.

Dritter Zuſatz. Es folgt noch aus dem §. 68 daß die Ellypſe der Fläche eines Cirkels gleich ſey, deſſen Diameter die mittlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen der groſſen und kleinen Axe der Ellypſe iſt.

Beweis. Es ſey die Fläche der Ellypſe = E. Die groſſe Axe derſelben = A; die Fläche des Cirkels, der auf dieſer Axe beſchrieben iſt = C; Die kleine Axe = D; Der

Diameter

Diameter, der die mittlere Proportionallinie iſt $= M$; Die Fläche dieſes Cirkels $= P$: So kommt es darauf an, zu beweiſen, daß $E = P$. Nun verhält ſich aber vermöge der Bedingung $A : M = M : D$; Folglich $\overline{A}^2 : \overline{M}^2 = A : D$. (*). Es verhält ſich aber $\overline{A}^2 : \overline{M}^2 = C : P$. (**); Folglich $C . P = A : D$. Nun verhalten ſich $A : D = C : E$ (§. 68), folglich $C : P = C : E$. Weil folglich $C = C$, ſo muß auch $E = P$ ſeyn.

* §. 75.

Vierter Zuſatz. Es verhalten ſich die Flächen der Ellypſen unter einander, wie die Producte aus ihren Axen.

Beweis. Es ſeyn E und e die Flächen zwoer Ellypſen, die man mit einander vergleicht; A und B die Axen von E und a und b die Axen von e. Nun iſt zu beweiſen, daß $E : e = A \times B : a \times b$.

Laſſet uns, um dieſes zu beweiſen, ſtatt der Ellypſe diejenigen Cirkel nehmen, die ihnen gleich ſind, das heißt, deren Diameter die mittlere geometriſche Proportionallinien zwiſchen A und B und zwiſchen a und b ſind (§. 74). Es ſey folglich E die Oberfläche des erſten Cirkels; M deſſen Diameter; e die Fläche des 2ten Cirkels; und m ſein Diameter. Nun verhalten ſich aber nach der Bedingung $A : M = M : B$ und $a : m = m : b$; Folglich iſt $\overline{M}^2 = AB$ und $\overline{m}^2 = ab$. Folglich $\overline{M}^2 : \overline{m}^2 = AB : ab$. Es iſt aber $\overline{M}^2 : \overline{m}^2 = E$

(*) Man leſe meine Erläuterung zum §. 168 der Parabel. B.

(**) A iſt der Diameter des Cirkels C und M der Diameter des Cirkels P. Nun verhalten ſich aber die Cirkelflächen, wie die Quadrate dieſer Diameter; Folglich $\overline{A}^2 : \overline{M}^2 = c : P$. B.

$= E : e$. (Geom.); Folglich $E : e = AB : ab$ W. z. E. W.

§. 76.

Erklärung. Eine Ellypſoide iſt ein Körper, der durch das Herumwälzen einer halben Ellypſe ACB um eine ihrer Axen AB erzeuget wird (Fig. 54).

* §. 77.

Aufgabe. Den körperlichen Innhalt einer Ellypſoide zu finden.

Aufloſung. Weil eine Ellypſolde durch die Herumwälzung einer halben Ellypſe um ihre Axe erzeugt wird, ſo wird die halbe Ellypſoide durch die Herumwälzung des 4ten Theils der Ellypſe ACG um die Helfte der Axe AG erzeugt werden. Eben ſo wird auch eine halbe Kugel erzeugt, wenn man einen Quadranten ARG ſich um AG drehen läßt. Wenn wir demnach das Verhältniß der halben Ellypſoide gegen die halbe Kugel beſtimmen können, die zum Diameter die groſſe Axe AB der erzeugenden Ellypſe ACB hat, ſo werden wir auch, da wir den körperlichen Innhalt der Kugel ausrechnen können, dadurch den Innhalt der Ellypſoide finden.

Laſſet uns bemerken, daß wenn man den 4ten Theil der Ellypſe ACG, ſo wie den Quadranten ARG um die Helfte der groſſen Axe AG ſich herum drehen läßt, die äuſſeren Parallelagramme ſowol des 4ten Theils der Ellypſe als des Quadranten des Cirkels, Cylinder von gleicher Höhe erzeugen werden. Denn man nimmt die Theile Ab, bd, de, eG für gleich an; und daß folglich die Summe der Cylinder, die um der halben Kugel beſchrieben ſind, für den Innhalt der halben Kugel genommen werden können, und daß die Summe der Cylinder, die um der halben Ellypſoide gezeichnet ſind, von der halben Ellypſe ſelbſt nicht unterſchieden ſind. Dieſes

ward

ward damals bewieſen, als man den körperlichen Innhalt des paraboliſchen Afterkegels unterſuchte (§. 72. der Parabel).

Nach dieſer Vorausſetzung verhält ſich der Cylinder von AI zu dem Cylinder von Af, die von einerley Höhe ſind, wie der Cirkel von bI zur Cirkelfläche, deren Diameter $bf = \overline{bI}^2 : \overline{bf}^2$. (Geometr.) $= \overline{RG}^2 : \overline{CG}^2$ (§. 67) Folglich verhält ſich der Cylinder von AI zum Cylinder von $Af = \overline{RG}^2 : \overline{CG}^2$. Eben ſo verhält ſich der Cylinder von bK zum Cylinder von bg, wie die Cirkel, deren Diameter dK und $bg = \overline{dK}^2 : \overline{dg}^2 : \overline{RG}^2 : \overline{CG}^2$. Ein gleiches beweiſet man von allen übrigen Cylindern von dm und dh, cQ und eC: Folglich verhält ſich die Summe der Cylinder, die um die halbe Kugel gezeichnet ſind, das heißt, die halbe Kugel, die ich G nennen will, zu der Summe der Cylinder, die um die halbe Ellypſe gezeichnet ſind, das heißt zur halben Ellypſe, die ich E nenne, wie $\overline{RG}^2 : \overline{CG}^2$ oder $G : E = \overline{RG}^2 : \overline{CG}^2 = 2G : 2E$ (*). Folglich iſt $2E = \frac{2G + \overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$ (L). Es ſey itzt der Cirkel von dem Radius $RG = a$; der Cirkel von dem Radius $CG = b$; ſo bekommt man dieſes Verhältniß $b : a = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$ (Geometr.) Folglich $\frac{b}{a} = \frac{\overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$. Und folglich, wenn man $\frac{b}{a}$ an der Stelle von $\frac{\overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$ in der Gleichung L ſetzt, ſo iſt $2E = \frac{2G + b}{a}$. Es iſt aber 2G der körperliche Innhalt der ganzen

(*) Man leſe hierüber die im §. gegebene Erläuterung. B.

ganzen Kugel, welche ſo groß iſt als $\frac{2}{3}$ des um ihr beſchriebenen Cylinders (Geometrie), das heißt, $2G = a \times \frac{2}{3} AB$.
Folglich iſt $2E = a \times \frac{2AB}{3} \times \frac{b}{a} = \frac{2}{3} AB \times b$.
Hieraus ſiehet man, daß man den körperlichen Innhalt der ganzen Ellypſoide finde, wenn man den Cirkel, der zum Radius die Helfte CG der kleinen Axe der gegebenen Ellypſe hat, durch $\frac{2}{3}$ der groſſen Axe AB multiplicirt.

* §. 78.

Zwölfter Hauptſatz. Wenn man in der 57ten Figur durch den Berührungspunkt M den Diameter MK gezogen hat, und wenn man darauf einen andern Diameter mit der Tangente MO parallel ziehet, und wenn man die Ordinaten MP und IS auf die groſſe Axe fallen läßt, ſo werd man 1) finden, daß das Quadrat $\overline{GI}^2 =$ ſey dem Rechteck $AP \times PB$ und daß 2) das Quadrat $\overline{GP}^2 =$ ſey dem Rechteck $AI \times IB$.

Beweis. Es ſey beſtändig $AG = GB = a$; $CG = GD = b$; $PM = y$; $GP = x$. So iſt $AP = a + x$; $PB = a - x$ und $AP \times PB = aa - xx$; $GI = s$; Folglich $AI = a + s$; $IB = a - s$ und $AI \times IB = aa - ss$. Es iſt folglich zu beweiſen, daß $ss = aa - xx$ und $xx = aa - ss$.

Weil nach der Conſtruction GS mit MO parallel iſt, ſo iſt klar, daß die rechtwinklichten Triangel MPO und GIS ſich ähnlich ſind. Folglich verhält ſich $PO : GI = PM : IS$ oder $\overline{PO}^2 : \overline{GI}^2 = \overline{PM}^2 : \overline{IS}^2$. Es iſt aber $PO = \frac{aa - xx}{xx}$. (11ter Hauptſ. §. 50. 51); Folglich iſt $\overline{PO}^2 = \frac{(aa - xx)}{xx} \frac{(aa - xx)}{xx}$. Folglich wird die vorige Proportion analytiſch ausgedruckt dieſe: $\frac{(aa - xx)(aa - xx)}{xx} : ss = yy : \overline{IS}^2$:

(R)

(R) Es iſt aber (§. 12) $\overline{GB}^2 : \overline{CG}^2 = AI \times IB : \overline{IS}^2$ oder $aa \,.\, bb = aa - ss : \overline{IS}^2 = \frac{aabb - bbss}{aa}$ und $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (§. 17) Wenn man folglich in der Proportion R die Werthe von yy und $\overline{IS}^2$ ſubſtituirt, ſo iſt $\frac{(aa - xx)}{xx} \frac{(aa - xx)}{xx} : ss = \frac{aabb - bbxx}{aa} : \frac{aabb - bbss}{aa}$ und wenn man die beyden lezten Glieder dieſer Proportion durch $\frac{bb}{aa}$ dividiret, ſo iſt $\frac{(aa - xx)\,(aa - xz)}{xx} : ss = aa - xx : aa - ss$. Und wenn man das erſte und 3te Glied durch $aa - xx$ dividiret, ſo iſt $\frac{aa - xx}{xx} : ss = 1 = aa - ss$. Folglich iſt $\frac{(aa - xx)\,(aa - ss)}{xx} = ss$ oder $ssxx = a^4 - a^2x^2 - a^2s^2 + s^2x^2$. Wenn man folglich $ssxx$ von beyden Seiten abzieht, und $-a^2ss$ auf die andere Seite bringt, ſo iſt $a^2s^2 = a^4 - a^2x^2$. Wenn man folglich durch a^2 dividirt, $s^2 = aa - xx$, oder $\overline{GI}^2 = AP \times PB$. W. d. 1ſte W.

2) Weil $ss = aa - xx$, ſo iſt auch $xx = aa - ss$, das heißt, $\overline{GP}^2 = AI \times IB$. W. d. 2te W.

§. 79.

Erklärung. Wenn 2 Diameter MK und SF ſo beſchaffen ſind, daß der eine von beyden SF mit der Tangente MO, die an dem Endpunkt des andern Diameter MK gezogen iſt, parallel iſt (Conſtr. der Figur), ſo nennet man ſie conjugirte Diameter, weil ſie einerley Function haben.

Wir

Wir werden dieſes weiter unten ſehen. Uud eine jede Linie NH oder VH (Fig. 58) die von irgend einem Punkt N oder V der Ellypſe mit der Tangente mO oder mit dem Diameter SF parallel gezogen iſt, iſt eine Ordinate an dem conjugirten Diameter mK.

§. 79. II.

Erſter Zuſatz. Es folgt aus dem 12ten Hauptſatze daß der Triangel GPm = GIS oder daß GP × Pm = GI × IS; denn man hat oben geſehen, daß $\overline{GI}^2 = AP \times PB$ und $\overline{GP}^2 = AI \times IB$; Es iſt aber (§. 10) $\overline{PM}^2 : \overline{IS}^2 := AP \times PB : AI \times IB$; Folglich iſt $\overline{PM}^2 : \overline{IS}^2 = \overline{GI}^2 : \overline{GP}^2$ oder Pm : IS = GI : GP. Folglich iſt GP × Pm = GI × IS.

* §. 80.

Zweyter Zuſatz. Wenn folglich beyde conjugirte Diameter ſich gleich wären oder wenn Gm = GS, ſo wäre GI = GP (a) und $\overline{GI}^2 = \overline{GP}^2$ oder $ss = xx$. Folglich würde die Gleichung $ss = aa - xx$, die in §. 78 gefunden, dieſe werden $xx = aa - xx$. Folglich $2xx = aa$ oder $xx = \frac{aa}{2} = a \times \frac{a}{2}$. Hieraus folgt das Verhältniß $a : x = x : \frac{a}{2}$, das heißt, wenn die conjugirten Diameter ſich gleich ſind, ſo iſt die Abſciſſe GP oder x derjenigen Ordinate, die von dem Endpunkt P eines Diameters auf die groſſe Axe gezogen iſt, die mittlere Proportionallinie zwiſchen der Helfte und dem 4ten Theil der groſſen Axe.

(a) Denn da die rechtwinklichten Triangel GPM und GIS dem Innhalt nach ſich gleich ſind, und da ſie beyde eine Hypothenuſe von einerley Gröſſe haben, ſo ſind auch nothwendig alle ihre Seiten ſich gleich.

*§. 81.

Wenn man im Gegentheil auf der groſſen Axe AB die Linie GP oder x als die mittlere Proportionallinie zwiſchen der halben groſſen Axe und dem 4ten Theil derſelben, das heißt, zwiſchen a und $\frac{a}{2}$ annimmt, und wenn man aus dem Punkt P die Ordinate PM ziehet; darauf den Diameter MK, die Tangente MO und den Diameter SF parallel mit MO ziehet, ſo behaupte ich, daß die conjugirten Diameter MK und SF ſich gleich ſind oder daß GM = SG ſey.

Beweis. Denn man laſſe die Ordinate IS herunter fallen, ſo iſt $\overline{GI}^2 = AP \times PB$ (§. 78) $= aa - xx$ (T). Nun verhält ſich aber $a : x = x : \frac{a}{2}$ (Beding). Folglich iſt $xx = \frac{aa}{2}$. Wenn man folglich dieſen Werth von xx in die Gleichung T ſetzet, ſo iſt $\overline{GI}^2 = aa - \frac{aa}{2} = \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2} = xx = \overline{GP}^2$. Folglich iſt GI = GP (a). Allein GI × IS = GP × PM (§. 79. II.) folglich verhält ſich GI : GP = PM : IS. Weil folglich GI = GP, ſo iſt auch IS = PM; und folglich GM = GS oder MK = SF. W. z. E. W.

* §. 82.

Dritter Zuſatz. Es iſt offenbar, daß es in einer Ellypſe nur ein paar gleicher conjugirter Diameter gäbe. Es iſt gewiß, daß auf der groſſen Axe nur 2 Punkte ſind, der eine auf der Seite von A, der andere auf der Seite von B, wo

U man

(a) Bemerket, daß wenn man nach der 57ten Figur die beyden conjugirten Diameter von einerley Gröſſe annimmt, die Abſciſſe GI einerley mit GP ſeyn müſſe. Nur deswegen laſſen wir ſie als verſchieden erſcheinen, damit die Stärke des Beweiſes deſto merklicher werde.

man Abſciſſen ziehen kann, die die mittlere Proportionallinien zwiſchen der Helfte und dem 4ten Theil der groſſen Axe ſind. Allein da die Ordinaten, die aus dieſen Punkten gezogen würden, einerley Diameter beſtimmen würden, wie man ſich leicht davon überzeugen kann (§. 25), ſo kann man folglich nothwendig in der nämlichen Ellypſe nur ein Paar gleicher conjugirter Diameter haben.

* §. 83.

Anmerkung. Um dieſe Diameter leicht zu erhalten, ohne eine mittlere Proportionallinie zu ſuchen, ſo muß man bemerken, daß die Gleichung $xx = aa - xx$ (§. 80) eine Gleichung am Cirkel ſey, worin die Abſciſſen vom Centrum anfangen, und daß man ſie alſo würklich conſtruire, wenn man die Abſciſſe ſo groß als die Ordinate macht. Dieſes iſt leicht, wenn man eine doppelte Ordinate von der Helfte des 4ten Theils des Cirkels, der auf der groſſen Axe der Ellypſe conſtruiret iſt, herunter fallen läßt. Es werden alsdenn die beyden Punkte, in chen dieſe doppelte Ordinate die Ellypſe durchſchneidet, dazu dienen, die 2 conjugirten Diameter zu ziehen, weil alsdenn die Abſciſſe des Cirkels ihrer Ordinate gleich ſeyn wird.

Dieſes Verfahren iſt viel kürzer, als wenn man eine mittlere Proportionallinie ſucht. Doch iſt es nicht durchaus nothwendig.

* §. 84.

Vierter Zuſatz. Wenn man die kleine Axe CD gebrauchen will, um 2 gleiche conjugirte Diameter zu bekommen, ſo nehme man GQ als die mittlere Proportionallinie zwiſchen der Helfte und dem 4ten Theil der Axe, das heißt, zwiſchen b und $\frac{b}{2}$. Man ziehe die Ordinate QM; durch den Punkt M, wo ſie mit der Ellypſe zuſammen ſtößt, ziehe man den Diameter MK und die Tangente MO, und mit dieſer

ziehe

ziehe man durch das Centrum G die Parallellinie SF, ſo werden die beyden Linien MK und SF die beyden gleichen conjugirten Diameter ſeyn.

Beweis. Wenn man von dem Punkt M die Ordinate PM ziehet, ſo iſt PM $=$ QG und $\overline{PM}^2 = \overline{GQ}^2$. Folglich, weil $b : GQ = GQ : \frac{b}{2}$ (Conſtr.), ſo iſt $\overline{GQ}^2 = \frac{bb}{2}$ und folglich $\overline{PM}^2 = \frac{bb}{2}$. Allein $\overline{PM}^2 : AP \times PB = \overline{CG}^2 : \overline{GB}^2$ (§. 12) das heißt, wenn man die analytiſchen Werthe ſubſtituirt $\frac{bb}{2} : aa - xx = bb : aa$. Folglich iſt $aa \times \frac{bb}{2} = (aa - xx)\, bb$. Wenn man folglich mit bb dividiret $\frac{aa}{2} = aa - xx$. Folglich nach der Verſetzung $xx = aa - \frac{aa}{2} = \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2}$ oder $xx = ax \frac{a}{2}$ Folglich iſt $a : x = x : \frac{a}{2}$, das heißt, die Abſciſſe GP oder x iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen der Helfte und dem 4ten Theil der groſſen Axe. In dieſem Fall beſtimmt aber die Ordinate PM die beyden gleichen conjugirten Diameter. (§. 81).

* §. 85.

Fünfter Zuſatz. Wenn man die kleine Axe CD ſo lange verlängert, bis ſie in dem Punkt H mit der Tangente MO zuſammen ſtößt, ſo wird man finden, daß GS, die Helfte des conjugirten Diameters SF, die mittlere Proportionallinie ſey zwiſchen den Segmenten MH und MO der Tangente HMO, die durch den Berührungspunct M gezogen iſt und durch die beyden verlängerten Axen determinirt wird. Es iſt folglich zu beweiſen, daß MH : GS $=$ GS : MO, oder daß $\overline{GS}^2 = MO \times MH$ ſey.

Beweis. Man hat ſchon geſehen, daß die beyden rechtwinklichten Triangel MPO und GIS ſich ähnlich ſind (Conſtr.)

(Conſtr.) Folglich verhält ſich GS : MO = GI. PO. (S), und wenn man an die kleine Axe die Ordinate MQ ziehet, ſo werden auch die rechtwinklichten Triangel HQM und GIS ſich ähnlich ſeyn (weil HO mit GS parallel iſt (Conſtr.)) Folglich verhält ſich GS : MH = GI : MQ. (T). Wenn man folglich die Glieder dieſer beyden Verhältniſſe S und T der Ordnung nach durch einander multiplicirt, ſo iſt $\overline{GS}^2 : MO \times MH = \overline{GI}^2 : PO \times MQ$. (R) Es iſt aber MQ = GP = x und PO = $\frac{aa - xx}{x}$ (§. 50. 51); Folglich iſt PO × MQ = $\frac{(aa - xx)}{x} x = aa - xx = (a + x)(a - x) = AP \times PB = \overline{GI}^2$ (§. 78); Folglich iſt PO × MQ = $\overline{GI}^2$. Wenn man folglich die Proportion R wieder vornimt, ſo iſt MO × MH = $\overline{GS}^2$ oder MH : GS = GS : MO. W. z. E. W.

* §. 86.

Sechſter Zuſatz. Nimmt man demnach an, daß GM < GS ſey, und verlängert GM ſo lange, bis die verlängerte Linie MT eine dritte Proportionallinie zu den beyden Linien GM und GS iſt, ſo werden die 4 Punkte G, O, H, T in der Peripherie eines Cirkels ſeyn, wovon das Centrum in irgend einem Punkt R der Hypothenuſe HO iſt.

Denn es iſt GM : GS = GS : MT. (Bed'ng) Folglich iſt GM × MT = $\overline{GS}^2$. Nun iſt aber $\overline{GS}^2$ = MO × MH (§. 85); Folglich iſt GM × MT = MO × MH; Folglich verhält ſich GM : MH = MO : MT; Folglich ſchneiden ſich die beyden Linien GT und HO ſo, daß d e Theile der einen ſich umgekehrt verhalten, wie die Theile der andern, und folglich ſind ihre Endpunkte O. G. H. T in der Peri-

pherie eines Cirkels (*), deſſen Centrum ſich in der Hypothenuſe HO befinden muß, denn da der rechte Winkel OGH ein Winkel an der Peripherie iſt, ſo muß nothwendig HO ein Diameter ſeyn.

Um das Centrum dieſes Cirkels zu finden, muß man eine

(*) Zur Erläuterung dieſer Folge wird dieſe beygefügte Anmerkung einigen Leſern nicht unangenehm ſeyn. Ich beziehe mich auf die 12 Fig. Tab. XI. Hier werde ich 1) beweiſen, daß wenn 4 Punkte H, D, A, G in der Peripherie eines Cirkels liegen, alsdenn die Theile der Linien DG und AH, die ſich in dem Punkt C ſchneiden, in einem umgekehrten Verhältniſſe gegen einander ſtehen, oder daß CA : CD = CG : CH. Der Beweis iſt dieſer: Es iſt der Winkel DCA = HCG als Verticalwinkel. Der Winkel D = H als Winkel an der Peripherie, die auf einerley Bogen ſtehen. Folglich ſind die Triangel DCA und HCG ſich ähnlich. Folglich verhält ſich AC : CD = CG : CH. Daß aber auch 2) umgekehrt geſchloſſen werden könne, daß dieſe 4 Punkte H, D, A, G in der Peripherie eines Cirkels liegen, wenn AC : CD = CG : CH, oder wenn die Theile der Linien DG und AH in umgekehrtem Verhältniß ſtehen: Dieſes erhellet nun folgendermaſſen. Daß die Peripherie durch die 3 Punkte G, A, D gewiß gehen werde oder gehen könne, iſt kein Zweifel, weil man durch 3 gegebene Punkte immer einen Cirkel beſchreiben kann. Es kommt alſo nur darauf an, noch zu zeigen, daß die Peripherie auch durch den Punkt H gehen müſſe. Wir führen den Beweis auf folgende Art: Geſetzt, die Peripherie gienge nicht durch H; folglich gehet ſie durch irgend einen andern Punkt I oder K jenſeits oder diſſeits H. Geſetzt, ſie gehe durch K, ſo verhält ſich alſo nach dem vorigen Satze AC . CD = CG : CK. Es verhält ſich aber auch vermöge der Bedingung AC : CD = CG : CH. Folglich wäre CH = CK. Folglich ein Theil ſo groß, als das Ganze: Welches unmöglich iſt. Aus dem nämlichen Grunde kann die Peripherie auch nicht durch einem Punkt I gehen, der jenſeits H iſt. Folglich muß ſie nothwendig durch den Punkt H gehen. Dieſes iſt nun mit leichter Mühe auf den Fall in unſerm § anzuwenden, den man nun ohne Schwürigkeit verſtehen muß. B.

eine Perpendiculairlinie LR auf der Mitte der Sehne GT aufrichten, die die Hypothenuſe HO in irgend einem Punkt R berühren wird. Denn es muß der Winkel LMR ein ſpitziger Winkel ſeyn, weil GMO ein ſtumpfer iſt. (§. 39.) Und folglich müſſen MR und LR in einem Punkt R zuſammen ſtoſſen. Dieſer wird das Centrum des Cirkels ſeyn, der durch die 4 Punkte O, G, H, T gehet.

* §. 87.

Siebender Zuſatz. Man ſiehet hieraus, was man zu thun habe, um die beyden Axen der Ellypſe zu finden, in welcher SF, MK die beyden ungleichen conjugirten Diameter ſind, deren Gröſſe und Lage gegen einander man kennet. Man muß MT zur 3ten Proportionallinie zwiſchen GM und GS machen; Man muß durch den Punkt M die Linie HMO parallel mit SF ziehen; Man muß auf der Mitte von GT die Perpendiculairlinie LR aufrichten, und aus dem Punkt R, wo ſie mit der Linie HO zuſammen ſtößt, durch den Durchſchnittspunkt G den Cirkel GHTO beſchreiben, der die Linie HMO in den Punkten H und O durchſchneiden wird. Wenn man nun von dieſen Punkten nach dem Mittelpunkt der Ellypſe die Linien OG und HG ziehet und ſie nach Belieben verlängert, ſo werden die beyden Axen ſich in dieſen Linien befinden, weil ſie ſich im Mittelpunkt nach rechten Winkeln durchſchneiden, (Conſtruction); Und weil $GM : GS = GS : MT$: (Conſtr.) ſo iſt $\overline{GS}^2 = GM \times MT = HM \times MO$. (Nach der Natur des Cirkels); Folglich iſt $\overline{GS}^2 = HM \times MO$. Dieſes beweiſet, daß die Punkte H und O in den verlängerten Axen ſind (§. 85).

Um die Länge dieſer Axen zu beſtimmen, muß man merken, daß die Linie HMO die Tangente iſt (§. 79. I.) Wenn man folglich MP auf OG und MQ auf HG perpen-

diculair ziehet und GB zur mittlern Proportionallinie zwiſchen GP und GO, GC aber als die mittlere Proportionallinie zwiſchen GQ und GH annimmt, ſo werden alsdenn die Linien GB und GC die halben Axen ſeyn (§. 54. 58) u. ſ. w.

* §. 88.

Dreyzehnter Zuſatz. Das Rechteck MH×HK (Fig. 58) aus den Abſchnitten eines Diameters MK, die durch eine beliebige Ordinate NH dieſes Diameters gemacht werden, verhalten ſich zum Quadrate dieſer Ordinate $\overline{NH}^2$, wie das Quadrat des Diameters MK zum Quadrat ſeines conjugirten Diameters FS oder wie das Quadrat von GM zum Quadrat von GS.

Beweis. Man ziehe durch den Punkt H, wo die Ordinate NH den Diameter MK durchſchneidet, QHR mit der Axe AB parallel und HL auf dieſelbe perpendiculair und aus den Punkten M und N ziehe man auf die nämliche Axe die Ordinaten MP und NT. dieſe verlängere man, bis ſie die Linie QR in R durchſchneide; Ferner ſey $AG = GB = a$; $CG = GD = b$; $GP = x$; $PM = y$; $GL = m$; $HR = LT = s$; Folglich $GT = GL + LT = m + s$; $GM = GK = g$; $GH = z$; $MH = GM - GH = g - z$; $HK = GK + GH = g + z$; Folglich $MH \times HK = (g - z)\ (g + z) = gg - zz$; $NH = t$ oder $\overline{NH}^2 = tt$; $GS = d$ oder $\overline{GS}^2 = dd$; $AT = AG + GL + LT = a + m + s$ und $TB = GB - GL - LT = a - m - s$; Folglich $AT \times TB = (a + m + s)\ (a - m - s) = aa - mm - 2ms - ss$; $AP = AG + GP = a + x$; $PB = GB - GP = a + x$; Folglich $AP \times PB = (a + x)\ (a - x) = aa - xx$; Und wenn man die Tangente MO an dem Punkt M annimmt, ſo iſt $PO = \frac{aa - xx}{x}$ (§. 50. 51) Es iſt alſo zu beweiſen,

daß MH×HK ($gg-zz$) : $\overline{NH}^2$ (tt) = $\overline{GM}^2$ (gg) : $\overline{GS}^2$ (dd).

Da die Triangel GPM und GLH ſich ähnlich ſind, ſo verhält ſich GP (x) : PM (y) = GL (m) : LH = $\frac{my}{x}$ = TR und da NH mit MO parallel gezogen iſt (Conſtr.), ſo ſind auch die Triangel MPO und HNR ſich ähnlich (*); Folglich verhält ſich PO $\frac{(aa-xx)}{x}$: PM (y) = HR(s) : RN = $\frac{sxy}{aa-xx}$; Folglich iſt NT = TR — RN = $\frac{my}{x} - \frac{sxy}{aa-xx}$. Folglich iſt $\overline{NT}^2 = \left(\frac{my}{x} - \frac{sxy}{aa-xx}\right)^2 = \frac{m^2y^2}{xx} - \frac{2msy^2}{aa-xx} + \frac{s^2x^2y^2}{(aa-xx)^2}$. Wir können aber noch einen andern Werth von $\overline{NT}^2$ finden. Denn es iſt bewieſen worden (§. 10), daß AP×PB ($aa-xx$) : AT×TB ($aa-mm-2ms-ss$) = $\overline{PM}^2$ (yy) : $\overline{NT}^2 = \frac{aayy-mmyy-2msy^2-s^2y^2}{aa-xx}$; Wenn man folglich dieſe 2 Werthe von $\overline{NT}^2$ mit einander vergleicht, ſo iſt $\frac{m^2y^2}{xx} - \frac{2msy^2}{aa-x} + \frac{s^2x^2y^2}{(aa-xx)^2} = \frac{a^2yy-m^2yy-2msyy-s^2yy}{aa-xx}$, und wenn man in dieſer Gleichung auf beyden Seiten $\frac{-2msy^2}{aa-xx}$ aus-

(*) Denn der Winkel bey R iſt ſo groß, als der Winkel bey P, (als rechte Winkel) und da MO mit HN und PM mit TR parallel iſt (Conſtr.), ſo iſt die Figur MN ein Parallelagramm; Folglich iſt OMP = HNR; Folglich ſind die Triangel ſich ähnlich. B.

auslöſcht und durch yy dividirt, ſo iſt $\frac{m^2}{xx}+\frac{s^2x^2}{(aa-xx)^2}=\frac{aa-mm-ss}{aa-xx}$ und wenn man durch xx multiplicirt, ſo iſt $mm+\frac{s^2x^4}{(aa-xx)^2}=\frac{a^2x^2-m^2x^2-s^2x^2}{aa-xx}$; wenn man folglich mm auf die andere Seite und alles unter einerley Benennung bringt, ſo iſt $\frac{s^2x^4}{(aa-xx)^2}=\frac{a^2x^2-m^2x^2-s^2x^2-a^2m^2+m^2x^2}{aa-xx}$; Wenn man folglich das, was ſich aufheben läßt, wegnimmt, und den Reſt durch $aa-xx$ multiplicirt, ſo iſt $\frac{s^2x^4}{aa-xx}=a^2x^2-s^2x^2-a^2m^2$; Wenn man folglich den Ausdruck $-s^2x^2$ auf die andere Seite und alsdenn mit dem andern unter einerley Benennung bringt, ſo iſt $\frac{s^2x^2+a^2s^2x^2-s^2x^4}{aa-xx}=aaxx-a^2m^2$; oder indem man das, was ſich aufheben läßt, wegnimmt $\frac{a^2s^2x^2}{aa-xx}=a^2x^2-a^2m^2$ und wenn man durch aa dividirt $\frac{s^2x^2}{aa-xx}=x^2-m^2$, und indem man weiters durch $aa-xx$ multiplicirt, ſo iſt $s^2x^2=(x^2-m^2)(aa-xx)$ und wenn man durch xx dividirt, ſo iſt s^2 oder $\overline{HR}^2=\frac{(x^2-m^2)(aa-xx)}{xx}$.

Laſſet uns itzt zu den ähnlichen Triangeln GPM und GLH zurückkehren, ſo verhält ſich GP (x) : GM (g) = GL (m) : GH $=\frac{gm}{x}$: Folglich iſt $\overline{GM}^2-\overline{GH}^2=gg-\frac{ggmm}{xx}$. Nun iſt aber $\overline{GM}^2-\overline{GH}^2=$ (GM

$(GM - GH)(GM + GH) = MH \times HK$; Folglich iſt $MH \times HK = gg - \frac{ggmm}{xx} = \frac{ggxx - ggmm}{xx}$; Nun kann man ſich aber leicht überzeugen, daß $MH \times HK \left(\frac{ggxx - ggmm}{xx}\right) : \overline{HR}^2 \left(\frac{(xx - mm)(aa - xx)}{x}\right) = \overline{GM}^2 (gg) : \overline{GI}^2 (aa - xx)$ (§. 78.) Denn das Produkt der äuſſern Glieder iſt dem Produkt der innern Glieder gleich. Wenn man folglich das 2te und 3te Glied mit einander verwechſelt, ſo iſt $MH \times HK : \overline{GM}^2 = \overline{HR}^2 : \overline{GI}^2$. Nun verhält ſich aber wegen der ähnlichen Triangel RHN und IGS (*) $\overline{HR}^2 : \overline{GI}^2 = \overline{NH}^2 : \overline{GS}^2$: Folglich $MH \times HK : \overline{GM}^2 = \overline{NH}^2 : \overline{GS}^2$; Und wenn man folglich das 2te und 3te Glied mit einander verwechſelt, ſo iſt $MH \times HK : \overline{NH}^2 = \overline{GM}^2 : \overline{GS}^2$, oder $gg - zz : tt = gg : dd$. W. z. E. W.

* §. 89.

Erſter Zuſatz. Da die Ordinate NH nach Belieben angenommen iſt, ſo folgt daraus, daß dieſes von einer jeden andern Ordinate gelten werde und daß folglich $MH \times HK : \overline{VH}^2 = \overline{GM}^2 : \overline{GS}^2$; Folglich $\overline{VH}^2 = \overline{NH}^2$ oder $VH = NH$, das heißt, eine jede Sehne NV, die eine Ordinate an den Diameter MK oder mit der Tangente an dem Scheitelpunkt dieſes Diameters parallel iſt, wird durch dieſen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet. * §. 90.

(*) Denn VN iſt mit FS parallel (Conſtr.); Folglich iſt der Winkel MHN = MGS und da HR auch mit GO parallel iſt (Conſtr.), ſo iſt MHR = MGO; Folglich iſt MHN — MHR = MGS — MGO; Folglich iſt nach der Figur RHN = IGS. Nun iſt auſſerdem noch der Winkel bey R = dem Winkel bey I als rechte Winkel; Folglich ſind dieſe Triangel ſich ähnlich. B.

* §. 90.

Anmerkung. Wenn man dieſe Wahrheit in Abſicht auf die Ordinate VH grade zu hätte beweiſen wollen, ſo würde man ſich ſtatt der Ordinate an der Axe NT und des correſpondirenden Rechtecks AT×TB der Ordinate VE und des correſpondirenden Rechtecks AE×EB, imgleichen des Triangels HVK bedienet haben. Wenn wir die Seiten dieſes Triangels mit den Seiten des Triangels MPO würden verglichen haben, ſo würden wir dadurch die Richtigkeit von folgendem Verhältniſſe haben einſehen können. MH×HK : $\overline{VH}^2 = \overline{gM}^2 : \overline{gS}^2$.

* §. 91.

Zweyter Zuſatz. Weil $gg - zz : tt = gg : dd$. (§. 88) ſo iſt $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$. Folglich, wenn z=GH kleiner wird, ſo wird t=NH gröſſer werden, das heißt, wenn die Abſciſſen eines Diameters einer Ellypſe kleiner werden, ſo werden die Ordinaten dieſes Diameters gröſſer; und umgekehrt, wenn die Abſciſſen gröſſer werden, ſo werden die Ordinaten kleiner. Wir haben dieſes in Anſehung der Axen ſchon bewieſen (§. 18. §. 21). Man ſetzet hierbey voraus, daß das Centrum der krummen Linie der Anfang der Abſciſſen ſey und daß die Ordinaten auf einerley Seite des Mittelpunktes genommen ſind.

* § 92.

Dritter Zuſatz. Wenn eine nach Belieben angenommene Sehne Ax durch einen Diameter MK in dem Punkt b in 2 gleiche Theile getheilet wird, ſo wird dieſe Sehne eine Ordinate dieſes Diameters ſeyn, das heißt, ſie wird nothwendig mit der Tangente MO, die durch den Endpunkt dieſes Diameters gezogen iſt, parallel ſeyn.

Beweis.

Beweis. Geſetzt ſie wäre es nicht, ſo könnte man alſo durch den Punkt A mit der Tangente MO eine andere Parallellinie Ay ziehen, die oberwärts oder unterwärts der Sehne Ax fallen, und eine Ordinate des Diameters MK seyn (§. 79. I.) und folglich durch dieſen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet ſeyn würde (§. 89); Folglich wäre $Ar = ry$; Es iſt aber nach der Vorausſetzung $Ab = bx$; Folglich verhielte ſich $Ar : Ab = ry : bx$. Wenn man folglich die Sehne xy zöge, ſo würde rb oder MK mit xy parallel ſeyn (Geometr.); Wenn man folglich aus den Punkten x und y die Ordinaten yt und xb an den Diameter MK zöge, ſo würden ſie ſich gleich ſeyn. Weil Parallellinien zwiſchen Parallellinien ſich gleich ſind. Folglich würde man in verſchiedenen Entfernungen vom Mittelpunkt auf einerley Seite gleiche Ordinaten haben, oder welches auf eins hinausliefe, es würden mit der Abnahme der Abſciſſen, die Ordinaten nicht zunehmen. Dieſes iſt abſurd (§. 91).

*§. 93.

Vierter Zuſatz. Es folgt daraus, daß eine Linie HL (Fig. 59) die die beyden Mittelpunkte H und L der beyden Sehnen VB und rn der Ellypſe, die unter ſich parallel ſind, mit einander verbindet, nothwendig, wenn ſie nach Umſtänden verlängert wird, durch den Mittelpunkt der krummen Linie gehe. Es wird alſo dieſe Linie nothwendig einer von den Diametern ſeyn.

Beweis. Laſſet uns aus dem Mittelpunkt H der Sehne rn den Diameter MK ziehen, ſo iſt offenbar, daß rn eine Ordinate an dieſem Diameter ſeyn werde, (§. 92) und daß folglich VB, die eine Parallellinie von rn iſt (Beding), auch eine Ordinate an dem nämlichen Diameter ſeyn werde; und daß ſie von demſelben in 2 gleiche Theile getheilet werde (§. 89); Folglich wird der Diameter, der durch die Mitte

von

von *rn* gehet, auch durch die Mitte von VB gehen. Folglich wird die Linie HL, die die beyden Mittelpunkte dieſer Sehne vereiniget, da ſie 2 gemeinſchaftliche Punkte mit dieſem Diameter hat, von demſelben nicht unterſchieden ſeyn. Man muß alſo den Schluß machen, daß eine jede Linie, welche zwo parallellaufende Sehnen einer Ellypſe in 2 gleiche Theile theilet, nothwendig einer von den Diametern dieſer krummen Linie ſey.

* §. 94.

Fünfter Zuſatz. Durch einerley Punkt H einer Ellypſe kann man nicht 2 Sehnen ziehen, die durch den Diameter in 2 gleiche Theile getheilet wären. Denn, wenn dieſes wäre, ſo würden dieſe Sehnen Ordinaten an dem Diameter MK ſeyn (§. 92), oder ſie würden mit der Tangente MO parallel ſeyn und man würde durch den nämlichen Punkt 2 Linien mit einer einzigen parallel ziehen können, welches unmöglich iſt.

* §. 95.

Sechſter Zuſatz. Wenn eine Sehne *rn* einer Ellypſe in 2 gleiche Theile durch einen Diameter MK getheilet wird, und wenn man durch einen der Endpunkte M dieſes Diameters mit dieſer Sehne eine Parallellinie MO ziehet, ſo ſage ich, daß dieſes eine Tangente an dem Punkt M ſeyn wird.

Beweis. Wenn MO in einem ſolchen Falle nicht die Tangente wäre, ſo würde man an dem Punkt M eine Tangente M*x* ziehen können, die über oder unter MO fiel und mit der Sehne *rn* parallel wäre. Denn da *rn* durch den Diameter MK in 2 gleiche Theile getheilet wird (Beding), ſo würde dieſes die Ordinate an dieſem Diameter oder mit der Tangente an dem Punkt M parallel ſeyn (§. 92); Es würde auch umgekehrt die Tangente M*x* mit der nämlichen Sehne *rn* parallel ſeyn. Es iſt aber auch MO mit ihr parallel

rallel (Beding). Man würde alſo in dem nämlichen Punkt 2 Linien MO und Mx haben, die mit einerley Linie rn parallel wären. Dieſes iſt unmöglich. Folglich muß nothwendig eine Linie MO, die durch den Endpunkt eines Diameters mit der Sehne parallel gezogen iſt und durch dieſen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet iſt, das heißt, die mit einer Ordinate dieſes Diameters parallel iſt, eine Tangente an dem Punkt M ſeyn.

§. 96.

Anmerkung. Man könnte dieſe Wahrheit eben ſo, wie man den §. 19 und 22 bewieſen hat, beſtätigen, indem man ſie unmittelbar aus dem §. 91 herleitete.

§. 97.

Siebender Zuſatz. Wenn man folglich vorausſetzt, daß man an einen Diameter eine Ordinate ziehen könne, ohne darzu eine Tangente an einem ſeiner Endpunkte zu gebrauchen, ſo iſt es klar, daß man ein Mittel habe, eine Tangente an jeden Punkt M einer gegebenen Ellypſe zu ziehen.

Denn man muß durch den Punkt M den Diameter MK durch den Mittelpunkt G, den ich als gegeben oder gefunden vorausſetze, ziehen. An dieſem muß man eine Ordinate rn, ſo wie wir es im §. 105 zeigen werden, ſuchen. Darauf ziehe man durch den Endpunkt M die Linie MO mit dieſer Ordinate parallel, dieſes wird die geſuchte Tangente ſeyn (§ 95). Wir werden aber in der Auflöſung der Aufgaben, die wir ſogleich vortragen werden, ein Mittel anführen, wie man an einen Diameter ohne Hülfe der Tangente eine Ordinate ziehen könne.

* §. 98.

Vierzehnter Satz. Wenn man rT mit dem Diameter

meter MK parallel ziehet, ſo wird man finden, daß das Rechteck FT×TS aus den Theilen FT und TS des Diameters FS ſich zum Quadrat der Ordinate rT dieſes Diameters verhalte, wie das Quadrat dieſes Diameters FS zum Quadrat ſeines conjugirten Diameters MK, oder wie das Quadrat von GF zum Quadrat von GM. Man muß alſo beweiſen, daß FT × TS : $\overline{rT}^2 = \overline{GF}^2 : \overline{GM}^2$.

Beweis. Es iſt klar, daß GH = rT oder $\overline{GH}^2 = \overline{rT}^2$ und daß rH = TG oder $\overline{rH}^2 = \overline{TG}^2$ ſey. Nun ward in dem 12ten Satz bewieſen (§. 88), daß MH×HK : $\overline{rH}^2 = \overline{GM}^2 : \overline{GS}^2$ oder $\overline{FG}^2$. Laſſet uns ferner bemerken, daß MH×HK = (MG—GH) (MG+GH) = $\overline{MG}^2 - \overline{GH}^2$ ſey, (weil GK = GM) = $\overline{MG}^2 - \overline{rT}^2$. (weil GH = rT). Folglich MH×HK = $\overline{MG}^2 - \overline{rT}^2$. Es wird alſo aus der vorigen Proportion nachfolgende werden: $\overline{MG}^2 - \overline{rT}^2 : \overline{TG}^2 = \overline{GM}^2 : \overline{FG}^2$, oder durch Verſetzung der Glieder, $\overline{GM}^2 : \overline{GM}^2 - \overline{rT}^2 = \overline{FG}^2 : \overline{TG}^2$; Wenn man folglich das 2te Glied vom 1ſten und das 4te vom 3ten abzieht, ſo iſt $\overline{rT}^2 : \overline{GM}^2 = \overline{FG}^2 - \overline{TG}^2 : \overline{FG}^2$ (M). Es iſt aber $\overline{FG}^2 - \overline{TG}^2$ = (FG—TG) (FG+TG) = FT×TS. Wenn man folglich in der Gleichung M, FT×TS an der Stelle von $\overline{FG}^2 - \overline{TG}^2$ ſetzet, ſo bekommt man $\overline{rT}^2 : \overline{GM}^2$ = FT×TS : $\overline{FG}^2$ oder verwechſelt FT×TS : $\overline{rT}^2 = \overline{FG}^2 : \overline{GM}^2$. W. z. E. W.

*§. 99.

Anmerkung. Man findet folglich die nämliche Eigenſchaft der Ellypſe, man mag die Ordinaten an dem Diameter

lich

MK oder am Diameter FS nehmen. Deswegen heiſſen dieſe beyden Diameter conjugirte Diameter, weil ſie gleiche Beſtimmungen verurſachen.

Man ſiehet auch zugleich, daß die Haupteigenſchaften der Ellypſe in Betracht ihrer Axen (10. 12. 20) ſich durch die Säze 13. 14. auf einem jeden Diameter erſtrecken. Folglich muß alles, was vermöge ihrer Eigenſchaften in Betrachtung auf die Axe geſchloſſen iſt, in Betracht eines jeden Diameters ſtatt finden.

* §. 100.

Erſter Zuſatz. Man kann daraus folgern:

1) Daß wie im §. 10 ſich die Quadrate der Ordinaten eines jeden Diameters einer Ellypſe zu einander verhalten wie die Rechtecke der correſpondirenden abgeſchnittenen Theile

2) Daß wie im §. 52, wenn man an einem Punkt Z der Ellypſe, der von den Endpunkten der Axe unterſchieden iſt, eine Tangente PZ ziehet, welche in P einen verlängerten Diameter FS berühret, und wenn man die Ordinate Zy an dieſen Diameter ziehet, daß man alsdenn folgendes Verhältniß bekommen werde: $Gy : yS = Fy : yP$ oder wie im §. 54 $Gy : GS = GS : GP$.

Und wenn man umgekehrt von einem Punkt P auſſerhalb der Ellypſe die Linie PG nach dem Mittelpunkt ziehet, und nun eine dritte Proportionallinie zu den Linien GP und GS ſuchet, und wenn man dieſe auf den halben Diameter GS von G nach y trägt, um aus dem Punkt y auf dieſem Diameter die Ordinate yZ zu ziehen, ſo wird PZ die Tangente ſeyn. Dieſes kann maneben ſo, wie im §. 53, beweiſen.

* §. 101.

Zweyter Zuſatz. In dem §. 91 war dieſe Gleichung

chung $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$. Setzet man nun voraus, daß die 2 Diameter SF und MK (Fig. 58) ſich gleich ſind, oder daß $g = d$ ſo iſt $gg - zz = \frac{ggtt}{dd} = gg - zz = tt$. Dieſes zeiget an, daß $MH \times HK = \overline{NH}^2$ ſey. Dieſes iſt eine Gleichung, die von der Gleichung des Cirkels nur darinn unterſchieden iſt, daß die Ordinaten in der Ellypſe gegen ihre Diameter nicht perpendiculair ſind, wie im Cirkel. Man kann alſo bey dem bloſſen Anſchauen einer ſolchen Gleichung $gg - zz = tt$ nicht wiſſen, ob dieſe Gleichung zur Ellypſe oder zum Cirkel gehöre. Man muß folglich nothwendig die Beſchaffenheit der Coordinaten in Erwägung ziehen (*a*). Sind dieſe rechtwinklicht gegen einander, ſo iſt es eine Gleichung für den Cirkel. Sind ſie aber ſchiefwinklicht, ſo gehört ſie zur Ellypſe, und zeigt an, daß ihre beyden Diameter ſich gleich ſind.

* §. 102.

Dritter Zuſatz. Wenn man zu 2 conjugirten Diametern MK und FS eine dritte Proportionallinie p ſuchet, ſo iſt dieſe Linie p der Parameter des Diameters MK. Es würde aber derſelbe der Parameter des Diameters FS ſeyn, wenn dieſer Diameter das erſte Glied dieſer Verhältniß und MK das 2te wäre. Es verhalte ſich demnach $2g : 2d = 2d : p$. ſo verhält ſich auch $4gg : 4dd = 2g : p$. (*). Folglich iſt $\frac{gg}{dd} = \frac{2g}{p}$. Wenn man folglich in der Gleichung für die Dia-

(*a*) Die Abſciſſen und die Ordinaten zuſammen genommen heiſſen Coordinaten, das heißt eigentlich die zuſammen genommenen Ordinaten. Es kann auch in der That die Abſciſſe GH eines Diameters MK (Fig. 59) für die Ordinate rT an dem conjungirten Diameter deſſelben FS genommen werden, und umgekehrt.

(*) Man leſe die Erläuterung zum §. 168 der Parabel. B.

meter $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$, die wir im §. 91 gefunden haben, den Ausdruck $\frac{2g}{p}$ an die Stelle von $\frac{gg}{dd}$ ſetzet, ſo iſt $gg - zz = \frac{2gtt}{p}$. Dieſes iſt eine Gleichung für die Ellypſe, wenn man ſie gegen den Parameter eines ihrer Diameter MK hält.

§. 103.

Vierter Zuſatz. Hieraus folgt, wie im §. 28. 29, daß das Rechteck MH×HK aus jeden 2 Stücken eines Diameters MK ſich zum Quadrat $\overline{NH}^2$ der correſpondirenden Ordinate verhalte, wie dieſer Diameter zu ſeinem Parameter. Denn weil $gg - zz = \frac{2gtt}{p}$ (§. 102), ſo iſt auch, wenn man durch p multiplicirt $(gg - zz)\, p = 2g \times tt$. Folglich iſt $gg - zz : tt = 2g : p$, oder MH × HK : $\overline{NH}^2$ = MK : p.

*§. 104.

Aufgabe. Man finde für eine gegebene Ellypſe 1) jeden Diameter 2) derſelben Mittelpunkt 3) ihre Axen 4) die Brennpunkte 5) die gleichen conjugirten Diameter (Fig. (60.)

Aufløſung. 1) Man ziehe in dieſer Ellypſe nach Belieben 2 Sehnen nl und mb, die unter ſich parallel ſind. Durch ihre Mitte I und S laſſe man die Linie OP gehen. Dieſe wird ein Diameter der krummen Linie ſeyn (§. 93).

2) Man theile den Diameter OP in dem Punkt G in 2 gleiche Theile, ſo wird in dem Theilungspunkt G der Mittelpunkt der Ellypſe ſeyn (§. 25.).

3) Aus dem Mittelpunkt G beſchreibe man einen Cirkelbogen, welcher die Ellypſe in 2 Punkten P und T durchſchneide. Man ziehe die Sehne PT, theile dieſe in dem Punkt x in 2 gleiche Theile, durch dieſen Punkt und durch den Mittelpunkt G ziehe man die Linie AB: So iſt dieſe eine von den Axen.

Denn da die Sehne PT durch AB, die durch den Mittelpunkt ihres Bogens gehet, in 2 gleiche Theile getheilet wird, ſo iſt dieſe Sehne, die Ordinate an dem Diameter AB (§. 92) und da dieſe Sehne, vermöge der Conſtruction, gegen den nämlichen Diameter perpendiculair iſt, ſo folgt, daß AB eine von den Axen ſey. Denn nur die Ordinaten der Axe ſind perpendiculair. Denn eine jede Ordinate eines Diameters iſt mit der Tangente, die durch einen Endpunkt dieſes Diameters gezogen iſt, parallel (§. 79. I). Es ſind aber die Tangenten an den Endpunkten der Axen gegen dieſen Diameter perpendiculair. Eine jede Linie, die durch den Mittelpunkt der Ellypſe an einen jeden andern Punkt des Umkreiſes gezogen iſt, machet jederzeit mit der Tangente an dieſem Punkt einen ſchiefen Winkel (§. 39).

4) Richtet itzt auf der Mitte vou AB die Perpendicularlinie CGD auf, ſo wird dieſe die andere Axe der Ellypſe ſeyn (§. 9). Wenn AB $>$ CD, ſo wird AB die groſſe und CD die kleine Axe oder die conjugirte Axe von AB ſeyn; Es wird aber umgekehrt CD die groſſe und AB die kleine Axe ſeyn, wenn CD $>$ AB.

5) Nachdem man die beyden Axen beſtimmt hat, ſo kann man die Brennpunkte F und f dieſer krummen Linie nach §. 66. finden.

6) Um die gleichen conjugirten Diameter derſelben zu bekommen; muß man von dem einem Endpunkt A der groſſen Axe an die Endpunkte C und D der kleinen Axe die Sehnen

AC und AD ziehen und durch die Mitte t und r dieſer Sehnen muß man von dem Mittelpunkt G die beyden Linien GP und GT ziehen. Werden dieſe in Q und K verlängert, ſo geben ſie uns die beyden conjugirten Diameter OP und KT.

Denn da AC offenbar ſo groß als AD iſt, und GP eben ſo auf AD gezogen iſt, als GT auf AC, ſo kann man daraus leicht ſchlieſſen, daß GP=GT ſey. Da ferner vermöge der Conſtruction die Sehne AC durch den Diameter KT in 2 gleiche Theile getheilet worden iſt, ſo folgt daraus, daß AC eine doppelte Ordinate an dieſem Diameter ſey (§. 92). Um alſo zu zeigen, daß der Diameter OP von dem Diameter KT ein conjugirter Diameter ſey, darf man nur beweiſen, daß OP mit AC parallel ſey (§. 79. I). Weil nun aber GD=CG und $Dt=tA$ iſt (Conſtr.) ſo verhält ſich auch GD : CG=Dt : tA. Folglich iſt AC mit GT oder OP parallel (Geometrie). W. z. E. W.

*§. 105.

Aufgabe. Man finde an jedem gegebenen Diameter einer Ellypſe die Lage ſeiner Ordinaten; Man ziehe eine Tangente an einem ſeiner Endpunkte, und man ſuche ſeinen conjugirten Diameter.

Auflöſung. Nehmet in der Peripherie der Ellypſe einen beliebigen Punkt n, der von den Punkten O und P verſchieden iſt. Von dieſem Punkt n ziehet an einem von den Endpunkten O des Diameters OP die Sehne nO; verlängert ſie ſo lange, bis Oh=nO iſt und ziehet durch den Pnnkt h die Linie hB mit OP parallel. Wenn ihr nun durch den Punkt n oder B, wo hB die Ellypſe berühret, die Sehne nB ziehet, ſo wird dieſe eine Ordinate am Diameter OP ſeyn, und wenn ihr durch einen von den Endpunkten P dieſes Diameters mit nB eine Parallellinie PQ ziehet, ſo wird dieſe die Tangente an

an dem Punkt P ſeyn. Ziehet endlich durch das Centrum G mit der Ordinate nB oder mit der Tangente PQ eine Parallellinie KT, ſo wird KT der conjugirte Diameter von OP ſeyn.

Beweis. Weil hB mit OP parallel iſt (Conſtr.), ſo verhält ſich $nO : Oh = nS : SB$. Nun iſt aber $nO = Oh$ (Conſtr.); Folglich iſt auch $nS = SB$. Folglich iſt die Sehne nB durch den Diameter OP in 2 gleiche Theile getheilet und folglich iſt ſie die Ordinate an dieſem Diameter, das heißt, ſie iſt eine Parallellinie von der Tangente, die man durch einen der Endpunkte dieſes Diameters ziehen könnte (§. 92).

2) Da die Linie PQ mit der Sehne nB, die eine Ordinate an dem Diameter OP iſt, das heißt, die durch dieſen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet wird, parallel iſt (Conſtr.), ſo iſt ſie nothwendig die Tangente an dem Punkt P (§. 95).

3) Eben ſo, da der Diameter KT mit der Tangente PQ, die durch den Endpunkt P dieſes Diameters gezogen iſt, parallel iſt, ſo iſt ſie nothwendig der conjugirte Diameter von OP (§. 79. I). W. z. E. W.

* §. 106.

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkt P auſſerhalb der Ellypſe eine Tangente an dieſe krumme Linie zu ziehen (Fig. 59).

Aufloſung. Suchet den Mittelpunkt der Ellypſe G (§. 104) und ziehet PG. Nun ſuchet zu den 2 Linien GP und GS eine dritte Proportionallinie. Traget ſie von G in y und ziehet von da aus die Ordinate yZ (§. 105). Ziehet darauf von dem Punkt P nach dem Punkt Z die Linie PZ, ſo werdet ihr die geſuchte Tangente bekommen. Dieſes iſt evi-

dent (§. 100) denn es verhält ſich $Gy : GS = GS : GP$ (Conſtr.).

§. 107.

Anmerkung. Wenn ihr yZ auf der andern Seite des Diameters FS ſo lange verlängert, bis ſie die Ellypſe in einem andern Punkt berühret (Ich laſſe dieſe Verlängerung, ſo wie auch die an ihren Endpunkt gezogene Tangente weg, um die Verwirrung unter den Linien zu vermeiden) und wenn man nun von dem Punkt P an den Endpunkt dieſer verlängerten Linie eine grade Linie zöge, ſo würde dieſe gleichfalls aus den vorhin angeführten Gründen eine Tangente an der Ellypſe ſeyn. (§. 106).

* §. 108.

Zuſatz. Man kann alſo aus einem auſſerhalb der Ellypſe gegebenem Punkt P an dieſe krumme Linie jederzeit 2 Tangenten ziehen. Dieſe werden ſich gleich ſeyn, wenn der gegebene Punkt in der verlängerten Axe iſt. In jedem andern Punkt aber werden ſie ſich ungleich ſeyn. Und dieſes geſchiehet deswegen, weil die Ordinaten in dem erſten Fall rechte Winkel, im 2ten Fall aber ſchiefe Winkel machen.

§. 109.

Aufgabe. Das Verhältniß des Rechtecks LPxT. aus den beyden Axen der Ellypſe gegen das Parallelagramm KgON aus 2 conjugirten Diametern ef und zI zu finden, das heißt, wenn man durch die Endpunkte A, B, C, D der Axen, die Tangenten LP, Px, xT und TL ziehet, um das äuſſere Rechteck LPxT zu bekommen, und wenn man die nämliche Conſtruction aus den Endpunkten f. e. z, J jeder 2 conjugirten Diameter ef und zJ macht, um das ſchiefwinklichte Parallelagramm KgQN,

KgQN, welches um die nämliche Ellypſe beſchrieben iſt, zu bekommen, ſo fragt man, in welchem Verhältniſſe dieſe 2 Parallelagromme ſind? oder welches einerley iſt, welches das Verhältniß des 4ten Theils BGDx des erſtern zum 4ten Theil fGIO des zweyten ſey?

Auflöſung. Man verbinde den Endpunkt I eines von den conjugirten Diametern mit dem nächſten Endpunkt B der gröſten Axe; Man ziehe durch I die Linie hQ mit der groſſen Axe und durch B die Linie Mr mit dem Diameter zJ parallel.

Unter dieſer Vorausſetzung iſt es klar

1) Daß der Triangel GJB die Helfte des Rechtecks BGhQ ſey. Denn dieſe Figuren haben eine gleiche Grundlinie GB und liegen zwiſchen einerley Parallellinien GB und hQ. Aus dem nämlichen Grunde iſt der Triangel GJB die Helfte des Parallelagramms GMrJ; Folglich iſt BGhQ = GMrJ.

2) Es iſt auch evident, daß 2 Gröſſen ſich gleich ſind, wenn ſie die mittlere Proportionalgröſſe zwiſchen den nämlichen Gröſſen ſind (a). Wenn man folglich beweiſet, daß die 2 Parallelogramme BGDx und fGJO alle beyde die mittlere Proportionalgröſſen zwiſchen einerley Gröſſen ſind, ſo muß man auch überzeugt ſeyn, daß ſich dieſe 2 Parallelogramme gleich ſind,

Bemerket alſo, daß ſich das Parallagramm BGhQ oder GMrJ (Art. I) zum Parallagramm BGDx, welches die nämliche Grundlinie hat, verhalte, wie Gh : GD. Wenn man aber GD ſo lange verlängert, bis ſie mit der

(a) Geſetzt es ſeyn x und z beyde mittlere Proportionallinien zwiſchen a und b, ſo iſt $z = x$. denn, weil $a : x = x : b$ ſo iſt $xx = ab$ und weil auch $a : z = z : b$, ſo iſt auch $zz = ab$; Folglich iſt $zz = xx$. Folglich $z = x$.

Tangente OV zuſammen ſtößt, ſo wird ſich der Ordinate wegen, die durch den Berührungspunkt I auf die kleine Axe gezogen iſt, folgendes Verhältniß ergeben: $Gh : GD = GD : GV$ (§ 58.) $= GD \times Dx : GV \times Dx$, das heißt, $= BGDx : GVyS$ (weil, wenn man GV zur Grundlinie des Parallelagramms GVyS annimmt, die Perpendiculairlinie Dx die Höhe deſſelben ſeyn wird). Folglich verhält ſich BGhQ oder $GMrJ : BGDx = BGDx : GVyS$.

Eben ſo und vollkommen aus den nemlichen Gründen verhält ſich $GMrJ : fGJO = GM : Gf = Gf : GS$ (§. 54. 100.) $= Gf \times Oa : GS \times Oa$; Folglich iſt $GMrJ : fGJO = Gf \times Oa : GS \times Oa$. Nun iſt $Gf \times Oa = fGJO$ und $GS \times Oa = GVyS$, weil die Perpendiculairlinie Oa die gemeinſchaftliche Höhe dieſer Parallelagramme iſt. Folglich verhält ſich $GMrJ : fGJO = fGJO : GVyS$. Folglich ſind dieſe beyden Parallelagramme BGDx und fGJO die mittlern Proportionalgröſſen zwiſchen einerley Gröſſen GMrJ und GVyS, und folglich ſind ſie ſich gleich. (Art. 2.) Folglich iſt das Vierfache LPxT der erſtern ſo groß als das Vierfache KgON des 2ten; Folglich kan man ſchlieſſen, daß das Verhältniß des Rechtecks zwoer Axen, welches um die Ellypſe beſchrieben iſt, zu dem Parallelagramm jeder zweer conjugirten Diameter, das um die nemliche Ellypſe beſchrieben iſt, ein Verhältniß der Gleichheit ſey.

§. †

Unſer Herr Verfaſſer hat in der ganzen Abhandlung von der Ellypſe immer die Abſciſſen von dem Mittelpunkt an gerechnet. Es hat mancherley Nutzen, wenn man auch die Gleichung für die Ellypſe kennet, wenn die Abſciſſen von dem Scheitelpunkt an genommen werden. Ich will mit Erlaubniß des teutſchen Leſers dieſelbe aufſuchen und ſie in einigen

Sätzen

Sätzen anwenden, die vom Herrn la Chapelle übergangen und dennoch von einer nicht geringen Erheblichkeit und Artigkeit ſind. Man erinnere ſich noch, daß wir im §. 12. den Satz bewieſen haben, daß ſich das Quadrat der kleinen oder halben kleinen Axe zum Quadrat der groſſen oder halben groſſen Axe verhalte, wie das Quadrat der Ordinate zum Product aus den correſpondirenden Segmenten der Axe. Folglich iſt (Fig. 48.) $\overline{CG}^2 : \overline{GA}^2 = \overline{FN}^2 : BF \times FA$, oder $\overline{GA}^2 : \overline{CG}^2 = BF \times FA : \overline{FN}^2$. Es iſt aber nach §. 28. der Perameter der groſſen Axe die dritte Proportionalgröſſe zur groſſen und kleinen Axe. Folglich, wenn wir den Parameter $= p$ ſetzen, ſo iſt $2GA : 2CG = 2CG : p$. Folglich auch $4\overline{GA}^2 : 4\overline{CG}^2 = 2GA : p$. (Anmerk. zum §. 168 der Parabel) Es verhält ſich aber auch $4\overline{GA}^2 : 4\overline{CG}^2 = \overline{AG}^2 : \overline{CG}^2$. Folglich verhält ſich auch $\overline{AG}^2 : \overline{CG}^2 = 2GA : p$; Folglich iſt auch $BF \times FA : FN^2 = 2GA : p$. Folglich $\overline{FN}^2 = \frac{p \times (BF \times FA)}{2AG}$. Nun ſey FN, als die Ordinate $= x$ und $2AG = AB = a$, und $AF = x =$ der Abſciſſe vom Scheitelpunkt A angerechnet, ſo iſt $BF = a - x$. Folglich $y^2 = p\left(\frac{x(a-x)}{a}\right) = \frac{p(xa - x^2)}{a} = \frac{pxa = px^2}{a} = px - \frac{px^2}{a}$. Folglich iſt $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Aus dieſer Gleichung läßt ſich nun leichtlich erkennen: 1) daß die Ellypſe wirklich eine krumme und in ſich ſelbſt zurücklaufende Linie ſey. Denn ſie wird die Axe nothwendig 2 mal durchſchneiden; wenn nemlich x oder die Abſciſſe ſo groß als die groſſe Axe wird, und wenn die Abſciſe o iſt. Denn in beyden Fällen werden die Ordinaten verſchwinden oder $= o$ werden müſſen. Es ſey zuerſt $x = a$ ſo iſt $y^2 = pa - \frac{paa}{a} = pa - pa = o$. Es

ſey zweytens $x = o$ ſo iſt $y^2 = po - \frac{po}{a} = o$. Folglich iſt in beyden Fällen keine Ordinate; Folglich durchſchneidet die krumme Linie die Axe. 2) Kann man dadurch ungemein leicht finden, daß es 2 Brennpunkte in der Ellypſe geben müſſe, und den Ort beſtimmen, wo ſie ſind. Es iſt im §. 44. bewieſen worden, daß die Ordinate am Brennpunkt ſo groß, als die Helfte des Parameters ſey $= \frac{p}{2}$. Setzet man daher in der Gleichung ſtatt y hier $\frac{p}{2}$, ſo iſt $\frac{1}{4}p^2 = px - \frac{px^2}{a}$; Folglich $\frac{1}{4}p = x - \frac{x^2}{a}$. Folglich $\frac{1}{4}ap = ax - x^2$ oder wenn man die Glieder der Gleichung insgeſammt verſetzt, ſo iſt $x^2 - ax = -\frac{1}{4}ap$, und wenn man in dieſer unreinen quadratiſchen Gleichung das fehlende addirt, ſo iſt $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap$; Folglich $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap)}$ und alſo $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap)} = a \pm \sqrt{(\frac{a^2 - ap}{2})}$. Hieraus erkennet man, daß ein doppelter Brennpunkt möglich ſey: der eine, wo die Abſciſſe $= \frac{a + \sqrt{(a^2 - ap)}}{2}$; der andere, wo die Abſciſſe $= \frac{a - \sqrt{(a^2 - ap)}}{2}$ iſt. Es läßt ſich auch hieraus gar leicht der Unterſchied zwiſchen dem Cirkel und der Ellypſe herleiten. Denn es iſt der Cirkel eine ſolche Ellypſe, worinn beyde Axen einander gleich und alſo auch der Perameter einer jeden Axe gleich iſt. (§. 28.) Folglich iſt der Parameter beym Cirkel $= a$. Dieſes ſubſtituire man in der Gleichung für den Brennpunkt, in welcher die Ordinate = dem halben Parameter, folglich $= \frac{1}{2}a$ iſt; ſo iſt $\frac{1}{4}a^2 = ax - \frac{ax^2}{a} = ax - x^2$ oder $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = o$. Wenn man nun die Quadratwurzel ausziehet, ſo iſt $x - \frac{1}{2}a = o$. Folglich $x = \frac{1}{2}a$; folglich fällt der Brennpunkt beym Cirkel in den Mittelpunkt. Endlich laſſet uns auch daraus die Aehnlichkeit zwiſchen einer

Parabel und Ellypſe herleiten, die vielleicht bey dem erſten Anblick ganz als unmöglich ſcheinet, und die es auch im ſtrengſten Verſtande iſt, aber die dennoch mit ungemeinem Nutzen in der Aſtronomie von den Mathematikern fingirt wird, und woraus auf die ſchönſte Weiſe die Eigenſchaften der Parabel hergeleitet werden. Man leſe darüber des groſſen Geometers, des Herrn Eulers, Introduct. in analyſ. infinit. Lib. II. Cap. VI. Es iſt wahr, die Ellypſe iſt eine in ſich ſelbſt zurücklaufende krumme Linie; die Parabel nicht. Allein wenn man die Axe der Ellypſe ſich als unendlich groß vorſtellet, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen einen Arm der Parabel und der Ellypſe ſo gering, daß man ihn unmöglich beſtimmen kann. Folglich kan man hier mit den Mathematikern ſagen, es ſey ein paraboliſcher Arm derjenige, der mit einem ellyptiſchen alsdenn zuſammen fällt, wenn die Axe der Ellypſe unendlich groß wird. Daß aber der Unterſchied zwiſchen der Parabel und der Ellypſe endlich kleiner werde, als jede angebliche Gröſſe, iſt folgendermaſſen zu beweiſen. Es müſſen in der Ellypſe und Parabel einerley Scheitelpunkt, ein gleicher Parameter, gleiche Abſciſſen und darzu gehörige Ordinaten angenommen werden. Nun war in dem §. 20. der Parabel die Gleichung für dieſe krumme Linie dieſe: $y^2 = px$. Für die Ellypſe aber iſt die Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Wir wollen, die Verwirrung zu vermeiden ſtatt, y^2 in der Gleichung der Parabel z^2 ſetzen, ſo iſt dieſe Gleichung $z^2 = px$, und die Gleichung für die Ellypſe, die unverändert bleibt, iſt dieſe: $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Wenn man folglich dieſe letzte von der erſten abzieht, ſo iſt der Unterſchied $z^2 - y^2 = \frac{px^2}{a}$. Wird nun a als der Diviſor von px^2 nach und nach gröſſer, ſo wird der Unterſchied zwiſchen der Gleichung der Parabel und Ellypſe immer kleiner. Es iſt bekannt, daß $z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$. Folglich iſt

$\frac{z^2-y^2}{(z+y)}=(z-y)$. Folglich iſt auch $\frac{px^2}{a(z+y)}=(z-y)$. Da aber von z das y abgezogen werden kann, ſo iſt $z>y$ und folglich $z+y<2z$. Es iſt aber vermöge der Gleichung der Parabel $z=\sqrt{px}$. Folglich iſt $2z=2\sqrt{px}$ und alſo $z+y<2\sqrt{px}$. Folglich iſt $z-y<\frac{px^2}{a(2\sqrt{px})}$. Nun iſt aber $p=\sqrt{p}.\sqrt{p}$ und $x^2=x\sqrt{x}.\sqrt{x}$ und $\sqrt{px}=\sqrt{p}.\sqrt{x}$. Wenn wir folglich dieſe Werthe ſubſtituiren, ſo iſt $z-y<\frac{\sqrt{p}.\sqrt{p}.x\sqrt{x}.\sqrt{x}}{a(2\sqrt{p}.\sqrt{x})}$, und wenn wir die gleichen Factores des Dividendus und Diviſors gegen einander aufheben, ſo iſt $z-y<\frac{x\sqrt{px}}{2a}$. Auf dieſe Art wird alſo der Unterſchied immer kleiner, doch verſchwindet er noch nicht. Nimt man aber die groſſe Axe a unendlich groß an, ſo iſt $a=\infty$, und folglich, da $z^2-y^2=\frac{px^2}{a}$ war, ſo iſt $z^2-y=\frac{px}{\infty}$, und da hier der Nenner des Bruchs gegen den Zähler unendlich groß wird, ſo iſt der Zähler als o zu betrachten, und folglich iſt der ganze Bruch $=o$. Folglich iſt $z^2-y^2=o$. Das heißt, aller Unterſchied zwiſchen der Parabel und Ellypſe fällt weg; und folglich iſt der Arm der Ellypſe, wenn ihre Axe unendlich groß wird, für den Arm der Parabel zu nehmen. B.

Gebrauch der Ellypſe in der Dioptrick, oder in Verfertigung der Brenngläſer und anderer Gläſer zur Verſtärkung des Geſichts, oder zur Verbeſſerung der Fehler deſſelben.

§. 110.

Die Dioptrick iſt eine Wiſſenſchaft, worinn man die Geſetze der Strahlenbrechung lehrt. Schon lange hat

es

es die Erfahrung bewieſen, daß ein Lichtſtrahl, der durch die Luft ins Waſſer, oder in Glas, oder überhaupt in ein dünners oder dichters Mittel (*a*) gehet, in dem Augenblick des Ubergangs aus einem dieſer Mittel in ein anderes ſeinen Weg oder ſeine Richtung ändere. Ein Lichtſtrahl AB, (Fig. 62.) welcher nach einer graden Linie ſchief aus der Luft ins Waſſer fällt, gehet von dem Augenblick an, da er über den Punkt B kommt, nicht weiter in der verlängerten Linie AB von B nach L fort, ſondern er bricht ſich nach einer graden Linie BG, indem er ſich der Linie CBD, die auf dem Einfallspunkt B ins Waſſer perpendiculair aufgerichtet iſt, nähert. Wenn er hingegen vom Waſſer in die Luft gehet, ſo entfernt er ſich durch ſeine Brechung von dieſer Perpendiculairlinie. Dieſe Veränderung in der Richtung nennet man die Refraction, von dem lateiniſchen refringere, brechen, weil der Lichtſtrahl ABG wirklich in B gebrochen oder gebogen zu ſeyn ſcheinet.

§. 111.

Nach dieſer Beobachtung ſuchte man es auszumachen, ob ſich dieſe Refraction nicht nach einem gewiſſen Geſetze richte; Es mögte die Neigung des Strahls AB oder SB gegen die Perpendiculairlinie oder Axe der Refraction auch ſeyn, welche ſie wollte. Dieſe Unterſuchung brachte den Cartes auf die vortrefliche Entdeckung, durch welche ſein erhabenes Genie ſich

(*a*) Man verſteht durch ein Mittel in der Phyſik einen jeden Raum, durch welchen Körper in ihrer Bewegung laufen können. Z. E. Luft, Waſſer, Glas ſind die Mittel, wodurch das Licht geht. Man ſagt ferner, daß ein Mittel dünner als ein anderes ſey, wenn das erſtere unter dem nemlichen Raum weniger Materie hat, oder weniger wiegt, als das zweyte. Da nun ein Cubiczoll Luft weniger als ein Cubiczoll Waſſer wiegt, ſo ſagt man, die Luft ſey ein dünneres Mittel als das Waſſer. So iſt das Queckſilber ein dichteres Mittel als das Waſſer, weil das erſte unter dem nemlichen Raum mehr wiegt.

ſich zu Erfindungen empor ſchwang, die die gegenwärtige Welt und die nachfolgenden Geſchlechte nicht verkennen können, ohne ihre Vernunft zu beſchimpfen. (*a*) Denn es ſey ABC der Neigungswinkel des Strahls AB, und der Winkel SBC der Neigungswinkel des Strahls SB: DGB, der gebrochene Winkel des Strahls AB, und DBJ der gebrochene Winkel des Strahls SB, ſo wird man finden, wenn man einen Cirkel aus dem Punkt B mit einem beliebigen Radius AB oder SB beſchreibt, daß der Sinus SR des Neigungswinkels SBC ſich jederzeit zum Sinus MI ſeines gebrochenen Winkels DBJ verhalte, wie der Sinus AT eines jeden andern Neigungswinkels ABC zum Sinus GP ſeines gebrochenen Winkels DBG, oder daß SR : MJ = AT : GP.

Man kann den Beweis davon in dem 2ten Capitel ſeiner Dioptrick leſen, und man muß gewiß die ſcharfſinnige und ſchöne Theorie, die ihn zu dieſer vortreflichen Erfindung führte, bewundern. Eine Erfindung der Theorie, die durch tauſendfältige Verſuche, die von den geſchickteſten und geübteſten Händen angeſtellet worden ſind, beſtätigt worden iſt. (*)

§. 112.

Erſte Anmerkung. Wenn der Strahl AB aus der Luft ins Waſſer geht, ſo iſt es klar, daß der Neigungswinkel ABC oder DBL, der ihm gleich iſt, gröſſer als der gebrochene Winkel DBG ſey. Wenn hingegen der Strahl GB aus Waſſer in Luft fährt, ſo iſt der Neigungswinkel DBG klei-

(*a*) Man ſehe die Abhandlung im §. 123.

(*) Wer des Carteſius Werke etwa nicht bey der Hand hat, der findet eine gründliche Ausführung hievon in Krafts Phyſick P. III. Cap. IV. Auch verdienet des Herrn Montucla ſeine Geſchichte der Mathematick II. B. hierüber nachgeleſen zu werden. B.

kleiner, als der gebrochene Winkel ABC. Wir werden das Verhältniß, welches zwiſchen dem Sinus des Neigungswinkels und dem Sinus des gebrochenen Winkels iſt, **das Verhältniß der Refraction** nennen. Man hat durch Verſuche gefunden, daß, wenn der Strahl aus der Luft in Glas fährt, dieſes Verhältniß beynahe wie 3 : 2 ſey; und wenn der Strahl aus Glas in die Luft fährt, nicht viel von dem Verhältniß wie 2 : 3 unterſchieden ſey.

Wenn man folglich durch Verſuche das Verhältniß des Sinus eines einzigen **Neigungswinkels** gegen den Sinus des **gebrochenen Winkels** findet, ſo wird man ohne Mühe nach einer einfachen Regel de Tri die Gröſſe eines gebrochenen Winkels zu einem beliebigen Neigungswinkel wiſſen. Laſſet uns z. E. annehmen, daß ein Lichtſtrahl ſchief aus der Luft ins Glas falle und daß alsdenn der Sinus ſeines Neigungswinkels ſich zum Sinus ſeines gebrochennen Winkels verhalte = 3 : 2, wie es die Erfahrung beynahe zeiget (*), und daß dieſes Verhältniß nach der Erfindung und dem Beweiſe des Carteſius (§. 111) beſtändig ſey; Wenn man nun annimmt, daß der Neigungswinkel 20° ſey, ſo iſt der Sinus, den ich a nenne, durch die Tabellen bekannt, und man muß, um den Sinus x ſeines gebrochenen Winkels zu bekommen, folgendes Verhältniß anſetzen $3 : 2 = a : x$. Folglich iſt $x = \frac{2a}{3}$. Wenn man dieſen Sinus in den Tabellen aufſucht, ſo wird er auch zugleich die Gröſſe des gebrochenen Winkels anzeigen und folglich den Weg beſtimmen, den der Strahl nach ſeiner Brechung nehmen muß. §. 113.

(*) Wer genauere Nachricht hievon zu haben wünſchet, dem empfehle ich *Zahn ocul. artific. Kircher. Ars magna Luc. & Vmbr. Wolffii Elem. Diopt. Newton. Diop. Euleri Nova theor. Luc.* Smiths Lehrbegrif der Optick, welches ſchöne Werk wir nicht blos überſezt, ſondern ganz umgearbeitet und vervollkommet unſerm berühmten Herrn Hofrath Käſtner zu verdanken haben. B.

§. 113.

Zweyte Anmerkung. Nur Lichtſtrahlen, die auf eine brechende Oberfläche ſchief fallen, ſind den Geſetzen der Refraction unterworfen. Indem die Erfahrung es beſtändig zeigt, daß ein perpendiculairer Lichtſtrahl ſich nicht breche.

§. 114.

Da Carteſius durch Schlüſſe und Verſuche gefunden hatte, daß das **Verhältniß der Refraction** ein beſtändiges Verhältniß ſey, ſo fehlte es dieſem groſſen Geometer, dieſem Geſetzgeber in den höhern Wiſſenſchaften nicht mehr, die Figur der vortheilhafteſten Krümmung zu beſtimmen, die man Gläſern geben muß, die die Fehler der Augen verbeſſern oder die Stärke des Geſichts vermehren ſollen. So ſchloß er:

Wenn die Augen in einer Weite von 30 Schuh einen Gegenſtand nicht mehr deutlich unterſcheiden können, welchen ſie doch auf 10 Schuh leichtlich erkennen, ſo kommt es daher, weil ſie die Strahlen, die von der weitern Entfernung kommen, nicht ſo gut empfinden können, als diejenigen die von der nähern kommen (*a*). Könnte ich alſo ein Inſtrument erfinden, welches die Lichtſtrahlen die aus der gröſſern Entfernung kommen, ſo ins Auge brächte, als wenn ſie aus der Diſtanz von 10 Schuh kämen, ſo würde der 30 Schuh entfernte Gegenſtand ſo vollkommen deutlich geſehen werden, als wenn er nur 10 Schuh weit von uns abſtünde.

§. 115.

Um dieſes zu erhalten, laſſet uns nach der 63ten Figur eine Ellypſe AMB annehmen, worinn die groſſe Axe AB und die

(*a*) Man ſetzet hierbey immer voraus, daß das Unvermögen der Augen nicht von der geringen und ſchwachen Erleuchtung des Objects komme.

die Entfernung der Brennpunkte Ff mit einander in dem Verhältniß der Refraction ſtehen, daß heißt, worinn $AB:Ff = 3:2$ (§.112.) (*a*) Nun behaupte ich, daß alle Strahlen DM, die mit der Axe AB parallel aus der Luft in einen Glaskörper fallen, der durch das Herumwälzen dieſer Ellypſe um ihre Axe erzeuget worden iſt, daß dieſe Strahlen nach geſchehener Refraction nothwendig nach dem Brennpunkt *f*, der von dem Object, von welchem die Strahlen herkommen, am weiteſten entfernt iſt, hinlaufen müſſen.

Beweis. Nachdem man auf die krumme Linie oder deren Tangente an dem Punkt M die Perpendiculairlinie LMH gezogen und $DM = Mf$ gemacht hat, um aus dem Punkt M mit dem Radius Mf oder DM den Cirkel fDT zu beſchreiben, ſo iſt es klar, daß die Perpendiculairlinie DL der Sinus des Neigungswinkels DML und die Perpendiculairlinie fH der Sinus des Winkels fMH ſey. Wenn wir folglich beweiſen werden, daß der Sinus DL und fH in dem Verhältniß der Refraction ſind, ſo muß fH nothwendig der Sinus des gebrochenen Winkels ſeyn, da DL der Sinus des Neigungswinkels DML iſt. Folglich wird auch fMH der gebrochene Winkel zu dem Neigungswinkel DML ſeyn, das heißt, der Lichtſtrahl DM wird vermöge der Refraction im Punkt M gegen den Brennpunkt *f* gerichtet ſeyn.

Nun wird aber 1) nach den Geſetzen der Refraction der Strahl DM, nachdem er aus der Luft in Glas gefallen, nicht in der verlängerten Linie DM von M nach R fortgehen, ſondern er wird ſich brechen, und ſich der Perpendiculairlinie LH nähern (§.110.); Er wird folglich zwiſchen der verlängerten Linie MR und dieſer Perpendiculairlinie durchgehen.

2) Wenn er ſich gegen den Brennpunkt *f* richtet, ſo wird der Neigungswinkel und der Refractionswinkel vollkommen ſo ſeyn, als ſie nach den Geſetzen der Refraction ſeyn

 ſollen,

(*a*) Man findet die Conſtruction einer ſolchen Ellypſe im §. 117.

ſollen, das heißt, es wird DL : fH = 3 : 2 ſeyn. Denn DL : fH = AB : Ff. (§. 41.) Nun verhalten ſich aber AB : Ff = 3 : 2. (Conſr.) Folglich verhält ſich auch DL : fH = 3 : 2.

3) Wenn ſich der Strahl DM nach einer andern Linie, als Mf wendete, ſo würde er mit der Linie LH, die auf der krummen Linie perpendiculair ſtehet, einen Winkel machen, der kleiner oder gröſſer wäre, als der Winkel fMH; Folglich würde auch der Sinus dieſes Winkels gröſſer oder kleiner ſeyn, als der Sinus fH des Winkels fMH; Folglich könnte ſich DL nicht zu dieſem andern Sinus verhalten = 3 : 2. Um folglich dem Geſetze der Refraction zu folgen, muß der Strahl DM, wenn er aus der Luft ins Glas fällt, bey ſeinem Brechen nothwendig ſeine Richtung gegen den Brennpunkt f nehmen.

§. 116.

Zuſatz. Da der Punkt M nach Belieben angenommen worden iſt, ſo iſt es klar, daß alle Strahlen, die auf dieſe gläſerne Ellypſoide mit der Axe derſelben parallel einfallen, ſich in dem Brennpunkt f innerhalb dieſem Körper vereinigen werden. Wenn man folglich aus dem Punkt f mit einem beliebigen Radius einen Cirkelbogen MSP beſchreibt, welcher zwiſchen A und G durchgeht, ſo wird man ein Stück PAMSP von der erzeugenden Ellypſe bekommen, welches durch das Herumdrehen um ſeine Axe einen Körper erzeugen wird, der vermöge ſeiner Eigenſchaft alle Strahlen, die mit ſeiner Axe parallel einfallen, und aus der Luft durch ihn durchgehen, in einem einzigen Punct f in der Luft vereinigen wird.

Denn der Strahl OC wird, wenn er bey C aus der Luft ins Glas fällt, ſeine Richtung Cx verlaſſen, um derjenigen zu folgen, die ihn nach dem Brennpunkt f führt. (§. 115.) Da alſo der Punkt f das Centrum des Bogens MSP iſt, ſo

wird

wird dieſe letztere Richtung in einem von den Halbmeſſern dieſes Bogens ſeyn. Es iſt aber ein jeder Radius eines Cirkels gegen die Peripherie deſſelben perpendiculair. Folglich wird der Strahl OC, nachdem er in C gebrochen worden iſt, perpendiculair auf dem Cirkelbogen MSP fallen, folglich wird er, wenn er aus dem Glaſe in die Luft fällt, von ſeiner Richtung Cf nicht abgebrochen werden. (Denn ein Lichtſtrahl, der nach der Perpendiculairlinie aus einem Mittel in ein anders Mittel übergeht, leidet keine Refraction. (§. 113.) Folglich wird der Strahl OC, oder ein jeder anderer ihm ähnlicher, der ſich bey dem Einfallen in das gegebene Glas gegen deſſen Brennpunkt f gebrochen hat, auch noch bey ſeinem Ausfahren aus demſelben in die Luft dahin gerichtet ſeyn. Man bekommt folglich durch dieſe Conſtruction ein ſehr vollkommnes Brennglas.

§. 117.

Erſte Anmerkung. Um zu machen, daß die Axe AB einer Ellypſe und die Entfernung ihrer Brennpuncte Ff in dem Verhältniß der Refraction gegen einander ſeyn, oder daß ſich AB zu Ff verhalte = 3 : 2, darf man AB nur in 3 gleiche Theile theilen und AF und Bf ſo groß als die Helfte eines ſolchen Theils machen, ſo wird ſich AB offenbar zu Ff verhalten wie 3 : 2. Nun iſt es aber leicht, aus der groſſen Axe und dem Brennpunkt einer Ellypſe dieſe krumme Linie zu conſtruiren. (Art. 2. §. 66.) Folglich . . . . .

§. 118.

Die zweyte Anmerkung. Die Erfahrung beweiſet es, daß ein Glas bey ſonſt gleichen Umſtänden deſto undurchſichtiger ſey, um je dicker es iſt. Es werden demnach die Brenngläſer die Eigenſchaft zu brennen vermuthlich in einem deſto höhern Grade beſitzen, je dünner ſie ſind. Dieſes iſt

eine Beobachtung, worauf Künſtler, die dieſe Art von Gläſer verfertigen, ſehr aufmerkſam ſeyn ſollten.

§. 119.

Es werden hingegen alle Lichtſtrahlen, welche aus dem Brennpunkt f durch die Luft auf das Glas PAMSP fallen, nach ihrem Durchgange mit der Axe AB parallel laufen.

Beweis. Der Strahl fM fällt aus der Luft in das Glas perpendiculair gegen die Cirkelfläche MSP und wird ſich alſo daſelbſt nicht brechen. (§. 113.) Er wird alſo nur bey ſeinem Ubergange aus dem Glaſe in die Luft den Geſetzen der Refraction unterworfen ſeyn; und er wird ſich im Brechen von der Perpendiculairlinie nach der Seite D entfernen. (§. 110.) Dieſe Brechung muß ſo beſchaffen ſeyn, daß $DL : fH = 3 : 2$. (§. 112.) Nun verhält ſich aber $AB : Ff = 3 : 2$. (Conſtr.) Folglich verhält ſich $DL : fH = AB : Ff$. Wenn aber dieſes geſchiehet, ſo iſt DM nothwendig mit der Axe AB parallel. (Nach dem umgekehrten Satz des §. 41.) Folglich . . .

§. 120.

Zuſatz. Folglich werden die Strahlen eines leuchtenden Körpers, der in dem Brennpunkt f ſtehet, vermittelſt eines ſolchen Glaſes auf eine ſehr groſſe Weite ſtark genug fortgepflanzet, um Gegenſtände dadurch erkennen zu können.

§. 121.

Wir haben augenblicklich erſt die Strahlen DM und OC . . . . . (Fig. 63), die mit der Axe AB der Ellypſoide parallel laufen, ſo betrachtet, daß ſie auf die erhabene Seite dieſes Körpes fallen. Itzt wollen wir nun ſetzen, daß ſie auf die hohle Seite PAM (Fig. 64.) immer noch mit der Axe AB parallel einfallen. Ich behaupte alsdann, daß wenn man aus dem Brennpunkt f mit einem

Ra-

Radius der entweder gröſſer iſt, als fA einen Cirkelbogen OST beſchreibt, und man die Linien OP und TM, die eine Richtung gegen den Brennpunkt haben, ziehet, ſo wird durch das Herumwälzen der Figur OPAMTS um ihre Axe AB ein Körper erzeugt werden, wodurch die Strahlen, die von der Seite gegen f mit ſeiner Axe parallell einfallen, nachdem ſie durch dieſes Glas gegangen ſind, ſo auseinander fahren werden, als wenn ſie alle aus dem Punkt f gekommen wären.

Beweis. Nach der 63ten Figur erkennet man, vermöge der Geſetze der Strahlenbrechung, daß der Lichtſtrahl RM, der parallel mit BA aus der Luft in Glas fällt, ſeine Direction verlaſſen werde, um ſich nach der Linie MV gegen das Perpendikel HML der Ellypſe zu brechen. (§. 110.) (*a*) das heißt, daß er ſich ſo weit von ſeiner erſten Richtung von R gegen D entfernen werde, als er ſich entfernte, da er von der Seite D nach R gieng. (Man ſetzt voraus, daß er einerley Mittel ſey) Folglich iſt die Entfernung oder der Winkel DMV ſo groß, als die Entfernung oder der Winkel RMf; Es iſt aber $fMD + RMf = 2$ rechten Winkeln; folglich iſt auch $fMD + DMV = 2$ rechten Winkeln: Folglich iſt die Linie MV in der nemlichen graden Linie mit fM (Geometr.) Folglich werden ſich die Strahlen RM, die auf die hohle Seite dieſes elyptiſchen Glaſes mit der Axe deſſelben parallel einfallen, bey ihrem Ubergang in daſſelbe von ihrer Richtung entfernen, oder ſie werden ſo auseinander fahren, als wenn ſie aus dem Brennpunkt f kämen.

Folglich wird der Lichtſtrahl HM (Fig. 64.) wenn er aus der Luft in das Glas OPAMTS fällt, indem er durch die Höhlung dieſes Körpers gehet, die Richtung MT annehmen, die nach dem Brennpunkt f, als dem Mittelpunkt des Cirkelbogens OST gehet. Folglich wird der Strahl MT perpendiculair auf den Cirkelbogen OST fallen, und daſelbſt keine

(*a*) Man nimmt in Gedanken in der 63ten Figur den Bogen MSP weg und läßt den Strahl RM ſogleich auf die Ellypſe ſtoſſen.

keine Refraction leiden. (§. 113.) Folglich wird er aus dem Glaſe in die Luft nach der Richtung TK gehen, welche, wenn ſie verlängert wird, grade nach dem Brennpunkt *f* gehet. W. z. E. W.

§. 122.

Zuſatz. Wenn alſo ein Auge einen Punkt eines beliebigen Gegenſtandes, welcher ſich in *f* befindet, deutlich erkennen kan, ihn aber in einer gröſſern Entfernung zu unterſcheiden nicht im Stande iſt, ſo wird man, da die Strahlen, die von einem ſehr entfernten Objecte kommen, ſinnlich parallel ſind, (Note zum §. 158. der Parabel) ſo wird man, wenn man zwiſchen dem Auge und dem Objecte ein Glas, wie OPAMTS, ſetzet, deſſen ellyptiſche Hohlung PAM gegen die Seite des Objects gekehrt iſt, und deſſen erhabene Cirkelfläche OST nach dem Auge zu lieget, und welches über diß ſeinen Brennpunkt in *f* hat, ſo wird man, ſage ich, dieſes dadurch verurſachen, daß die Strahlen, die von dieſem ſehr entfernten Punkt kommen, ſolchergeſtalt in die Augen fallen werden, als wenn ſie aus dem Brennpunkt *f* kämen, und man hat folglich auf dieſe Art ein Mittel für den beſtimmten Fehler der Augen, das heißt, man wird für ſolche Perſonen ein vortrefliches Augenglas bekommen, die ein gar zu kurzes Geſicht haben.

Anmerkung. Dieſes iſt die vortrefliche Dioptrick des Carteſius. Durch dieſes ſo eben angeführte und durch Hülfe des 7ten Zuſatzes zum 6ten Hauptſatz der Ellypſe im §. 41, den ich ausführlich erklärt habe, werdet ihr im Stande ſeyn, die ganze geometriſche Lehre, die zum Verſtande ſo ſchöner Erfindungen und zur Verbeſſerung der Teleſſkope und Mikroſkope nöthig iſt, hinlänglich einzuſehen. Zu dieſem füget ja noch dasjenige hinzu, was ich davon in dem Artikel von der Hyperbel erkläre, und wo ich mich bemühe, den Gebrauch dieſer krum-

krummen Linie in Verfertigung der Augengläſer zu zeigen, dann könnet ihr anfangen das Werk des Carteſius ſelbſt zu leſen.

Ohngeachtet er zuerſt das wahre Geſetz von der Refraction entdecket hat, und ohngeachtet ſeine Dioptrick das erſte Product in dieſer Art iſt und auf unwiderleglichen Grundſätzen ſich ſtützet und ohngeachtet man nicht vermuthen ſolle, daß eine Wiſſenſchaft bey ihrer erſten Entſtehung ſich ſehr weit ausbreiten würde, ſo ſcheinet mir dennoch dieſes das tiefſinnigſte und erhabenſte Werk zu ſeyn, welches über dieſe Materie bekannt gemacht iſt. Ich mögte beynahe ſagen, daß er das beſondere Verdienſt hat ſie auf einmal erfunden und zu ihrer größten Höhe gebracht zu haben (*).

Abhandlung über die Entdeckung des Geſetzes der Strahlenbrechung.

§. 123.

Die Meinung, die man von der Fähigkeit einer Nation hat, trägt ohne Zweifel das mehrſte dazu bey, ſie ehrwürdig zu machen. Sie kann aber ihre Fähigkeiten nicht beſſer beweiſen, als durch ſinnreiche Entdeckungen, die auf die Bedürfniſſe des menſchlichen Geſchlechts angewendet werden. Folglich iſt es von einiger Wichtigkeit den wahren Urheber einer Erſindung zu kennen.

Die Dioptrick des Carteſius ward um das Jahr 1637 (*a*) öffentlich bekannt. Niemals hatte man in dieſer Art etwas ſo ſicheres in ſeinen Grundſätzen noch etwas ſo ſinnreiches in ſeinen Folgerungen geſehen. Dieſe Materie hatte ſich ihm unter einem ſo hellen Geſichtspunkte gezeiget, daß er faſt zu der

(*a*) Man ſehe das Leben des Carteſius vom Herrn Baillet.
(*) Ich berufe mich hier auf meine Anmerkung zum §. 112. B.

der Zeit ſie ganz überſahn, da er zu ihr den Grund legte. Der Gelehrte findet darinn ein Licht, das ihn erleuchtet, dem Künſtler wird die Hand geführt und dem ganzen menſchlichen Geſchlechte werden würkliche Vortheile dargeboten.

Sein Syſtem wird auf dem von uns ſchon angeführten Grundſatz gebauet. **Unter was für einem Neigungs- oder Einfallswinkel ein Lichtſtrahl aus einem Mittel in ein anderes dichteres oder dünneres übergehet, ſo iſt das Verhältniß des Sinus ſeines Neigungswinkels zum Sinus ſeines gebrochenen Winkels beſtändig das nämliche, oder, der Sinus eines Neigungswinkels verhält ſich zum Sinus ſeines gebrochenen Winkels, wie der Sinus eines jeden andern Neigungswinkels zum Sinus ſeines gebrochenen Winkels.**

Cartes kam auf dieſen Lehrſatz durch eine ſehr ſinnreiche und einfache und von der Geometrie unterſtützten Theorie. Verſuche beſtätigten denſelben und auf einmal ward die Kunſt, das Geſicht zu verbeſſern, auf eine unfehlbare Methode gebracht. Eine Methode, wovon der franzöſiſche Weltweiſe unwiderſprechlich der Vater wäre, wenn der Neid nicht allem widerſpräche.

Ich habe gegründete Einwürfe gegen die Männer, welche behauptet haben, daß er vielleicht dem **Willebord Snell** einem Holländer und Zeitverwandten des Carteſius etwas hierin zu verdanken habe. Zweifel können für feindſelige Geſinnungen vortheilhaft ſeyn, aber die Vernunft können ſie nicht überzeugen. Laſſet uns zuerſt bey denjenigen ſtille ſtehen, die ohne alle Ausnahme behauptet haben, daß Carteſius zuerſt das Geſetz der Strahlenbrechung bekannt gemacht habe, ohne des Snells zu gedenken, in deſſen Handſchriften er, ihrer Behauptung nach, dieſe Entdeckung angezeigt gefunden hat.

Herr

Herr von Wolf thut dieſes in ſeiner Dioptrick (*) Herr Chambers hat das nämliche in ſeinem Dictionaire Encyclopedique in engliſcher Sprache unter dem Wort Strahlenbrechung genau wiederhohlet. Herr von Voltaire hat es als bekannt angenommen; vermuthlich um Hrn. Newton deſto mehr erheben zu können. Hier ſind die Worte des franzöſiſchen Dichters, die man auf der 91ten und 92ten Seite der erſten Ausgabe ſeiner Elemente der newtonianiſchen Weltweisheit lieſet.

„Snellius erfand zuerſt das beſtändige Verhältniß, „nach welchem ſich die Lichtſtrahlen in verſchiedenen Mitteln „brechen. Man eignet dieſe Ehre dem Carteſius zu Denn „man leget immer dem angeſehnſten Philoſophen diejenige „Erfindung bey, die er öfters nur bekannt macht. Dieſer „zieht ſeine Vortheile von den unbekannten Bemühungen des „andern und er vermehrt ſeinen Ruhm durch ihre Entde„ckungen. Die Entdeckung des Snellius war übrigens ein „Meiſterſtück des Witzes.“

Eine Beſchuldigung von der Art verdiente wenigſtens, daß man ſie mit einigem Anſehen unterſtüzte. Da man aber nichts anführt, ſo halte ich mich gegen das Publicum verbunden die Mühe der Unterſuchung auf mich zu nehmen.

(*) Dieſes ſind ſeine Worte in ſeinen *Elem. Dioptr.* §. 35. Conſtantem rationem eſſe ſinuum angulorum inclinationis & refracti multiplici experimento detexit *Willebrordus Snellius*, quamvis non adverterit lineas, per quas rationem conſtantem explicavit, eſſe illorum angulorum ſinus. Ex ejus ſcripto non edito eandem rationem conſtantem *non nominato Snellio* propoſuit Carteſius, cui vulgo hoc inventum tribui ſolet. *Snellio* idem vindicat *Hugenius* cui conſtabat, *Carteſium* tractatum *Snellii* vidiſſe. Vielleicht thut Herr von Wolf hier dem Carteſius zu nahe, wie die Folge der Abhandlung zeigen wird, da ſelbſt Hugenius ein Bedenken trägt, ſo apodictiſch den Carteſius zu beſchuldigen. B.

Es iſt davon nicht die Frage, ob Snellius das Geſetz der Refraction habe erfinden können; auch ſelbſt davon nicht, ob er es zuerſt erfunden habe. So etwas iſt man nie im Stande zu beweiſen. Wie viele Entdeckungen ſind entweder niemals oder zu ſpät bekannt geworden. Nur darauf kommt es an, daß man beweiſe, Carteſius habe ſeine Entdeckungen dem Snellius geraubet oder nicht geraubet. Wir wollen das, was geſchehen iſt, erzählen.

Herr Hygens ſagt in ſeiner Dioptrick, daß Carteſius auf ſeiner Reiſe durch Holland zum Snellius gekommen ſey (*a*). Dieſer hätte viele eigene Handſchriften über die Natur des Lichts bey ſich liegen gehabt. Unter denſelben wäre ein Geſetz der Refraction geweſen, welches dem durch den Carteſius 1637 bekannt gemachten, ſehr nahe käme. Herr Hygens habe dieſes Geſetz in den vorhandenen Handſchriften geſehen, und Carteſius habe das ſeinige vielleicht daraus genommen.

Allein wenn Carteſius den Snellius ſprach, ſo hat auch Snellius wiederum den Carteſius geſprochen. Einer war ein Freund vom andern. Und noch iſt es unmöglich zu entſcheiden, welcher den gelehrten Diebſtahl begangen habe. Man beſtimmt die Zeit nicht genau, wann dieſe Philoſophen ſich beſuchten (*b*), noch dieſes, ob auch dieſe Entdeckung von einer oder der andern Seite damals ſchon gemacht worden ſey. So viel iſt gewis, daß man zum erſtenmal im Jahr 1637 davon reden hörte; Daß Carteſius dieſelbe als ſeine Entdeckung in ſeiner Dioptrick bekannt machte, daß niemand

(*a*) Dieſes iſt meiner Meinung nach zweifelhaft. Man weiß es, mit welcher Genauigkeit und Weitläuftigkeit Herr Baillet die kleinſten Lebensumſtände des Cartes angeführt habe. Dennoch findet man bey ihm nichts von dieſer Zuſammenkunft.

(*b*) Snellius ſtarb im Jahr 1626. Siehe Baillets Leben des Carteſius.

mand ſich dieſelbe zugeeignet; Daß wie Voß 24 oder 25 Jahr nachher ſeine Abhandlung vom Licht herausgab, er darinn geſtand, daß er dem Snellius viele ſchöne Beobachtungen ſchuldig ſey, worunter ſich auch diejenige befände, die man für einerley mit dem Satze des Carteſius hielte, daß Voß dieſen Diebſtahl dem franzöſiſchen Philoſophen im geringſten nicht vorgeworfen habe, ohngeachtet er ſich wider ſeine Dioptrick erklärt hatte, und ohngeachtet er würklich mit ihm darüber im Streite lag; daß Herr von Leibnitz und Bernoulli von dieſem Lehrſatze des Snellius nur nach der Verſicherung des Voßius reden; und daß man endlich nicht weiß, wo ſich des Snellius gedrucktes Buch von der Dioptrick befindet, ja daß man ſelbſt nicht weiß ob es jemals gedruckt worden ſey.

Wenn nun die Entdeckung des Snellius im Jahr 1637 ſchon bekannt gemacht geweſen wäre und man hätte ſie in dem Werke des Carteſius wieder gefunden; Iſt es denn nicht gewiß, ich rufe alle Welt zu Zeugen, iſt es nicht offenbar, daß nach aller rechtmäßigen Art zu urtheilen, die Ehre dieſer Entdeckung dem Snellius nach Verdienſt würde zugeeignet worden ſeyn. Iſt nun aber Carteſius der Zeit nach der erſte, ſo erfordert es die natürliche Billigkeit, daß man ihn in ſeinem Beſitze nicht durch ein Vielleicht beunruhige, ſonſt würde man unmöglich jemals auf den Beſitz eines Eigenthums ſich verlaſſen können.

Allein noch mehr! Männer von feinem Verſtande entdecken aus der Methode, wie man in Unterſuchungen verfährt, ob man auf eine Erfindung habe kommen müſſen: So wie Carteſius in ſeine Materie hineindrang und ſein Süjet behandelte, muſte er nothwendig ein Licht darin aufſtecken. Snellius gründete hingegen ſelbſt nach dem Zeugniſſe der Gegner des Carteſius ſeine Entdeckungen nur auf Verſuche (*a*), deren äuſſerſte Delicateſſe in Anſehung der Solidität einen

(*a*) Quod profecto experientia ipſi notum erat *Hugenius* in *Dioptr.*

nen Verdacht erwecken könnte. Ich will nur ein Beyſpiel anführen, welches Männern, die nur die Anfangsgründe der Geometrie wiſſen, ſehr bekannt iſt.

Es behauptet jemand, daß er eine auf Verſuche gegründete Methode beſitze, in einem jeden Cirkel ein regulaires 15 Eck zu beſchreiben, daß ihm dieſe Methode allemal glücke und daß man zur Ueberzeugung nur die Probe machen dürfe. Allein wenn einer in dieſer Operation nicht ſehr geübt iſt, ſo weiß man, daß unter zehn Verſuchen oft nicht einer genau und nach aller Strenge eintrift. Wenn man ſich folglich nur an die Erfahrung hält, ſo hat man 9 Grade der Gewisheit gegen 1 daß die gegebene Methode nicht genau iſt.

Ich ſehe hier ein einziges Mittel, alle Zweifel zu heben, die Hand des Künſtlers gewiß zu machen und ihn immer auf den nämlichen Weg zu führen. Man muß durch eine hinlängliche Erklärung und durch einen ſehr vollſtändigen Beweis ſeinen Verſtand überzeugen. Wenn es ihm dann nicht gelingt, ſo kann er der Methode weiter keine Schuld geben, ſondern allein die Art, ſich derſelben zu bedienen, anklagen. Dieſes hat aber Carteſius gethan. Sein Satz iſt ohne auf Verſuche zu ſehen, bewieſen. Folglich hat er noch in dieſem Betracht den Vorzug des Genies vor Snellius.

Vielleicht wünſcht der Leſer zu wiſſen, wie man es beweiſe, daß der Satz des Snells beynahe der nämliche ſey, welchen Carteſius behauptete. Es ſey demnach NQTZ (Fig. L. *Pl.* 5.) der Durchſchnitt eines rechtwinklichten mit Waſſer angefüllten Gefäſſes. Auf dem Boden dieſes Gefäſſes ſind die Objecte C und T, wovon man die Perpendiculairlinien CG und TZ auf QT aufgerichtet hat. Man ſtelle ein Auge bey K in der Luft, ſo wird das Object C zum Beyſpiel bis D in der Perpendiculairlinie CG erhöhet. Man ziehe durch den Einfallspunkt B in der brechenden Oberfläche die Linie KD und BC. Nun nennet Snellius BC den wahren Licht-

ſtrahl

ſtrahl, weil das Object ohne Waſſer in C würde geſehen werden; BD nennet er aber den ſcheinbaren Lichtſtrahl, weil das Bild von C in D, wo das Object nicht iſt, nicht anders, als vermöge der Refraction erſcheinen kann. Nachdem man nun aufs genaueſte die Strahlen BC und BD gemeſſen hat, ſo betrachte das nämliche Auge das dem vorigen ähnliche Object nach einer ſchiefern Lage, ſo wird man finden, daß ſich daſſelbe in der Perpendiculairlinie TZ nach V erhebe. Man meſſe nun den wahren Lichtſtrahl RT und den ſcheinbaren RV. Itzt iſt der Hauptſatz des Snellius dieſer: Ich habe beſtändig gefunden, ſagt er, daß unter jedem Neigungswinkel des wahren Strahls gegen QT der wahre Strahl BC zum ſcheinbaren BD ſich verhalte, wie der wahre Strahl RT zu ſeinem ſcheinbaren RV. Carteſius behauptete, daß der Sinus eines Neigungswinkels eines Lichtſtrahls, welcher durch ein dichteres oder dünneres Mittel geht, ſich zum Sinus ſeines gebrochenen Winkels verhalte, wie der Sinus eines jeden andern Neigungswinkels zum Sinus ſeines gebrochenen Winkels. Es iſt folglich nach dem Snellius bey jeder Lage des Auges der wahre Strahl und der darzu gehörige ſcheinbare, immer in einem beſtändigen Verhältniß. Nach dem Carteſius aber haben die Sinus des Neigungswinkels und gebrochenen Winkels dieſe Eigenſchaft gegen einander.

Beym erſten Anblicke ſcheint zwiſchen dieſen alſo ausgedruckten Sätzen ein groſſer Unterſchied zu ſeyn. Selbſt Leibnitz, ſo durchdringend auch ſein Verſtand war, konnte nur mit einiger Mühe ſie für einerley gelten laſſen. Dennoch kann man mit einer beſondern Leichtigkeit einen aus dem andern herleiten Man ziehe durch die Punkte B und R die Perpendiculairlinien MH und OF auf die brechende Fläche NZ. Weil nun die Strahlen CB und TR in den Punkten B und R, wo ſie in die Luft gehen, ihre Richtungslinien CA und TI verlaſſen uud ſich von den Perpendickeln MH und OF nach den Linien BK und RK, wovon die Linien BD und RV die Verlänge.

längerungen ſind, wenden, (Beding); ſo iſt es klar, daß HBC und FRT die Neigungswinkel ſind; daß KBM oder HBD der gebrochene Winkel von HBC und KRO oder FRV der gebrochene Winkel von FRT ſey.

Unter dieſer Vorausſetzung behaupte ich, daß, wenn man nach dem Snellius dieſes Verhältniß annimmt, daß der ſcheinbare Strahl BD ſich zum wahren Lichtſtrahl BC verhalte, wie der ſcheinbare Lichtſtrahl RV zum wahren Lichtſtrahl RT; ich behaupte, ſage ich, daß man alsdenn nachdem Carteſius dieſes Verhältniß bekommen werde. Der Sinus des Neigungswinkels HBC verhält ſich zum gebrochenen Winkel HBD, wie der Sinus des Neigungswinkels FRT zum Sinus des gebrochenen Winkels FRV.

Beweis. Es ſey S das Zeichen des Sinus eines Winkels. Man betrachte die wahren und ſcheinbaren Strahlen in den Triangeln BCD und RTV, und erinnern ſich, daß die Seiten des Triangels ſich zu einander verhalten, wie die Sinus der gegenüber ſtehenden Winkel; Folglich daß BD : BC = S. BCD oder S. HBC : S. BDC oder S. BDG = S. HBD und RV : RT = S. RTV oder S. FRT : S. RVT oder S. RVZ = S. FRV. Nun verhält ſich aber nach der Bedingung BD : BC = RV : RT; Folglich verhält ſich S. HBC : S. HBD = S. FRT : S. FRV. W. z. E. W. (*)

Man kann hingegen den Satz des Snellius mit der nämlichen Leichtigkeit aus dem Satze des Carteſius herleiten. Allein,

(*) Dieſes alles wird ohne Mühe verſtanden werden, wenn man ſich nur daran erinnert, daß die Wechſelwinkel ſich gleich ſind, und daß 2 Winkel, die zuſammen 180° ausmachen, gleiche Sinus haben: daß folglich für den Sinus eines ſtumpfen Winkels, der Sinus eines ſpitzigen genommen werden müſſe, welcher das Complement zu 180° Grade von dem ſtumpfen Winkel iſt. B.

Allein, weil man aus der Gleichheit der Wechſelwinkel, die bey Parallellinien, wenn ſie von einer andern graden Linie durchſchnitten werden, entſtehen, beweiſet, daß die Summe der 3 Winkel in einem Triangel zween rechten Winkels gleich ſey, folgt denn daraus, daß der Erfinder des erſten Satzes auch den lezten erfunden habe? Man könnte dieſes ſelbſt dann nicht einmal ſchlieſſen, wenn auch die beyden Sätze vollkommen identiſch wären. Nicht ſelten fällt man, ohne mit einem andern ſeine Gedanken verglichen zu haben, auf die nämliche Wahrheit, indem man über einerley Gegenſtand nachdenket. Oft geſchiehet es ſogar auf einerley Wege. Eine Sache, die mir ſelbſt in dieſem Werke verſchiedentlich begegnet iſt.

Dieſes hätte meiner Meinung nach die Feder derjenigen, die hier den **Snellius** dem **Carteſius** entgegen ſetzen, zurückhalten ſollen, daß nämlich die wahre oder vorgegebene Entdeckung des **Snellius** unter ſeinen Händen beſtändig unfruchtbar geblieben iſt, und daß er nicht ſehr tief in die Theorie der Strahlenbrechung eingedrungen iſt. Da hingegen die Erfindung des **Carteſius** uns eine der ſchönſten und nützlichſten Wiſſenſchaften, die jemals der menſchliche Verſtand erfunden hat, geſchenket hat.

Mein Gewährsmann ſoll Herr **Hygens** ſeyn, deſſen Mäßigung der **Herr von Wolf** und **von Voltaire** nicht nachgeahmet haben. Man durchlaufe die 2 und 3te Seite ſeiner lateiniſchen Dioptrick, die zu Amſterdamm 1728 gedruckt iſt, ſo wird man finden, daß, nachdem er das Geſetz der Refraction des **Carteſius** angeführt, und etwas ähnliches dem **Snellius** beygelegt hat, daß er dieſe merkwürdige Worte hingeſetzt: *Verum ad hanc Sinuum proportionem nequaquam attendit* Snellius *& uſque adeo ab apparente imagine rem omnem pendere exiſtimavit, vt etiam in radio perpendiculari effectum refractionis, ſeu, vt falſo opinatur, decurtationem radii viſorii agnoſcat; deceptus*

tus eo quod etiam recta de ſuper in vas aqua plenum inſpicienti, fundus omni parte attolli videtur. Cujus rei vera cauſa ex radiis ad vtrumque oculum tendentibus petenda erat (*). *Haec omnia, quae de refractionis inquiſitione volumine integro Snellius expoſuerat, inedita manſere, quae & nos vidimus aliquando, & Carteſium quoque vidiſſe* accepimus; *vt hinc*, fortaſſe *menſuram illam, quae in finibus conſiſtit, elicuerit, qua in explicanda iride & vitrorum figuris inveſtigandis feliciſſime eſt vſus.*

Hieraus erkennet man die Behutſamkeit des Herrn Hygens in ſeinen Muthmaſſungen. Der Satz des Carteſius kommt nach ſeiner und meiner Meinung mit dem Satze des Snellius überein. Allein dieſer leztere hat niemals ſeine Aufmerkſamkeit darauf gerichtet. *Nequaquam attendit.* Er hat ſelbſt fälſchlich behauptet, daß die perpendiculairen Lichtſtrahlen ſich brachen, *falſo opinatur.* Das Werk des Snellius war noch nicht gedruckt, wie Herr Hygens davon redet, *inedita manſere*; Er verſichert eine Handſchrift davon geſehen zu haben, *vidimus*; Man habe es ihm geſagt, daß Carteſius ſie auch geſehen habe, *accepimus Carteſium vidiſſe*; daß vielleicht das Geſetz des Sinus ꝛc. welches durch Carteſius entdecket worden, durch das Geſetz des Snellius hätte können veranlaſſet worden ſeyn. *Fortaſſe elicuerit.* Das endlich Carteſius ſeine Entdeckung glücklich auf die Erklärung des Regenbogens, wie auch auf die Unterſuchung der Geſtalt der Gläſer angewendet habe, die man bey Verfertigung der Augengläſer, Mikroſcope und Teleſcope wiſſen muß, *feliciſſime eſt vſus.* Wir wollen daraus den Schluß ziehen, daß die Vermuthungen zum Vortheil des Snellius im Grunde ſelbſt nichts taugen und daß alle Beweiſe für den Carteſius ſtreiten.

(*) Man leſe hierüber Smiths Lehrbegrif der Optick. §. 362. B.

Gebrauch der Ellypſe in der Conſtruction der Sprachröhre.

§. 124.

Wir haben im §. 154 der Parabel geſehen, daß dieſe krumme Linie zur Verfertigung einfacher Sprachröhre ſehr bequem ſey. Aber zur größten Vollkommenheit dieſes Inſtruments iſt ſie nicht hinreichend. Die Schallſtrahlen müſſen nicht nur ſo genau, als möglich, gegen einen beſtimmten Ort gerichtet ſeyn, worzu die Parabel vortrefflich iſt, ſondern es würde auch ſehr vortheilhaft ſeyn, wenn die Luft in dem Sprachrohre ohne das Parallellaufen der Stimmlinien zu verhindern eine gröſſere Geſchwindigkeit bekäme. Wenn man in eine hohle Paraboloide redet, ſo wird die Luft nur durch die Wände des Inſtruments aufgehalten und behält alſo Freyheit ſich auszudehnen und wird folglich ſehr wenig zuſammen gedrückt. Folglich dehnet ſie ſich nach ihrer Federkraft auch langſam wieder aus, und trägt nichts zur Fortpflanzung der Stimme bey, ſo ſehr uns die Kunſt dieſe Verſtärkung als möglich zeiget.

Um uns alſo der geſuchten Vollkommenheit zu nähern, ſo ſey die Ellypſoide Af (Fig. 65) an der Paraboloide fT ſo angebracht, daß dieſe beyden Afterkegel einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt f haben, und daß der andere Brennpunkt der Ellypſoide in dem Mundſtück an demjenigen Orte ſey, in welchem man reden muß. Nun werden die Schallſtrahlen Ab und Ac, die von dem Brennpunkt A auslaufen, bey ihrem Auffallen auf die Ellypſoide nach ihrem andern Brennpunkt f reflectirt (§. 36). Folglich wird ihre gegenſeitige Wirkung auf einander ſie hier verdichten. Von hier können ſie nicht gegen A zurück gehen, weil die Stimme ſie daran verhindert. Sie müſſen ſich alſo in d und g in die Paraboloide ſtürzen. Daſelbſt werden ſie vermöge der Geſtalt dieſes Inſtruments eine Laufbahn ds und gr nehmen, die mit ihrer Axe AT parallel iſt (§. 82 der Parabel), und ſie werden mit

vereinten Kräften ein Wort weiter und genauer fortpflanzen, als wenn das Sprachrohr nur einfach wäre (*).

§. 125.

Nur Verſuche können die Länge und Dicke der Ellypſoide wie auch das Verhältniß dieſer 2 Gröſſen beſtimmen. Wenn man aber einmal dieſen Afterkegel erſt beſtimmt hat, ſo wird dadurch nothwendig die Gröſſe des 2ten beſtimmt, den man ſonſt ſo lang machen kann, als es die Bequemlichkeit erlaubt. Denn da die Ellypſoide und die mit ihr verbundene Paraboloide einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt *f.* haben müſſen, ſo iſt die Ordinate oder die doppelte Ordinate an dieſem Brennpunkt die nämliche in beyden kegelförmigen Körpern. Es iſt aber die doppelte Ordinate am Brennpunkt einer Parabel immer dem Parameter dieſer krummen Linie gleich, (§. 93 der Parabel) und ihre Conſtruction richtet ſich nach der Länge des Parameters (§. 24 Parab.). Folglich iſt das 2te Stück des zuſammen geſezten Sprachrohrs durch das erſte beſtimmt.

§. 126.

Künſtler müſſen zuweilen ſehr kleine Theile bey dem Scheine einer Lampe, eines Wachsſtocks oder eines ordentlichen Lichts bearbeiten, wo das unverſtärkte Licht keine hinlängliche Erleuchtung gibt. Hier kann man ſich ohne Vermehrung der Anzahl der Wachsſtöcke, welches unbequem und theuer ſeyn würde, einer hohlen Ellypſoide bedienen, deren Wände ſehr eben geglättet ſind. Wenn man nun annimmt, daß dieſer Afterkegel, von der Seite *f* abgekürzt ſey, damit man den Brennpunkt deſſelben nach eigenem Belieben in der freyen Luft irgend wohin fallen laſſen kann, ſo begreift man, daß die Strah-

(*) Hier kann mit Nutzen geleſen werden *Haſius Diſſert de Tuba Stentor.* und des Caſſegrains Abhandl. in dem *Journ. de Savans* vom Jahr 1672. *p.* 131 des *Sturm. Colleg. curioſ* B

Strahlen eines leuchtenden Körpers, der in dem Brennpunkt A geſetzet und nach f reflectirt wird (§. 36) das Licht in dieſem Punkt merklich verſtärken und folglich verurſachen werde, daß gute Augen Körper von ausnehmender Kleinigkeit daſelbſt erkennen können.

§. 127.

Dieſer Afterkegel iſt noch mit Nutzen in der künſtlichen Conſtruction des Echos von einer ſchwachen Stimme zu gebrauchen. Wenn man ein Gewölbe oder Decke eines Zimmers nach einer halben Ellypſe verfertigte, ſo wird man dadurch jederman, der ſehr leiſe in dem Brennpunkt A redet, mit aufmerkſamen Ohren in dem Brennpunkt f hören, ohne daß Perſonen, die zwiſchen dieſen Puncten ſtehen, noch weniger aber ſolche, die in einiger Entfernung davon ſind, das geringſte Wort verſtehen können. Hiervon habe ich öfters die Erfahrung gehabt, ſo wohl in dem *Obſervatorium* zu Paris als bey dem Herr Pagni in eben dieſer Stadt. Dieſer Mann hat ein beſonders Talent für alles, was phyſiſche Verſuche betrift und er zeiget ſeine Geſchicklichkeit mit ſehr glücklichem Erfolg.

Die Urſache von dieſer Würkung iſt dieſe, daß die Schallinien Ab und Ac, die von dem Brennpunkt A auslaufen, bey dem Auffallen auf das Gewölbe oder der obern Krümmung nach dem andern Brennpunkt f, woſelbſt ſich ein Ohr befinden muß, reflectirt werden. Ihre Wiedervereinigung in f iſt alſo die Urſache, weswegen die leiſe Stimme, die aus dem Brennpunkt A kommt, in f gehört wird; da inzwiſchen in den übrigen Orten zwiſchen A und f, wo keine Vereinigung der Schallſtrahlen geſchiehet, dieſe nicht von der Stärke ſind, die Ohren der Zuhörer zu erſchüttern.

§. 128.

Gebrauch der Ellypſoide in Verfertigung der Hörröhre. Nach meiner Meinung iſt eine ellyptiſche Röh-

re, die ungefehr der 66ten Figur ähnlich iſt, viel geſchickter zur Conſtruction der Hörröhre, als die Paraboloide, deren im §. 157 der Parabel Erwähnung geſchehen iſt. Wenn man derſelben überdies noch ein Mundſtück gäbe, welches ſo genau, als wie bey dem Sprachrohre, an dem Munde des im Brennpunkt Redenden anſchlöſſe, ſo würden die Schalllinien insgeſammt an das Hauptſtück dieſes Inſtruments hinunter gehen müſſen, und nachdem ſie über die innere Wände *cd* nach dem andern Brennpunkt *f* reflectirt wären und ſich daſelbſt verdichtet hätten, ſo würden ſie nach ihrer Elaſticität ſich nur gegen die Seite des Windrohrs M ausbreiten können. Sie würden ſich folglich dahin mit einer Heftigkeit begeben und daher im Stande ſeyn auf dem Trommelfelle des Ohrs eine mehr als gewöhnliche Erſchütterung zu verurſachen. Dieſes iſt aber die einzige Abſicht bey einem ſolchen Inſtrument.

§. 130.

Ein ſolches ellyptiſches Hörrohr ſcheinet mir vor dem paraboliſchen 2 Vortheile zu beſitzen. 1) Weil das Mundſtück einer Paraboloide ſich nicht genau genug an den Mund anſchließt, ſo läßt es eine groſſe Anzahl von Schallſtrahlen entwiſchen, die alſo nicht in das Hauptſtück des Inſtruments gebracht werden. 2) Weil nur Parallelſtrahlen genau nach dem Brennpunkt einer Parabel reflectirt werden. Es muß aber die Anzahl ſolcher Strahlen ſehr klein ſeyn, indem ſie faſt immer aus dem Munde in Geſtalt eines Büſchels kommen und folglich im geringſten nicht parallel ſind.

§. 131.

Gebrauch der Ellypſe in der Verfertigung und Ausrechnung gedruckter Gewölber. Ein Gewölbe iſt ein nach innen zu hohles Dach, welches ſeine Länge nach geründet iſt, oder die Geſtalt einer Arkade hat, und welches

von auſſen faſt wie die Figur BCGH ausſieht (Fig. 67). Die Mauren, die es tragen, als ABHL, ſind die Nebenpfeiler deſſelben und diejenigen, die es ſchlieſſen, die Zinnen. Man kann ſo viele Arten von Gewölbern haben, als es Arten von krummen Linien giebt, die immer nach einer Seite hohl ſind. Die gewöhnlichſten ſind die Cirkelförmigen Gewölber, die Klostergewölbe und die gedruckten Gewölbe. Cirkelförmige Gewölbe ſind diejenigen, deren vertikaler Durchſchnitt BMC ein halber Cirkel iſt. Denn das Gewölbe fängt ſich nur von der Horizontallinie BC an, die man auch deswegen den Anlauf des Gewölbes zu nennen pflegt. In dem Kloſtergewölbe iſt dieſer Durchſchnitt beynahe Triangelförmig, und in den gedruckten Gewölben, mit welchen man es hier zu thun hat, iſt die Figur eine halbe Ellypſe.

§. 132.

In Anſehung der Conſtruction der Gewölber muß man wiſſen, daß ſie aus Gewölbeſteinen zuſammen geſetzt werden. Dieſes ſind Steine oder eine andere Materie, die in Geſtalt abgekürzter Kegel geſchnitten ſind, und den Gewölbebogen oder den Umfang eines Gewölbes zu machen im Stande ſind. Folglich muß der äuſſerſte Umfang eines jeden Gewölbeſteines, der die innere Fläche eines gedruckten Gewölbes ausmacht, nach einem ellyptiſchen Bogen ſo gehauen ſeyn, daß die vereinigte äuſſerſte Flächen aller Gewölbſteine eine halbe Ellypſe vorſtellen, deren groſſe Axe der Anlauf des Gewölbes BC iſt. Wir haben aber (§. 66) geſehen, wie man eine Ellypſe beſchreiben könne. Man kan alſo den Gewölbeſteinen eine ellyptiſche Geſtalt geben um dadurch ein Gewölbe zu conſtruiren; welches um ſo viel gedruckt iſt, um wie viel die kleine Axe kleiner iſt als die groſſe Axe (*a*).

(*a*) Wenn es die Umſtände erlauben, ſo werde ich die Materie von den Gewölben in einem andern Werke gründlicher abhandeln.

§. 133.

Man berechnet den körperlichen Inhalt oder das Mauerwerk dieſes Gewölbes, wenn man anfänglich die Oberfläche der halben Ellypſe BOCB (Zuſatz des §.68. oder §.74.) beſtimmt. Darnach muß man ſie durch die Linie BH, die die ganze Länge des Gewölbes zwiſchen den Zinnen anzeigt, und die eben deswegen von den Baumeiſtern die Länge des Werks genennet wird, multipliciren. Dieſes Product gibt den körperlichen Innhalt des Gewölbes, wenn man es ganz als einen durchaus dichten Körper betrachtet. Allein man muß den Innhalt der Hohlung, deren Durchſchnitt die innere halbe Ellypſe BMCB iſt, davon abziehen. Man muß dieſe halbe Ellypſe durch die nämliche Länge des Gewölbes multipliciren, ſo bekommt man den Innhalt der Höhlung dieſes Gewölbes. Der Reſt, der nach dem Abzuge dieſer Höhlung von dem ganzen Gewölbe übrig bleibt, iſt der körperliche Innhalt des Gewölbes ſelbſt, deſſen Dicke zwiſchen den zwey Linien BOC und BMC enthalten iſt. (*)

Ich übergehe hier die Ausrechnung der Nebenpfeiler und der Zinnen. Sie ſind Parallelepipide, die ſich leicht nach der gemeinen Geometrie berechnen laſſen.

Von

---

deln. Ich werde in demſelben die Anwendung der krummen Linien auf den Steinſchnitt zeigen. Das, was ich hier ſage, ſoll uns zum voraus zeigen, wie nothwendig es in der Baukunſt ſey eine Ellypſe zu beſchreiben, oder deren Oberfläche zu berechnen.

(*) Ich empfehle bey dieſer Materie dem wißbegierigen Leſer folgende Bücher aufs nachdrücklichſte: Belidors Ingenieurwiſſenſchaft und *Camus Cour de Math.* T. III Pars I. Sie werden in dieſen zwey Werken alles finden, was ſie unterrichten und vergnügen kann. Eines Freziers, Dürands und anderer, die eigentlich vom Steinſchnitt vortreflich geſchrieben haben, erwähne ich hier nicht. B.

Von der Hyperbel.

§. 1.

Erklärung. Es ſollen die Cirkel RST und LMV (Fig. 68.) unter ſich parallel ſeyn, und ſie ſollen den Axentriangel eines Kegels ERT perpendiculair durchſchneiden. Wir wollen auch dieſes voraus ſetzen, daß durch den nämlichen Kegel eine andere Fläche ſolchergeſtalt gegen den Triangel ERT perpendiculair gehe, daß dadurch die beyden Cirkelflächen RST und LMV, wie auch die Seite ET des Kegels durchſchnitten werde, und daß ſie verlängert auch den entgegengeſetzten Kegel Eyx durchſchneide: alsdann wird dadurch ein 3ter Durchſchnitt OBS entſtehen, dem die Alten den Namen der Hyperbel gegeben haben. Wir werden die Urſache davon im §. 39 anzeigen.

§. 2.

Erſter Zuſatz. Es iſt aus der Conſtruction und aus allem dem, was wir zu Anfange der Parabel und der Ellypſe geſagt haben, klar, daß OS gegen den Diameter RT und gegen den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt BG der Hyperbel und des Axentriangels perpendiculair ſey, und daß ſie folglich bey G in 2 gleiche Theile getheilt werde. Aus den nämlichen Gründen iſt MH gegen den Diameter VL und gegen BG perpendiculair, und wird auch in P in 2 gleiche Theile getheilt. Wenn man ſolchergeſtalt mehr Cirkelſchnitte, wie LMV zwiſchen dem Scheitelpunkt B der Hyperbel und der Baſis RST des Kegels macht, ſo werden alle gemeinſchaftliche Durchſchnitte dieſes Cirkels und der Hyperbel in 2 gleiche Theile getheilt, und ſind gegen BG, als dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitt der Hyperbel und des Axentriangels perpendicnlair. Eben dieſes gilt auch von OS und HM.

§. 3.

Zweyter Zuſatz. Weil folglich OS, MH und alle andere gemeinſchaftliche Durchſchnitte durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt BG in 2 gleiche Theile getheilt werden, und auch gegen dieſen gemeinſchaftlichen Durchſchnitt perpendiculair ſind, ſo folgt daraus, daß BG die Axe der Hyperbel ſey. (Nach der Erklärung, die wir davon bey der Parabel und der Ellypſe gegeben haben.) Die Linien PM oder PH, GS oder OG ſind die Ordinaten; BP und BG die Abſciſſen. Ferner heißt der Theil AB von der Axe, die bis A verlängert iſt, wo ſie den entgegengeſetzten Kegel berührt, die **Zwerchaxe** oder die **erſte Axe** gegen eine 2te Axe, die wir ſogleich beſtimmen wollen. Man nennet das Centrum der Hyperbel den Mittelpunkt C der Zwerchaxe. Endlich werden wir einen jeden Theil AP oder AG der verlängerten Axe, welche zwiſchen dem Punkt P oder G, wo eine Ordinate die Axe berührt, ſich befindet, die **aufgefangene Axe** (axe intercepté) nennen.

§. 4.

Erſter Hauptſatz. In einer Hyperbel verhalten ſich die Quadrate der Ordinaten unter einander, wie die Rechtecke aus den Abſciſſen und der correſpondirenden aufgefangenen Axe, oder $\overline{GS}^2 : \overline{PM}^2 = BG \times AG : BP \times AP$.

Beweis. Wegen der ähnlichen Triangel AGR und APL iſt $AG : GR = AP : PL$. (M) und der ähnlichen Triangel BGT und BPV wegen iſt $BG : GT = PB : PV$ (N). Wenn man folglich die Verhältniſſe M und N nach der Ordnung ihrer Glieder durch einander multiplicirt, ſo iſt $BG \times AG : GT \times GR = BP \times AP : PV \times PL$, oder verwechſelt $GT \times GR : PV \times PL = BG \times AG : BP \times AP$ (Q). Nach der Natur des Cirkels iſt aber $GT \times GR = \overline{GS}^2$ und $PV \times$

PL

$PL = \overline{PM}^2$. Wenn man folglich dieſe Werthe in dem Verhältniß Q ſetzet, ſo iſt $\overline{GS}^2 : \overline{PM}^2 = BG \times AG : BP \times AP$. W. z. E. W.

§. 5.

Erſter Zuſatz. Aus dieſer Eigenſchaft der Hyperbel folgt, daß ſie eine krumme Linie ſey Dieſes muß, wie im §. 9 der Parabel geſchahe, auch für die Hyperbel bewieſen werden.

§. 6.

Zweyter Zuſatz. Wenn man die Fläche, wodurch die Hyperbel LBM entſtanden iſt, von der Seite A verlängert, (Fig. 69) ſo wird ſie in dem entgegen geſetzten Kegel einen andern Durchſchnitt *lAm* erzeugen, welcher nicht nur eine Hyperbel vermöge ihrer Definition ſeyn wird, ſondern ſie wird auch ganz genau der Hyperbel LBM gleich und ähnlich ſeyn. Dieſe zwo Hyperbeln heiſſen zuſammen genommen entgegen geſetzte Hyperbeln.

Beweis. Um die Gleichheit und Aehnlichkeit dieſer Hyperbeln zu beweiſen, dürfen wir nur zeigen, daß die Ordinaten, die in gleicher Weite von dem Scheitelpunkt dieſer krummen Linie in einer jeden gezogen werden, ſich vollkommen gleich ſind. Und da man die Richtigkeit hievon ſogleich erkennen wird, wenn der Schnitt T*t* mit der Axe OQ parallel iſt, ſo wollen wir den ſchwerſten Fall vor uns nehmen; nemlich, wenn bey einem ungleichſeitigen Triangel die Axe OQ gegen die entgegen geſetzten Baſes DH und *dh* ſchief ſtehen, und wenn der Durchſchnitt P*p*, der die entgegen geſetzte Hyperbel hervor bringt, nicht mit der Axe OQ parallel iſt. Ziehet man deswegen die Linie *sf* durch den Scheitelpunkt mit dem beſchreibenden Durchſchnitt P*p* parallel, und macht die Abſciſſe B*r* ſo groß, als die Abſciſſe A*p*, ſo hat man nur zu zeigen, daß die correſpondirenden Ordinaten *ri* und *pm* ſich gleich ſind.

 Weil

Weil Cf mit BP parallel iſt (Conſtr.), ſo iſt der ähnlichen Triangel BPH und CfH wegen BP : PH $=$ Cf : fH (M) und wegen der ähnlichen Triangel APD und CfD iſt AP : PD $=$ Cf : fD (N). Wenn man folglich die Glieder dieſer zwey Verhältniſſe M und N der Ordnung nach durch einander multiplicirt, ſo iſt BP × AB : PH × PD oder $\overline{PM}^2 = \overline{Cf}^2 : fH \times fD$ (L).

Bemerket izt, da die entgegengeſetzten Kegel CDH und Cdh gleiche homogene Seiten haben, nemlich, da CD $=$ Cd und CH $=$ Ch und der Winkel DCH $=$ dCh, daß auch die Baſis DH $=$ Dh. Hieraus erhellet, daß fH $=$ sh, Cf $=$ Cs und fD $=$ sd.

Da nun die Triangel ApD und CsD ſich ähnlich ſind, ſo verhält Ap : pD $=$ Cs : sd $=$ Cf : fD. Folglich iſt Ap : pd $=$ Cf : fD (N) Es verhalten ſich aber auch der ähnlichen Triangel Bph und Csh wegen Bp : ph $=$ Cs : sh $=$ Cf : fH; Folglich iſt Bp : ph $=$ Cf : fH (K). Wenn man folglich die Glieder dieſer 2 Verhältniſſe H und K der Ordnung der Glieder nach durch einander multipliciret, ſo verhält ſich $Ap \times Bp$: $pd \times ph$ oder $\overline{pm}^2 = \overline{Cf}^2 : fH \times fd$ (T). Wenn man folglich die beyden Verhältniſſe L und T mit einander vergleichet, ſo iſt $Ap \times Bp : \overline{pm}^2 = BP \times AP : \overline{PM}^2$: Nun verhält ſich aber (§. 4) $BP \times AP : \overline{PM}^2 = Br \times Ar : \overline{ri}^2$; Folglich iſt $Ap \times Bp : \overline{pm}^2 = Br \times Ar : \overline{ri}^2$ oder verwechſelt $Ap \times Bp : Br \times Ar = \overline{pm}^2 : \overline{ri}^2$. Es iſt aber $Ap = Br$ (Conſtr.); Folglich iſt auch $Bp = Ar$, und alſo auch $Ap \times Bp = Br \times Ar$. Folglich iſt $\overline{pm}^2 = \overline{ri}^2$ oder $pm = ri$. W. z. E. W.

§. 7.

Zweyter Hauptſatz. Nachdem man (Fig. 68) eine

eine 4te Proportionallinie tt zu den 3 Gröſſen BP × AP, $\overline{PM}^2$ und $\overline{AB}^2$ (*a*) gefunden hat, ſo ſuche man eine andere 4te Proportionallinie pp zu 3 beliebigen ähnlichen Gröſſen in der Hyperbel BG × AG, $\overline{GS}^2$, $\overline{AB}^2$: Nun behaupte ich, daß man jederzeit zur 4ten Proportionalgröſſe die nämliche Gröſſe finden werde, oder daß $tt = pp$.

Beweis. Nach dem erſten Hauptſatz verhält ſich BP × AP : BG × AG $= \overline{PM}^2 : \overline{GS}^2$ oder verwechſelt, BP × AP : $\overline{PM}^2$ = BG × AG : $\overline{GS}^2$. Vermöge der Bedingung verhält ſich aber BP × AP : $\overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : tt$. Folglich verhält ſich $\overline{AB}^2 : tt$ = BG × AG : $\overline{GS}^2$. Nun verhält ſich nach der Bedingung BG × AG : $\overline{GS}^2 = \overline{AB}^2 : pp$. Folglich iſt auch $\overline{AB}^2 : tt = \overline{AB}^2 : pp$ nnd alſo iſt $tt = pp$. W. z. E. W.

§. 8.

Zuſatz. Das Quadrat tt als eine 4te Proportionalgröſſe zu einem Rechteck aus einer jeden Abſciſſe BP einer Hyperbel und der aufgefangenen Axe AP, zu dem Quadrat der darzu gehörigen Ordinate PM und zu dem Quadrat ihrer Zwerchaxe AB iſt ſelbſt und alſo deſſen Wurzel t eine beſtändige Gröſſe.

* §. 9.

(*a*) Um das Quadrat tt als die 4te Proportionalgröſſe zu finden, muß man Rechteck BP × AP in ein Quadrat DD verwandeln, indem man eine mittlere Proportionallinie D zwiſchen BP und AP ſuchet. Wenn man darauf die 4te Proportionallinie t zu den 3 Gröſſen D, PM, AB ſuchet, ſo wird dieſe die Seite des geſuchten Quadrats ſeyn. Denn weil D : PM = AB : t, ſo verhält ſich auch DD, oder BP × AP : $\overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : tt$. W. z. Th. u. z. E. W.

§. 9.

Anmerkung. Um im Kegel die Gröſſe t zu finden (Fig. 69) darf man nur eine Fläche durch den Scheitelpunct C mit dem erzeugenden Durchſchnitt Pp parallel und gegen den Axentriangel CDH perpendiculair gehen laſſen, das heißt, man darf nur Cf mit Pp parallel und die Ordinate fe am Cirkel ziehen. Denn es wird die 4te Proportionalgröſſe p zu den 3 Gröſſen Cf, fe und AB der Werth von t ſeyn. Es iſt alſo zu beweiſen, wenn man dieſes Verhältniß hat $CF : fe = AB : p$, daß $p = t$ ſey.

Beweis. Vermöge der Bedingung verhält ſich $Cf : fe = AB : p$. Folglich iſt $\overline{Cf}^2 : \overline{fe}^2 = \overline{AB}^2 : pp$. Nun verhält ſich aber $\overline{Cf}^2 : fH \times fD$ oder $\overline{fe}^2 = BP \times AP : \overline{PM}^2$ (§. 6) Folglich iſt $\overline{AB}^2 : pp = BP \times AP : \overline{PM}^2$. Nach der Bedingung verhält ſich aber $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : tt$. Folglich auch $\overline{AB}^2 : pp = \overline{AP}^2 : tt$. Daraus erhellet, daß $pp = tt$.

§. 10.

Erklärung Weil folglich die Hyperbel vermöge ihrer Entſtehung ſich auf einer Fläche gezeichnet befindet, ſo laſſet uns die Gröſſe $t = GCD$ (Fig. 70) auf dieſe Fläche ſo ziehen, daß wenn ſie auf die Mitte C der Zwerchaxe AB Perpendiculair zu liegen kommt, ſie durch dieſe Axe in 2 gleiche Theile getheilet werde. Dieſe ſo beſtimmte Linie nennet man in Anſehung der Zwerchaxe, die zweyte Axe. Jene erhält alsdenn den Namen der erſten Axe. Auch werden ſie noch von den Geometern, gegen einander betrachtet, conjugirte Axen genennet. Und wenn dieſe 2te Axe von einer oder andern Seite unbeſtimmt verlängert wird, ſo heißt ſie die unbeſtimmte 2te Axe.

* §. 11.

Erſter Zuſatz. Weil die entgegengeſezte Hyperbeln gleich und ähnlich ſind (§. 6) und man macht die Abſciſſe, $Ax = BP$ und verbindet alsdenn die Endpunkte M und m, ſo wird dieſe Linie mit der erſten Axe AB parallel laufen und durch die, nach Umſtänden verlängerte 2te Axe GD in 2 Theile getheilet werden. Denn da die Abſciſſen BB und Ax ſich gleich ſind (Beding) ſo werden die Ordinaten PM und xm, die gegen die nämliche Linie Px perpendiculair ſind (Conſtr.) es gleichfalls ſeyn (§. 6). Folglich wird Mm mit Px oder mit der erſten Axe AB parallel ſeyn; Folglich $Mm = Px$. Nun wird aber Px durch die 2te Axe GD in 2 gleiche Theile getheilet; Folglich wird es Mm gleichfalls, wenn die 2te Axe nach Nothdurft verlängert wird.

§. 12.

Zweyter Zuſatz. Eine jede Linie Mm, die durch einen beliebigen Punkt M einer Hyperbel nach der entgegengeſezten Hyperbel gezogen wird, wird durch die nach Erforderniß verlängerte 2te Axe in 2 gleiche Theile getheilet.

Um ſich davon zu überzeugen laſſe man von den Punkten M und m die Ordinaten MP und mx fallen. Dieſe ſind ſich gleich, weil nach der Bedingung Px und Mm parallel ſind. Sind ſich aber die Ordinaten gleich, ſo ſind die Abſciſſen BP und Ax es auch; Folglich iſt $Cx = CP$. Es ſind aber die Figuren $mNCx$ und MPCN Parallelogramme (Conſtr.); Folglich iſt $mN = Cx = CP = NM$. Folglich iſt $mN = NM$.

Wenn aber Mr nicht mit der erſten Axe parallel wäre, ſo könnte ſie nicht wie Mm durch die 2te Axe in 2 gleiche Theile getheilet werden. Denn dieſe Linie würde auf der einen oder der andern Seite von Mm fallen. Nun kann ſie aber in beyden Fällen durch GD nicht in 2 gleiche Theile getheilet werden. Es wäre nämlich, wenn man Mm mit der Axe AB

parallel

parallel zöge $mN = NM$, (nach dem vorigen Beweiſe); Wäre alſo $Mt = tr$, ſo verhielte ſich $MN : Nm = Mt : tr$, und wenn man folglich mr zöge, ſo würde ſie mit Nt oder GD parallel ſeyn (Geometrie); Es iſt aber mx auch mit GD parallel (Conſtr.); Folglich würde mr mit mx parallel ſeyn, welches unmöglich iſt. Folglich u. ſ. w.

* §. 13.

Dritter Zuſatz. Deswegen iſt der umgekehrte Satz im 2ten Zuſatze wahr, oder eine jede Linie, die von einem Punkte einer Hyperbel nach der entgegengeſezten Hyperbel gezogen und durch die 2te Axe in 2 gleiche Theile getheilet wird, iſt nothwendig mit der Axe parallel, weil, wenn ſie nicht parallel wäre ſie auch durch die 2te Axe nicht in 2 Theile getheilet werden könnte (§. 12). Dieſes iſt aber wider die Bedingung.

§. 14.

Anmerkung. Da die Linien, die mit der erſten Axe parallel laufen, durch die zweyte Axe in 2 gleiche Theile getheilet werden, ſo werden auch die Linien, die mit der 2ten Axe parallel ſind, durch die erſte in 2 gleiche Theile getheilet. Deswegen nennen die Geometer dieſe Axen conjugirte Axen. Man erkennet auch, warum man die Linie AD von unbeſtimmter Länge, die auf der Mitte der erſten perpendiculair aufgerichtet iſt, die unbeſtimmte 2te Axe nennet. Weil ſie nämlich alle Linien, die gegen ſie perpendiculair ſind, und von dem entgegengeſezten Hyperbeln beſtimmt werden in 2 gleiche Theile theilet, deswegen ſind auch ſolche Linien wie MN und Nm Ordinaten der 2ten Axe.

§. 15.

Dritter Hauptſatz. Es verhält ſich das Rechteck aus einer jeden Abſciſſe BP und ihrer aufgefangenen Axe AP zu dem Quadrat der correſpondirenden Ordinate PM, wie das Quadrat der erſten Axe AB zum Quadrat der 2ten Axe GD, oder wie das Quadrat der Helfte BC der erſten Axe zum Quadrat

drat der Helfte CD der 2ten Axe. Folglich iſt dieſes Verhältniß als richrig zu beweiſen $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{GD}^2$ oder $\overline{BC}^2 : \overline{CD}^2$.

Beweis. Dieſes iſt vermöge des 2ten Hauptſatzes evident (§. 7), in welchem man gezeiget hat, daß, in welchem Punkte der Axe man auch die Ordinate nähme, man jederzeit zu den 3 Gröſſen $BP \times AP$, $\overline{PM}^2$ und $\overline{AB}^2$ einerley 4te Proportionalgröſſe finde. Nun iſt aber die 2te Axe GD die Quadratwurzel dieſer 4ten Proportionalgröſſe (§. 10) oder $GD = t$ oder $\overline{GD}^2 = tt$; Folglich verhält ſich $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{GD}^2$. Es verhält ſich aber auch $AB : GD = BC : CD$, oder $\overline{AB}^2 : \overline{GD}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{CD}^2$. Folglich auch $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{CD}^2$. W. z. E. W.

* §. 16.

Anmerkung. Wenn der Durchſchnitt eines Kegels mit ſeiner Axe parallel geſchieht, oder wenn Tt mit der Axe OQ parallel iſt (Fig. 69), ſo werden

1) Ohngeachtet $Ch > CD$ und $Ca > Cb$ iſt, dennoch die beyden entgegengeſezten Hyperbeln Nbx und nay eine jede die Baſis in gleicher Weite von dem Scheitelpunkt erreichen, oder es wird $at = bT$ ſeyn:

2) Die Entfernung des T von dem Centrum O iſt der Helfte der Axe der Hyperbel gleich.

3) Die Linie bK, die mit dem Diameter DH parallel gezogen iſt, iſt ſo groß, als die 2te Axe der Hyperbel, oder $bK = 2\,TO$.

Beweis. Laſſet uns CV mit DH parallel ziehen, ſo verhält ſich der beyden ähnlichen Triangel COH und aVC wegen $CO : OH = aV : VC$. und wegen der ähnlichen Triangel COD und CbV iſt $CO : OD$ oder $OH = Vb : VC$; Folglich $aV : VC = Vb : VC$. Folglich iſt $AV = Vb$; Allein

Allein wegen der Parallellinien CV und DH und OQ und Tt und da $CO = CQ$ iſt, ſo iſt auch $Vt = VT$ oder $aV + at = Vb + bT$. Weil nun $aV = Vb$, ſo iſt auch $at = bT$. W. d. E. W.

2) Der ähnlichen Triangel bTD und bVC wegen verhält ſich $bT : TD = Vb : VC$ und wegen der ähnlichen Triangel aTH und aVC iſt $aT : TH = aV$ oder $Vb : VC$; Wenn man folglich dieſe 2 Verhältniſſe der Ordnung der Glieder nach durch einander multiplicirt, ſo iſt $bT \times aT : TD \times TH$ oder $\overline{TN}^2 = \overline{Vb}^2 : \overline{VC}^2 = 4\overline{Vb}^2 : 4\overline{VC}^2 = \overline{ab}^2 : 4\overline{VC}^2$ (denn ab iſt $= 2Vb$, und alſo $\overline{ab}^2 = 4\overline{Vb}^2$); Folglich verhält ſich $bT \times aT : \overline{TN}^2 = \overline{ab}^2 : 4\overline{VC}^2$. Folglich da $4\overline{VC}^2$ das Quadrat der 2ten Axe iſt (§. 7. 10), ſo iſt 2VC die 2te Axe und VC iſt die Helfte der 2ten Axe. Nun iſt $VC = TO$. Folglich iſt TO die Helfte der 2ten Axe. W. d. 2te W.

3) $CO : OD = CG : bG$ und $CO : OH$ oder $OD = CG : GK$: Folglich iſt $CG : bG = CG : GK$; Folglich iſt $bG = GK = VC$. Folglich iſt $bG + GK = bK = 2VC = 2TO =$ der 2ten Axe. W. d. 3te W.

§. 17.

Erſter Zuſatz. Setzet man folglich (Fig. 70) $AB = 2a$; $CA = CB = a$; $GD = 2b$; $CG = CD = b$; $PM = y$; $CP = x$; $BP = CP - CB = x - a$; $AP = CP + CA = x + a$; Folglich $BP \times AP = (x - a)(x + a) = xx - aa$: So wird das Verhältniß im §. 15, $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{CD}^2$ analytiſch ausgedruckt folgendes werden $xx - aa : yy = aa : bb$. Hieraus folgt, daß $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$. Dieſes iſt die Gleichung für die Hyperbel, in Vergleichung gegen ihre Axen.

* §. 18.

1. Anmerkung. Diejenige Hyperbel heißt eine gleichſeitige, deren Axen ſich gleich ſind oder diejenige in welcher $a = b$. Folglich wird aus der allgemeinen Gleichung $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, als welche für alle Hyperbeln gilt, dieſe, die nur für die gleichſeitigen gilt: $xx - aa = yy$ Dieſe zeiget an, daß in der gleichſeitigen Hyperbel das Quadrat der Ordinate y einem Rechteck aus der aufgefangenen Axe $x + a$ und der Abſciſſe $x - a$ gleich ſey.

* §. 19.

Zwote Anmerkung. Wie kann man aber im Kegel die gleichſeitige Hyperbel finden? Man darf nur annehmen, daß der Kegel CDH (Fig. 69) bey C rechtwinklicht ſey, oder daß der Winkel DCH an der Spitze ein rechter Winkel ſey, ſo wird die Hyperbel Nbx eine gleichſeitige werden. Man ſetzt immer voraus, daß Tt mit der Axe OQ des Kegels parallel ſey.

Beweis. Da der Winkel DCH ein rechter Winkel iſt, ſo wird es der Winkel bCa auch ſeyn. Wenn man folglich aus der Mitte V der Zwerchaxe ab mit dem Radius Va oder Vb einen Cirkel beſchreibet, ſo wird die Peripherie nothwendig durch den Punkt C gehen; Folglich wird CV in dieſem Falle ein Radius dieſes Cirkels ſeyn. Folglich iſt Va = VC oder 2Va = 2VC = 2TO. Es iſt aber 2Va = der erſten Axe ab und 2TO = der 2ten Axe bK (§. 16. n° 3). Folglich ſind die beyden Axen ſich gleich. Wenn alſo der Kegel rechtwinklicht iſt und der Durchſchnitt mit der Axe des Kegels parallel geſchiehet, ſo entſtehet daraus eine gleichſeitige Hyperbel.

* §. 20.

Dritte Anmerkung. Wenn der Winkel DCH an

Spitze des Kegels ein ſtumpfer Winkel iſt und der Durchſchnitt Tt mit der Axe dieſes Körpers parallel iſt, ſo iſt die 2te Axe $2VC >$ als die erſte Axe $2aV$. Wenn aber der Winkel DCH ein ſpitziger iſt, ſo iſt die erſte Axe $2aV >$ als die 2te Axe $2VC$.

Beweis. 1) Wenn der Winkel DCH ein ſtumpfer Winkel iſt, ſo wird der Winkel bCa ein ſpitziger ſeyn; wenn man folglich aus dem Punkt V über die erſte Axe $ab = 2aV$ einen Cirkel beſchreibet, ſo wird die Peripherie dieſes Cirkels die Linie VC dieſſeits C von V angerechnet durchſchneiden. Folglich iſt $VC > aV$ oder $2VC > 2aV$ oder die 2te Axe iſt $>$ als die erſte.

2) Wenn der Winkel DCH ein ſpitziger iſt, ſo wird der Winkel bCa ein ſtumpfer ſeyn. Folglich wird die Peripherie eines dem vorigen ähnlichen Cirkels jenſeits C durchgehen, und folglich wird $aV > VC$ oder $2aV > 2VC$ ſeyn. Dieſes zeiget an, daß in dem lezten Fall die erſte Axe gröſſer als die 2te iſt.

Man kann alſo bey dieſer Art von Kegelſchnitten allemal aus der Beſchaffenheit des Winkels an der Spitze des Kegels ſchlieſſen, ob die Axen ſich gleich ſind oder nicht, und wenn ſie ungleich ſind, welche von beyden die gröſte ſey.

§. 21.

Zweyter Zuſatz. Weil (§. 17) $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ (Fig. 70), ſo iſt $xx = \frac{aayy}{bb} + aa = \frac{aayy + aabb}{bb}$. Dieſes iſt der Ausdruck für das Quadrat von xx der undeterminirten Linie CP der erſten Axe oder der Ordinate MN der zweyten Axe.

Anmerkung. Ich erinnere es ein für allemal, daß man

man auf dieſen Ausdruck für das Quadrat der undeterminirten Linie CP der erſten Axe, wie auch auf folgenden Ausdruck aufmerkſam ſeyn müſſe, weil wir durch ſie in der Folge ſehr bequem die andern Eigenſchaften der Hyperbel entdecken können.

§. 22.

Dritter Zuſatz. Iſt alſo $xx = \frac{aayy + aabb}{bb}$, ſo iſt $xx \times bb = (yy + bb) \times aa$. Hieraus fließt folgendes Verhältniß $xx : yy + bb = aa : bb$ oder $= 4aa : 4bb$, das heißt, wenn man auf der 2ten Axe die Ordinate MN = CP $= x$ ziehet, und erwägt, daß die Abſciſſe CN der 2ten Axe $=$ PM $= y$, ſo wird man finden, daß das Quadrat xx $(\overline{MN}^2)$ einer jeden Ordinate MN von der 2ten Axe ſich zur Summe der Quadrate $yy + bb$ $(\overline{CN}^2 + \overline{CD}^2)$ ihrer correſpondirenden Abſciſſe CN und der Helfte CD der 2ten Axe verhalte, wie das Quadrat aa von der Helfte der erſten Axe zum Quadrat bb von der Helfte der 2ten oder wie das Quadrat $4aa$ von der erſten Axe zum Quadrat $4bb$ der 2ten (a).

Aa 2 §. 23.

(a) Die Punkte der Hyperbel gegen die kleine Axe gehalten, geben nicht, wie bey der Ellypſe einerley Gleichung mit derjenigen, wenn ſie gegen die erſte Axe gehalten werden. Das heißt eigentlich GD iſt keine Axe der entgegengeſezten Hyperbeln MBK und mAL. (Fig. 70). Wenn GD alle Linien Mm, die mit AB parallel gezogen ſind, in 2 gleiche Theile theilet, ſo geſchiehet dieſes nur deswegen, weil man zu gleicher Zeit 2 entgegengeſezte Hyperbeln betrachtet. Dieſes iſt aber etwas blos zufälliges. Denn es kann die Eigenſchaft einer Hyperbel abſolut ohne die entgegengeſezte entdecket werden. Auch kann dieſe krumme Linie in dem Kegel erzeugt werden und ihre charakteriſtiſche Eigenſchaft entdecket ſich daſelbſt unabhänglich von ihrer Gefährtinn, wie man es im §. 4 geſehen hat, da man den entgegengeſezten Kegel nicht in Erwägung zog.

§. 23.

Vierter Zuſatz. Es ſey wieder $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, ſo iſt, wenn wir alles mit bb multipliciren, $bbxx - aabb = aayy$; Folglich mit aa dividirt, ſo iſt $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$. Dieſes iſt ein Ausdruck für das Quadrat der Ordinate an der erſten Axe oder für das Quadrat der Abſciſſe der 2ten Axe.

§. 24.

Fünfter Zuſatz. Es ſey beſtändig $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; bringt man nun aa auf die andere Seite und $\frac{aayy}{bb}$ auf die erſte Seite, ſo iſt $xx - \frac{aayy}{bb} = aa$. Dieſes iſt der Ausdruck für das Quadrat aa von der Helfte der erſten Axe.

§. 25.

Sechſter Zuſatz. Wenn man ſich beſtändig an die Gleichung hält $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, ſo iſt wenn man mit bb multiplicirt $bbxx - aabb = aayy$. Folglich iſt $bbxx - aayy = aabb$, und durch die Diviſion mit aa iſt $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy$. Dieſer Ausdruck gehört für die Helfte der 2ten Axe.

§. 26.

Siebender Zuſatz. Daraus, daß $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ iſt, folgt, daß wenn x oder CP oder, wenn man will, die Abſciſſe ſich vergröſſern (a), y oder die Ordinate ſich auch ver-

---

a) Denn die CP können nicht ohne die Vergröſſerung der Abſciſſen BP wachſen.

vergröſſern, denn wenn x gröſſer wird, ſo wird auch xx gröſſer; Folglich wird auch $xx - aa$ gröſſer ſeyn, als vorher. Folglich iſt auch $\frac{aayy}{bb}$ gröſſer. Es wird aber dieſe Gröſſe nicht durch aa oder bb, als welche beſtändige Gröſſen ſind, gröſſer; Folglich geſchiehet es durch yy. Wenn nun yy gröſſer wird, ſo wird auch y ſelbſt gröſſer. Folglich wachſen die Ordinaten mit den Abſciſſen. Dieſes zeiget uns, daß ſich die Hyperbel immer weiter von ihrer Axe entferne und daß ſie dieſelbe nur einmal durchſchneide.

§. 27.

Achter Zuſatz. Hieraus ziehet man folgende Schlüſſe

1) Daß, wie im §. 11 — 13 der Parabel, eine Linie QG (Fig. 70) die mit der Axe AB einer Hyperbel parallel lauft, die krumme Linie nothwendig nur in einem einzigen Punkt B berühre.

2) Daß eine jede nach Erforderniß verlängerte Sehne QM nothwendig die erſte Axe AB würklich durchſchneiden oder wenigſtens eine Neigung darzu haben werde.

3) Daß eine Tangente an jedem Punkt dieſer krummen Linie, den Scheitelpunkt ausgenommen, auch die Neigung habe, die erſte Axe zu durchſchneiden, und daß folglich eine Tangente, eine Ordinate die an dem Berührungspunkt gezogen iſt, und der Theil der Axe, der zwiſchen dem Punkt, wo die Tangente und die Ordinate die Axe berühren, liegt, jederzeit einen rechtwinklichten Triangel machen werden, woraus man nach Gefallen den Ausdruck für die Subtangente der Hyperbel und folglich die Tangente derſelben finden kann, wenn man ſich der allgemeinen Methode, die Tangenten der krummen Linien zu ziehen, bedienet, die ich im §. 18. 19 der Parabel gegeben habe. Ich werde dieſes in der Folge zeigen.

* §. 28.

Neunter Zuſatz. Man kann durch Hülfe der Gleichung

chung $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ ſehr leicht die 2te Axe einer gegebenen Hyperbel determiniren, wenn man davon die erſte Axe kennet. Man darf nur dieſes wiſſen, daß ſie ſo groß ſeyn muß, als die undeterminirte Linie der erſten Axe die mit einer gleichen Ordinate der 2ten Axe übereintrift, deswegen iſt, wenn man von dem Endpunkt G der 2ten Axe die Perpendiculairlinien GR fallen läßt, die die Hyperbel nothwendig in einem Punkt Q (§. 27) durchſchneiden muß, und auf der erſten Axe die Ordinate QS ziehet; es iſt deswegen dieſe Ordinate CG $= b$ als der Helſte der zwoten Axe, und $\overline{QS}^2 = yy = bb$. Wenn man folglich in der Gleichung $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ die Gröſſe bb in die Stelle von yy ſetzet, ſo iſt $xx - aa = \frac{aabb}{bb} = aa$ oder $xx = 2aa$. Hieraus ſiehet man, wenn die Ordinate der 2ten Axe gleich iſt, daß die Abſciſſe x, die zu dieſer Ordinate gehört, die Hypothenuſe eines gleichſchenklichten rechtwinklichten Triangels iſt, wovon eine jede Seite der Helſte der erſten Axe gleich iſt.

Wenn man dieſes wohl verſtanden hat, ſo muß man, wenn die erſte Axe und die krumme Linie ſelbſt gegeben ſind, um die 2te determinirte Axe zu bekommen, auf die Mitte C der erſten Axe eine Perpendiculairlinie von unbeſtimmter Länge GV aufrichten. Auf dieſer muß man einen Theil CT $=$ CB als der Helſte der erſten Axe abſchneiden; darauf muß man die Hypothenuſe dieſes rechtwinklichten Triangels BT nehmen und ſie von C nach S auf die erſte Axe tragen; von da die Ordinate SQ ziehen, ſo wird dieſe Ordinate der Helſte der 2ten Axe gleich ſeyn.

Beweis. Weil $\overline{BT}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CT}^2 = aa + aa = 2aa$ und weil CS $=$ BT (Conſtr.), ſo iſt $\overline{CS}^2$ oder $xx = 2aa$. Itzt ſey die Helſte der 2ten Axe der Hyperbel z, welche ſie

ſie will, ſo verhält ſich (§. 17) $xx - aa : yy$ oder $\overline{SQ}^2 = aa : zz$, als dem Quadrat der halben 2ten Axe. Wenn man folglich in dieſem Verhältniß $2aa$ in die Stelle von xx ſetzet, ſo iſt $2aa - aa$ oder $aa : \overline{SQ}^2 = aa : zz$. Folglich iſt $\overline{SQ}^2 = zz$ oder $SQ = z$. Das heißt, durch die Conſtruction iſt die gegebene Ordinate SQ die Helfte der 2ten Axe. W. z. E. W.

§. 29.

Zehnter Zuſatz. Laſſet uns die Hypothenuſe BD aus dem Centrum C nach den Punkten F, f der unbeſtimmten erſten Axe der entgegengeſezten Hyperbeln tragen, und aus einem beliebigen Punkt M dieſer Hyperbel laſſet uns die Linie Mf und MF nach den Punkte F und f ziehen. Endlich laſſet uns die Ordinate MP an die Axe ziehen, ſo wird Mf beſtändig ſo groß ſeyn, als die Summ aus der 4ten Proportionalgröſſe zu 3 gegebenen Gröſſen CB, Cf und CP, und der halben Axe CB und MF wird jederzeit ſo groß ſeyn, als die Differenz zwiſchen der nemlichen 4ten Proportionalgröſſe und der halben Axe CB, oder $Mf = \frac{Cf \times CP}{CB} + CB$ und $MF = \frac{Cf \times CP}{CB} - CB$.

Beweis. Wir wollen die vorige Benennung beybehalten, und auſſerdem mag $BD = Cf = CF = c$ ſeyn; So iſt $cc = aa + bb$. $FP = CP - CF = x - c$. Folglich iſt $\overline{FP}^2 = xx - 2cx + cc$ und $fP = CP + Cf = x + c$. Folglich iſt $\overline{fP}^2 = xx + 2cx + cc$. Unter dieſer Vorausſezung hat man zu beweiſen, daß $Mf = \frac{cx}{a} + a = \frac{cx + aa}{a}$ und daß $MF = \frac{cx}{a} - a = \frac{cx - aa}{aa}$ ſey.

 1)

1) Wegen des rechtwinklichten Triangels fPM iſt $\overline{fP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{Mf}^2 = xx + 2cx + cc + yy$ (D). Setzt man alſo in der Gleichung D, $aa + bb$ für cc und an der Stelle von yy den Ausdruck $\frac{bbxx - aabb}{aa}$ (§. 23), ſo iſt $\overline{Mf}^2 = xx + 2cx + aa + bb + \frac{bbxx - aabb}{aa}$; Folglich, wenn man alles unter einerley Benennung bringt, ſo iſt $\overline{Mf}^2 = \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + a^2b^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{aa}$ $= \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + b^2x^2}{aa}$ (M). Nun iſt aber $a^2x^2 + b^2x^2 = (a^2 + b^2)\,x^2 = c^2x^2$. Setzet man folglich in der Gleichung M die Größe c^2x^2 an der Stelle von $a^2x^2 + b^2x^2$, ſo iſt $\overline{Mf}^2 = \frac{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4}{aa}$, u. nach ausgezogener Quadratwurzel iſt $Mf = \frac{cx + aa}{a} = \frac{cx}{a} + a$. W. z. E. W.

2) Vermöge des rechtwinklichten Triangels FPM iſt $\overline{MF}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{PM}^2 = cc - 2cx + xx + yy$, und wenn man eben ſo, wie vorhin, ſubſtituirt, ſo iſt $\overline{MF}^2 = \frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{aa}$ und folglich nach ausgezogener Quadratwurzel iſt $MF = \frac{cx - aa}{a} = \frac{cx}{a} - a$. Welche d. 2te zu E. W.

§. 30.

Zweyter Zuſatz. Weil $Mf = \frac{cx + aa}{a}$ und $MF = \frac{cx - aa}{a}$, ſo iſt $Mf + MF = \frac{2cx}{a}$. Folglich iſt $(Mf + MF)\,a$ =

$= 2cxx$. Folglich verhält ſich $(Mf + MF) : x = 2c : a$ das heißt, die Summe der Linien, die von jedem Punkt M der Hyperbel an die Punkte F und f gezogen ſind, hat immer ein beſtändiges Verhältniß gegen die undeterminirte Linie CP, die zu dem Punkt M gehört. Denn dieſe Summe verhält ſich jederzeit zu $CP = x$ wie $2c : a$. Dieſe leztere ſind aber beſtändige Gröſſen.

§. 31.

Zwölfter Zuſatz. Wenn man hingegen ſtatt der Summe der Werthe dieſer Linien Mf und MF, die man §. 29 gefunden hat, ihre Differenz nimmt, ſo iſt $Mf - MF = \frac{2aa}{a} = 2a = AB$, das heißt der Unterſchied dieſer Gröſſen iſt jederzeit der erſten Axe gleich. Dieſes iſt wohl zu bemerken.

§. 32.

Dreyzehnter Zuſatz. $AF \times BF = \overline{CD}^2$ als dem Quadrat der halben 2ten Axe. Denn AF iſt $= CF + CA = c + a$. und $BF = CF - CB = c - a$; Folglich iſt $AF \times BF = (c + a)(c - a) = cc - aa$ (S). Nun hat man aber des rechtwinklichten Triangels BCD wegen und weil $BD = CF = c$ iſt, dieſe Gleichung $cc = aa + bb$. Wenn man demnach den Werth von cc in die Gleichung S ſetzet, ſo iſt $AF \times BF = aa + bb - aa = bb = \overline{CD}^2$. Folglich iſt $AF \times BF = \overline{CD}^2$.

§. 33.

Erklärung. Wenn man zur erſten und 2ten Axe eine dritte Proportionallinie ſucht, ſo erhält man eine Linie, die man den Parameter der erſten Axe nennet. Sie heißt aber der Parameter der 2ten Axe, wenn die 2te Axe das

erſte Glied dieſer Proportion iſt. Setzet man daher das Verhältniß $2a$ (AB) : $2b$ (GD) = $2b$ (GD) : $p = \frac{4bb}{2a}$ oder $\frac{2bb}{a}$, ſo wird dieſe Gröſſe p oder $\frac{2bb}{a}$ in der Folge den Parameter der erſten Axe anzeigen. Hieraus erkennet man, daß die eine der Axen immer eine mittlere Proportionallinie zwiſchen der andern Axe und deren Parameter ſey.

§. 34.

Vierzehnter Zuſatz. Die Ordinate FK an einem der Punkte F oder f, iſt die Helfte des Parameters der erſten Axe das heißt, $FK = \frac{p}{2} = \frac{bb}{a}$.

Beweis. Wir wiſſen (§. 15), daß $\overline{FK}^2 : AF \times BF = \overline{CD}^2 : \overline{CB}^2 = bb : aa$. Allein $AF \times BF = \overline{CD}^2 = bb$. (§. 32); Folglich verhält ſich $\overline{FK}^2 : bb = bb : aa$ oder $FK : b = b : a$; Folglich iſt $FK = \frac{bb}{a} = \frac{p}{2}$. W. z. E. W.

* §. 35.

Funfzehnter Zuſatz. Die Entfernung BF einer der Punkte F oder f von dem nächſten Scheitelpunkt B iſt kleiner, als der 4te Theil des Parameters p, das heißt, $BF < \frac{p}{4}$.

Beweis. $BF = CF - CB = c - a$, und weil $p = \frac{2bb}{a}$ (§. 33), ſo iſt $\frac{p}{4} = \frac{bb}{2a}$. Es iſt aber auch $cc = bb + aa$. Folglich $bb = cc - aa$; Folglich verhält ſich $BF : \frac{p}{4} = c - a : \frac{bb}{2a} = c - a : \frac{cc - aa}{2a}$ (weil $bb = cc - aa$) $= (c - a)\, 2a : cc - aa$, und wenn man die 2 lezten Glieder durch $c - a$ dividirt $= 2a : c + a = AB : AF$: Folg-
lich

ſich verhält ſich BF : $\frac{p}{4}$ = AB : AF. Allein AB < AF. Folglich iſt auch BF < $\frac{p}{4}$. W. z. E. W.

§. 36.

Anmerkung. Wir werden §. 95 beweiſen, daß die Punkte F und f, die ſo wie §. 29 beſtimmt ſind, die wahren Brennpunkte ſind, und daß folglich 1) die doppelte Ordinate au dem Brennpunkt F einer Hyperbel ſo groß ſey, als der Parameter ihrer kleinen Axe (§. 34).

2) Daß die Entfernung des Brennpunkts F in einer Hyperbel vom Scheitelpunkt kleiner ſey, als der 4te Theil des Parameters ihrer erſten Axe. (§. 35).

§. 37.

Funfzehnter Zuſatz. Es verhält ſich $2a : 2b = 2b : p$. (§ 33); Folglich iſt $4aa : 4bb = 2a : p$. (*) $= \frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$. Wenn man folglich in der Gleichung $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ der Hyperbel (17) den Ausdruck $\frac{2a}{p}$ an der Stelle von $\frac{aa}{bb}$ ſetzet, ſo iſt $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$. Dieſes iſt eine andere Gleichung der Hyperbel in Abſicht auf ihren Parameter.

* §. 38.

Sechzehnter Zuſatz. Das Quadrat $\overline{PM}^2$ einer jeden Ordinate PM an der erſten verlängertrn Axe der Hyperbel iſt gröſſer als das Rechteck aus der Abſciſſe BP und dem Parameter p der nämlichen Axe.

Beweis.

(*) Man ſehe meine Anmerkung zum §. 168 der Parabel. B.

Beweis. Man weiß, daß $p = \frac{2bb}{a}$ (§. 33) $BB = CP - CB = x - a$; Folglich iſt $BP \times p = (x - a)\left(\frac{2bb}{a}\right)$, $PM = y$. Folglich $\overline{PM}^2 = yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$ (§. 23) $= \frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{a}$. Man muß alſo beweiſen, daß $\overline{PM}^2 > BP \times p$ oder daß $\left(\frac{xx - aa}{a}\right) \times \left(\frac{bb}{a}\right) > (x - a)\left(\frac{2bb}{a}\right)$. Nun verhält ſich aber $\left(\frac{xx - aa}{a}\right) \times \left(\frac{bb}{a}\right) : (x - a)\left(\frac{2bb}{a}\right)$, wenn man mit $\frac{bb}{a}$ dividirt, $= \frac{xx - aa}{a} : (x - a)\,2$, und wenn man durch $x - a$ dividirt, $= \frac{x + a}{a} : 2$, und wenn man mit a multiplicirt $= x + a : 2a = AP : AB$ Folglich verhält ſich $\left(\frac{xx - aa}{a}\right) \times \frac{bb}{a} : (x - a) \times \frac{2bb}{a}$ oder $\overline{PM}^2 : BP \times p = AP : AB$. Es iſt aber $AP > AB$. Folglich iſt $\overline{PM}^2 > BB \times p$. W. z. E. W.

§. 39.

Anmerkung. Dieſer Ueberſchuß, um welchen das Quadrat der Ordinate gröſſer iſt, als das Rechteck aus der Abſciſſe und dem Parameter, dieſer Ueberſchuß hat dieſer Art von Kegelſchnitten den Namen Hyperbel gegeben. Die Benennung kommt von dem griechiſchen Worte υπερβολη, welches ſo viel, als ein Ueberſchuß, heißt.

*§. 40.

Siebenzehnter Zuſatz. Laſſet uns itzt den Parameter der 2ten Axe aufſuchen, indem wir folgendes Verhältniß an=

anſetzen $2b : 2a = 2a :$ zu einem 4ten Gliede $= \frac{2aa}{b}$. Dieſes nenne ich m. Nun behaupte ich, daß das Quadrat einer jeden Ordinate MN an der 2ten Axe, die nach Erforderniß verlängert wird, gröſſer ſey, als das Rechteck aus ihrer correſpondirenden Abſciſſe CN und dem Parameter m der 2ten Axe. Nur muß CN gröſſer oder kleiner als die Helfte der kleinen Axe ſeyn.

Beweis. Es ſey $MN = CP = x$; $CN = MP = y$. Nun haben wir ſo eben geſehen, daß $m = \frac{2aa}{b}$ und (§. 21) $xx = \frac{aayy + aabb}{bb} = (bb + yy) \times \frac{aa}{bb} = \overline{MN}^2$. Es iſt alſo zu beweiſen, daß $\overline{MN}^2 > m \times CN$ oder daß $bb + yy \times \frac{aa}{bb} > \frac{2aay}{b}$ ſey.

Nun verhält ſich aber $(bb + yy) \times \left(\frac{aa}{bb}\right) : \frac{2aay}{b} =$ (wenn man mit $\frac{aa}{b}$ dividirt) $\frac{bb + yy}{b} : 2yy$, (und wenn man mit b multiplicirt) $= bb + yy : 2by$. Nun iſt aber $bb + yy > 2by$ (a). Folglich iſt $(bb + yy) \times \left(\frac{aa}{bb}\right) > \frac{2aay}{b}$. Das heißt $\overline{MN}^2 > m \times CN$. W. z. E. W.

*§. 41.

Anmerkung Damit der vorige Zuſatz ohne Ausnahme

(a) Das heißt, die Summe der Quadrate bb und yy zwoer ungleichen Gröſſen b und y iſt jederzeit gröſſer, als das doppelte Product by dieſer Gröſſen. Es ſey $y > b$ und d die Differenz zwiſchen ihnen, ſo iſt $y - b = d$. Folglich $yy - 2by + bb = dd$. Folglich $yy + bb = 2by + dd$, und alſo $yy + bb > 2by$.

me wahr ſey, ſo habe ich dieſe Einſchränkung noch hinzugeſezt, daß die Abſciſſe CN $= y$ gröſſer oder kleiner als die halbe kleine Axe b ſeyn müſſe. Denn wenn y und b ſich $=$ wären, ſo wäre $bb + y = 2bb$ und $2by = 2bb$. Folglich wäre $bb + yy = 2by$ und folglich $\overline{MN}^2 = m \times CN$; Hieraus ſiehet man, daß der vorige Zuſatz dieſer Ausnahme unterworfen iſt.

*§. 42.

Vierter Hauptſatz. Wenn man durch den Scheitelpunkt B der Hyperbel (Fig. 71) die Linie HBT ſo ziehet, daß ſie mit der kleinen Axe GD parallel und ihr gleich ſey, daß alſo BH $=$ BT $=$ CG $=$ CD $= b$. und wenn man aus dem Centrum C, durch die Endpunkte H und T die unbeſtimmte grade Linien CN und CR ziehet, wenn man darauf durch einen beliebigen Punkt der verlängerten Axe die grade Linie LK mit HT oder mit der 2ten Axe GD parallel ziehet, ſo iſt,

1) $LM \times MK = \overline{BH}^2 = bb$.

2) Wenn man die Linien CN und CR willkührlich von der andern Seite C verlängert und von dem Punkt M oder F, wo LK mit der Hyperbel zuſammen ſtößt die Linie Ml mit der erſten Axe parallel ziehet, ſo iſt, ſage $Mk \times Ml = \overline{CB}^2 = aa$.

Beweis des erſten Theils. Wenn wir für die nämlichen Linien die vorigen Benennungen behalten, ſo iſt wegen der ähnlichen Triangel CBH und CPL a (CB) : b (BH) $= x$ (CP) : $\frac{bx}{a} =$ PL $=$ PK; Folglich iſt LM $=$ PL $-$ PM $= \frac{bx}{a} - y$, und MK $=$ PK $+$ PM $= \frac{bx}{a} + y$; Folglich

lich iſt $LM \times MK = \left(\frac{bx}{a} - y\right) \times \left(\frac{bx}{a} + y\right) = \frac{b^2x^2}{aa} - yy$ $= bb$ (§. 25); Folglich iſt $LM \times MK = bb$ oder $\overline{BH}^2$ oder $\overline{GC}^2$. W d. 1ſte W.

Beweis des zweyten Theils. Der ähnlichen Triangel CPK und kMK wegen verhält ſich $\frac{bx}{a}$ (PK) : x (CP) $= \frac{bx}{a} + y$ (MK) : $x + \frac{ay}{b}$ (Mk). Dieſes findet man, wenn man das Product aus den 2 mittelſten Gliedern x und $\frac{bx}{a} + y$ durch das erſte Glied $\frac{bx}{a}$ dividirt.

Eben ſo fließt aus den ähnlichen Triangeln lML und LPC folgendes Verhältniß $\frac{bx}{a}$ (PL) : x (CP) $= \frac{bx}{a} - y$ (LM) : $x - \frac{ay}{b} = Ml$. Dieſes findet man, wenn man die beyden mittelſten Glieder x und $\frac{bx}{a} - y$ durch einander multiplicirt und das heraus kommende Product durch das 1ſte Glied $\frac{bx}{a}$ dividirt. Folglich iſt $Mk \times Ml = \left(x + \frac{ay}{b}\right)$ $\left(x - \frac{ay}{b}\right) = xx - \frac{aayy}{bb} = aa$ (§. 24). Folglich iſt $Mk \times Ml = aa$ oder $\overline{CB}^2$. W. d. 2te W.

§. 43.

Wenn hingegen eine Linie LMK, die durch die Seite eines gleichſchenklichten Triangels LCK, beſtimmt wird, in dem Punkt M ſo in 2 gleiche Theile getheilet wird, daß das Product $LM \times MK$ aus ſeinen 2 Theilen dem Quadrat $\overline{BH}^2$ von

von der Helfte einer andern Linie HT, die durch die Seite des nämlichen Triangels beſtimmt wird und mit LMK parallel lauft, gleich iſt, ſo behaupte ich, daß der Punkt M in einer Hyperbel ſey, oder daß die krumme Linie, welche auf dieſe Art alle unbeſtimmte Linien LMK theilet, eine Hyperbel ſey.

Beweis. Laſſet uns von der Spitze des Winkels C durch die Mitte HT der Parallellinie von LK die unbeſtimmte Linie CQ ziehen, ſo wird dieſe auch LK in der Mitte theilen. Man mache CA = CB und die Perpendiculairlinie CG = CD = HB = BT und behalte die vorige Benennungen, ſo verhält ſich, a (CB) : b (BH) = x (CP) : $\frac{bx}{a}$ = PL oder PK; Folglich iſt LM = PL — PM = $\frac{bx}{a}$ — y, und MK = PK + PM = $\frac{bx}{a} + y$. Folglich iſt LM × MK = $\frac{b^2x^2}{aa} - yy$. Nun iſt aber vermöge der Bedingung LM × MK = $\overline{BH}^2 = bb$. Folglich iſt $bb = \frac{b^2x^2}{aa} - yy$; Folglich, wenn man durch aa multiplicirt, ſo iſt $a^2b^2 = b^2x^2 - aayy$. Wenn man folglich die Glieder verwechſelt, ſo iſt $aayy = bbxx - aabb = (xx - aa)\,bb$; Folglich verhält ſich yy $(\overline{PM}^2)$: $xx - aa$ oder $(x - a)(x + a)$ (BP × AP) = bb $(\overline{BH}^2)$: aa $(\overline{CB}^2)$. Dieſes iſt die characteriſtiſche Eigenſchaft der Hyperbel, die wir §. 15. gefunden haben. Folglich iſt der Punkt M in einer Hyperbel.

§. 44.

Erſter Zuſatz. Da der Punkt P nach Belieben in der verlängerten erſten Axe angenommen worden, ſo folgt, daß alle Rechtecke wie LM × MK ſich einander gleich ſind, weil ſie immer einerley Quadrat $\overline{BH}^2$ oder bb gleich ſind, das heißt, wenn

wenn man durch einen andern Punkt Q der verlängerten erſten Axe mit LK eine Parallellinie IV ziehet, ſo iſt VE×EI = LM×MK oder MK : EI = VE : LM.

§. 45.

Zweyter Zuſatz. Man ſiehet folglich, daß VE kleiner als LM ſey; weil, wenn man MS mit der erſten Axe BQ parallel ziehet, es evident iſt, daß MK < aJ Nun iſt aber aJ < EJ; Folglich iſt auch MK < EJ. Es verhält ſich aber (§. 44) MK : EI = VE ; LM. Da folglich MK < EJ ſo muß auch VE < LM ſeyn.

§. 46.

Dritter Zuſatz. Wenn man folglich von den Punkten E und M die Perpendiculairlinien Et und Mr auf die Seite CN fallen läßt, ſo wird die Perpendiculairlinie Et kleiner seyn als Mr. Denn wegen der ähnlichen Triangel VEt und LMr verhält ſich VE : LM = Et : Mr. Nun iſt aber VE < LM (§. 45); Folglich iſt auch Et < Mr.

§. 47.

Vierter Zuſatz. Wie ſich alſo der Arm der Hyperbel BME von dem Scheitelpunkt B entfernet, ſo nähert er ſich beſtändig der Seite CN. Inzwiſchen werden doch dieſe Seite der Hyperbel und die Linie CN ins unendliche verlängert, ſich niemals berühren. Denn, wenn ſich dieſe Linien berührten, ſo würde PM = PL oder $\overline{PM}^2 = \overline{PL}^2$ ſeyn. Das heißt es wäre $yy = \frac{bbxx}{aa}$; weil PL = $\frac{bx}{a}$ (Demonſtr. §. 42). Dieſes kann aber nicht ſeyn, weil (§. 23) $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$. Dieſe Gröſſe iſt aber kleiner als $\frac{bbxx}{aa}$.

Deswegen haben die Alten dieſe unbeſtimmte Linien CN und CR Aſymptoten genennt. Ein Wort, welches aus 3 griechiſchen zuſammen geſetzet iſt. Nämlich aus dem verneinenden α, aus $\sigma\upsilon\nu$, mit oder zuſammen und $\pi\tau o\omega$, ich falle. Es ſind alſo Aſymptoten der Hyperbel grade Linien, die ſich dieſer krummen Linie beſtändig nähern ohne ſie jemals berühren zu können (*a*). Folglich iſt dieſe krumme Linie gänzlich in dem Winkel NCR, den die Aſymptoten machen, eingeſchloſſen.

* §. 48.

Anmerkung. Da die Linien CN und CR (Fig. 71), die von dem Centrum der Hyperbel MBF durch die Endpunkte der Perpendiculairlinie HBT, die ſo groß iſt, als die 2te Axe GCD und wo BH=BT iſt, gezogen werden, Aſymptoten ſind, (§. 47), ſo muß man um die ſo Linien im Kegel zu finden, ſich eines rechtwinklichten Kegels DCH bedienen (Fig. 72) oder welches einerley iſt, eines ſolchen Kegels, deſſen Axe OC perpendiculair auf die Baſis DH ſtehet, und man muß den Durchſchnitt AT dieſes Kegels mit der Axe OC perpendiculair machen. So wird dadurch die Hyperbel NB*x* entſtehen. Wenn man darauf von dem Scheitelpunkt B dieſer Hyperbel eine Linie BK in die Fläche des Axentriangels ziehet, die mit der Baſis DH parallel iſt, und wenn man aus dem Punkt G, wo dieſe Linie die Axe OC ſchneidet, auf die Axe OC in der Fläche des Axentriangels eine Hyperbel *n*G*y* beſchreibt, die der Hyperbel N*bx* gleich und ähnlich iſt (*b*), ſo, daß der Punkt G der Scheitelpunkt der neuen krummen Linie

(*a*) Die Griechen gaben immer gewiſſen Hauptlinien ſolche Namen, wodurch ſogleich die Eigenſchaft derſelben ausgedrückt ward. So konnte z. E. nun der gemeine Mann und der Gelehrte verſtehen, was man mit Aſymptoten haben wolle?

(*b*) Die Hyperbel *n*G*y* iſt der Hyperbel NB*x* gleich und ähnlich, wenn man die Ordinaten an GO in einer beſtimmten Entfernung

Linieſſey, ſo wird man finden, daß die Seiten *CD* und *CH* des vorgegebenen Kegels die Aſymptoten der Hyperbel *nGy* oder NB*x* ſind, wenn man dieſe leztere ſo auf die Fläche des Axentriangels trüge, daß der Scheitelpunkt B auf G fiele.

Beweis. 1) BK iſt die 2te Axe beyder Hyperbel (§. 16. N° 3). 2) Vermöge der Conſtruction iſt BK gegen die Axe O*C* am Scheitelpunkt G der Hyperbel *nGy* perpendiculair. Auch iſt die Linie offenbar in 2 gleiche Theile getheilet. Es iſt überdies der Punkt *C* das Centrum der Hyperbel *nGy*. Dieſes ſiehet man wenn man *C*V gegen die erſte Axe AB der Hyperbel NB*x* perpendiculair ziehet. Folglich ſind die Seiten CD und und CH der 72ten Figur im Betracht gegen die Hyperbel *nGy* genau einerley mit den Linien CN und CR der 71ten Figur im Betracht gegen die Hyperbel MBF. Nun ſind aber die Linien CN und CR die Aſymptoten der Hyperbel MBF (Beding) Folglich ſind auch CD und CH die Aſymptoten der Hyperbel *nGy* oder der ihr gleichen Hyperbel NB*x*. W. z. Th. u. z. E. W.

*§. 49.

Fünfter Zuſatz. Wenn man in der 71ten Figur durch das Centrum C und innerhalb dem Aſymptotenwinkel NCR oder ſeinem Verticalwinkel eine beliebige Linie *de* ziehet, ſo wird dieſe nothwendig die Hyperbel MBF oder ihre entgegengeſezte in den Punkten F oder *f* durchſchneiden, und in dieſe krumme Linie hinein gehen ohne ſie zum 2tenmal zu durchſchneiden. Denn da ſich die Hyperbel ohne Aufhören der Aſymptote CR nähert und da die Linie *cd* ſich beſtändig davon hinter dem Punkt C entfernet, ſo müſſen dieſe beyden Linien nothwendig ſich in einem Punkt F durchſchneiden, aber auch

fernung von dem Scheitelpunkt G den Ordinaten auf BT in einer gleichen Entfernung vom Scheitelpunkt B gleich macht. Dieſes iſt auſſerordentlich deutlich und evident.

auch nicht mehrmal, weil nach ihrem Zuſammenſtoſſen, die eine auf dieſe, die andere auf der andern Seite fortgehet.

§. 50.

Erklärung. Man nennet eine jede Linie FC*f*, die durch das Centrum gehet, und auf die entgegengeſetzte Hyperbel ſtößt, den erſten Diameter, weil dieſer alle Linien, die Ordinaten an ihm ſind, und mit der Tangente an dem Punkt F oder *f*, wo dieſe Linie die Hyperbel durchſchneidet, parallel laufen, in 2 gleiche Theile theilet. Wir werden dieſes weiter unten ſehen.

*§. 51.

Sechſter Zuſatz. Wenn man folglich nach Belieben und in gleich weiten Entfernungen vom Centrum 2 Punkte P und *p* in der verlängerten Axe der entgegen geſezten Hyperbeln annimmt, und wenn man die Ordinate PF durch das Centrum C die unbeſtimmte Linie FC*e* ziehet, ſo wird dieſe Linie mit der entgegengeſezten Hyperbel in dem Punkt *f* zuſammenſtoſſen, welcher Punkt der Endpunkt der Ordinate *pf* an dem Punkt *p* iſt.

Beweis. 1) Sie wird mit der entgegengeſetzten Hyperbel zuſammen ſtoſſen (§. 49).

2) Da die Abſciſſen CP und C*p* ſich gleich ſind (Conſtr.), ſo iſt auch die Ordinate an dem Punkt *p* der Ordinate PF gleich, weil die entgegengeſezten Hyperbeln ſich gleich und ähnlich ſind. Da aber wegen der ähnlichen Triangel CPF und C*pf*, CP : C*p* = PF: *pf* und da CP = C*p*: ſo folgt, daß auch PF = *pf*. Nun iſt aber PF = der Ordinate *p*; Folglich iſt *pf* auch dieſer nämlichen Ordinate gleich, das heißt, ſie iſt dieſe Ordinate ſelbſt. Folglich iſt der Punkt *f*, wo die Linie FC*e* die Ordinate an dem Punkt *p* berühret, der Endpunkt der Ordinate.

* §. 52.

Siebender Zuſatz. Folglich wird ein jeder erſter Diameter FCf durch das Centrum in 2 gleiche Theile getheilet, weil in dem rechtwinklichten Triangel CPF und Cpf, da CP=Cp und PF=pf (§. 57), auch nothwendig die Hypothenuſen CF und Cf ſich gleich ſeyn müſſen.

* § 53.

Achter Zuſatz. Wenn man ferner durch einen beliebigen Punkt m einer der Aſymptoten CN mit der andern Aſymptote CR eine Parallellinie mg ziehet, ſo wird dieſe Parallellinie die Hyperbel in einem einzigen Punkt F ſchneiden, weil dieſe Parallellinie beſtändig in einer beſtimmten Entfernung von der Aſymptote bleibt, und weil hingegen die Hyperbel derſelben näher kommt, als daß man den Unterſchied durch irgend eine Grösſe beſtimmen könnte.

§. 54.

Fünfter Hauptſatz. Laſſet uns durch einen Punkt M der Hyperbel MBF (Fig. 73) eine Linie MI, die in einem Punkt I von der andern Aſymptote CL beſtimmt wird, mit der Aſymptote CR, und durch den nämlichen Punkt M eine andere Mf mit der Aſymptote CL parallel ziehen; Wenn wir auſſerdem durch den Scheitelpunkt B die gleichen Hypothenuſen BG und BD ziehen, die die Aſymptoten in O und n durchſchneiden, ſo behaupte ich, daß das Rechteck IM × MF= BO×OC. ſey.

Beweis. Merket gleich anfangs, daß BG mit der Aſymptote CR parallel ſey, weil BT=CG und mit GC auch parallel iſt (Conſtr.); daß folglich auch die Linien BG, CT, die ſie beſtimmen, mit ihr von einerley Gröſſe und parallel ſind; daß folglich auch GC : CD=GO: OB. Nun iſt aber GC=CD (Beding): Folglich GO=OB. Es

verhält ſich ferner GB : BD = GO : OC. Es iſt aber GB = BD (Conſtr.); Folglich iſt auch GO = OC. Man kann auch beweiſen, daß $Dn = Bn = nC$ und folglich ſind alle Linien GO, OB, OC, Dn, Bn, nC ſich gleich

Laſſet uns itzt durch den Punkt M die Linien MK auf die verlängerte perpendiculaire Axe ziehen, ſo iſt, wegen der ähnlichen Triangel LMI und HBO, BH : BO = LM : IM. Eben ſo ziehet man aus der Aehnlichkeit der Triangel BTn und MKf dieſes Verhältniß: BT oder BH : Bn oder OC = MK : Mf. Wenn man folglich dieſe 2 Verhältniſſe der Ordnung der Glieder nach durch einander multiplicirt, ſo verhält ſich $\overline{BH}^2 : BO \times OC = LM \times MK : IM \times Mf$. Nun iſt aber nach §. 42 $LM \times MK = \overline{BH}^2$: Folglich iſt $IM \times Mf = BO \times OC$. W. z. E. W.

§. 55.

Wenn man umgekehrt die Linie IM mit CR parallel und ſo ziehet, daß $IM \times IC$ oder Mf immer ſo groß ſey, als $BO \times OC$, ſo iſt der Punkt M in der Hyperbel. Man nimmt an, daß BO = OC. Dieſes findet immer ſtatt, wenn man den Winkel LCR durch die undeterminirte Linie CP in 2 gleiche Theile theilet und die Linie OB in einem beliebigen Punkt O mit CR parallel ziehet. Man ſetzt auſſerdem noch voraus, daß HBT und LMK perpendiculair auf die Linie CP ſtehen.

Beweis. Es verhält ſich BH : BO = LM : IM und BT oder BH : Bn oder OC = MK : Mf oder IC. Wenn man folglich dieſe 2 Verhältniſſe der Ordnung der Glieder nach durch einander multiplicirt, ſo verhält ſich $\overline{BH}^2 : BO \times OC = LM \times MK : IM \times IC$. Nun iſt aber vermöge der Bedingung $IM \times IC = BO \times OC$ Folglich iſt $LM = MK = \overline{BH}^2$. Folglich iſt der Punkt M in der Hyperbel (§. 43).

§. 56.

§. 56.

Zuſatz. Und da der Punkt M nach Belieben angenommen worden iſt, ſo folgt daraus, daß alle Rechtecke wie IM $\times$ Mf oder IM $\times$ IC unter ſich gleich ſind, weil ſie beſtändig dem beſtimmten Rechteck BO $\times$ OC gleich ſind.

§. 57.

Anmerkung. 1) Das Rechteck BO $\times$ OC oder vielmehr das Quadrat $\overline{OC}^2$ nennen die Geometer die Potenz der Hyperbel. Dieſe iſt jederzeit ſo groß, als der 4te Theil der Summe der Quadrate der beyden halben Axen CB und CD. Denn da OC nur die Helfte der Hypothenuſe BD iſt, ſo iſt $\overline{OC}^2 = \frac{\overline{BD}^2}{4}$. Nun iſt aber $\overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$. Folglich iſt $\overline{OC}^2 = \frac{\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2}{4}$.

2) Folglich ſind alle Rechtecke IM $\times$ IC der Potenz der Hyperbel gleich. Wenn man folglich eines von dieſen Rechtecken kennet, ſo kann man auf eine leichte Art die Quadratwurzel von dieſer Potenz finden. Denn ſie iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen den 2 Seiten des gegebenen Rechtecks.

3) Wenn ferner der Aſymptoten Winkel HCT ein rechter Winkel wäre, ſo wäre auch der Winkel BQC ein rechter Winkel und folglich wäre $\overline{BC}^2 = 2(\overline{OC}^2) = 2\,JM \times IC$. Folglich iſt $BC = \sqrt{(2\,JM \times JC)}$. Das heißt, es iſt in dieſem Fall die halbe erſte Axe BC, welche den Aſymptotenwinkel jederzeit in 2 gleiche Theile theilet (Conſtr. §. 42) ſo groß, als die Quadratwurzel der doppelten Potenz der Hyperbel.

§. 58.

Sechſter Hauptſatz. Ziehet durch irgend einen Punkt

S (Fig. 74) nach Belieben eine Linie SHQR, die die Seite der Hyperbel in den Punkten H und Q und die Aſymptoten in R und S durchſchneidet; ſo iſt jederzeit RQ = SH.

Beweis. Ziehet gleich anfangs die Linien Hd und Hn und Qo und Qb mit den Aſymptoten CS und CR parallel, und erinnert euch, daß alle Rechtecke wie Qb×Qo und Hn × Hd ſich einander gleich ſind (§. 56), ſo iſt Qb×Qo=Hn Hd. Folglich verhält ſich Qb : Hd=Hn : Qo. Allein wegen der ähnlichen Triangel RQb und RHd verhält ſich Qb : Hd=RQ : RH. Folglich RQ : RH = Hn : Qo. Nun verhält ſich aber aus gleichen Gründen Hn : Qo =SH : SQ : Folglich RQ : RH=SH : SQ. Folglich RH—RQ : RQ=SQ—SH : SH. oder HQ : RQ =HQ : SH. Daraus folgt, daß RQ=SH. W.z.E.W.

§. 59.

Wenn man umgekehrt auf einer Linie SR, die durch die Seiten eines Winkels SCR beſtimmt wird, das Stück SH gleich RQ macht, ſo ſind die Punkte R und H in der Hyperbel.

Beweis. Wenn wir die nämliche Conſtruction behalten, ſo verhält ſich Qb : Hd=RQ : RH=SH : SQ : (Denn, weil RQ nach der Bedingung = SH, ſo muß RH =SQ ſeyn) =Hn : Qo. Folglich verhält ſich Qb : Hd =Hn : Qo. Folglich iſt Qb×Qo = Hd×Hn. Wenn man aber den Winkel SCR in 2 gleiche Theile theilet und man zwiſchen Qb und Qo eine mittlere Proportionallinie ſuchte, und dieſe von C in G trüge, und GB mit CR parallel zöge, ſo würde GC = GB ſeyn und es wäre Qb×Qo=GB×GC= HD×Hn. Folglich werden die Punkte Q und G in der Hyperbel ſeyn (§. 55).

§. 60.

Zuſatz. Man mag folglich nach Belieben in den

Aſymp-

Aſymptotenwinkel eine Linie SR ziehen, die durch diſe Aſymptoten beſtimmt wird und mit der Hyperbel zuſammen ſtößt, oder ſie durchſchneidet, ſo wird der Theil SH dieſer Linie, welcher zwiſchen der Seite der Hyperbel und ihrer nächſten Aſymptote lieget, jederzeit einem andern Theile RQ dieſer nämlichen Linie gleich ſeyn, der zwiſchen den Arm dieſer krummen Linie und ihrer nächſten Aſymptote enthalten iſt. Dieſes muß man wohl merken. Denn wegen dieſer Eigenſchaft der Hyperbel werden wir auf eine beſtimmte Art durch einen beliebigen Punkt eine Tangente an dieſe krumme Linie ziehen können.

§. 61.

Siebender Hauptſatz. Laſſet uns in der Hyperbel einen Punkt H annehmen (§. 75). Durch dieſen laſſet uns Hn mit der Aſymptote CR parallel ziehen. Darauf laſſet uns nS$=$$nC$ machen. Wenn wir nun von dem Punkt S durch den gegebenen Punkt H eine unbeſtimmte Linie SHR ziehen, ſo wird dieſe Linie die Tangente in H ſeyn, oder dieſe Linie wird die krumme Linie nur in einem Punkte berühren.

Beweis. Wenn SR mit der Hyperbel in einem andern Punkt d zuſammen ſtieſſe, ſo wäre S$d$$=$HR (§. 58. 60) Allein der ähnlichen Triangel SnH und SCR wegen (Conſtr.) verhält ſich Sn : nC$=$SH : HR. Nun iſt aber S$n$$=$$n$C (Conſtr.). Folglich iſt auch SH$=$HR. Folglich, weil Sd auch ſo groß ſeyn würde, als HR, ſo würde auch Sd $=$SH ſeyn, welches unmöglich. Es iſt alſo unmöglich, daß SR bey der angenommenen Conſtruction in einem andern Punkt als in dem Punkt H die Hyperbel berühre. Folglich iſt SR eine Tangente. W. z. E. W.

Man ſiehet hieraus, daß eine Linie SR, die durch die Aſymptote determinirt wird, und in dem Punkt, wo ſie mit der Hyperbel zuſammen ſtößt, in 2 Theile getheilet wird, nothwendig ein Triangel ſey.

§. 62.

Wenn umgekehrt eine Linie SR, die durch die Aſymptoten beſtimmt wird und an einem Punkt H die Tangente der Hyperbel iſt, ſo wird ſie nothwendig in dem Berührungspunkt in 2 gleiche Theile getheilet werden.

Beweis. Denn man muß, wie wir ſo eben geſehen haben, um eine Tangente an den Punkt H zu bekommen mit *C*R eine Parallellinie ziehen; *n*S = *nC* machen, und durch die Punkte S und H eine Linie SHR ziehen, welche die Tangente an dem Punkt H iſt (§. 61) und folglich wird dieſe Linie von der in der Bedingung angenommen, nicht unterſchieden ſeyn. Denn es iſt klar, daß man an den nämlichen Punkt der krummen Linie unmöglich zwey verſchiedene Tangenten ziehen könne. Nun iſt aber SHR in dem Berührungspunkt H in zwey gleiche Theile getheilet (Conſtr.). Folglich muß die angenommene es auch ſeyn. W. z. E. W.

§. 63.

Erſter Zuſatz. Hieraus folgt, daß die Linie HBT (Fig. 71) die aus dem Scheitelpunkt B der Hyperbel mit der 2ten Axe GD parallel gezogen iſt, eine Tangente in dieſem Punkt ſey, weil ſie in 2 gleiche Theile getheilet wird (Conſtr.).

§. 64.

Zweyter Zuſatz. Wenn man durch einen Punkt H (Fig. 75) einer Hyperbel einen erſten Diameter H*Ch* (§. 50), eine Tangente SHR (§. 61), und die Linien HG und H*g* mit den Aſymptoten *C*S und *C*R parallel ziehet, biß ſie mit der Linie G*Cg*, die durch das Centrum *C* mit der Tangente SHR parallel gezogen iſt, zuſammen ſtoſſen, ſo wird dieſe Linie G*Cg*, die auf dieſe Art determinirt iſt, und die man

den

zweyten conjugirten Diameter zu dem erſten Diameter *HCh* nennet, im Centrum *C* in 2 gleiche Theile getheilet werden, und überdies der Tangente SR gleich ſeyn.

Beweis. Denn da die Linien S*C* und H*g* und die Linien SH und *Cg* unter einander parallel ſind (Conſtr.), ſo iſt es klar, daß *Cg*=SH. Nun iſt aber SH=HR (§. 62) Folglich *Cg*=HR. Allein HR=G*C*, weil die Figur *C*GHR ein Parallelogramm iſt (Conſtr.); Folglich iſt *Cg*=G*C*, folglich iſt der conjugirte Diameter G*Cg* im Centrum *C* der Hyperbel in 2 gleiche Theile getheilet und der Tangente SHR gleich. Denn da die Helften HR und G*C* ſich gleich ſind, ſo müſſen auch die Ganzen G*g* und SR ſich gleich ſeyn. W. z. E. W.

* §. 65.

Dritter Zuſatz. Wenn man durch einen andern Endpunkt *h* des Diameters H*h* eine Linie *thu* mit der Tangente SHR parallel ziehet, ſo wird dieſe Linie *thu* auch die Tangente an den Punkt *h* der entgegengeſezten Hyperbel ſeyn.

Beweis. Da die Triangel *hCu* und H*C*S ſich ähnlich ſind und H*C*=*Ch* iſt (§. 52), ſo iſt es klar, daß HS=*hu*. Eben ſo erkennet man aus der Gleichheit der Triangel *hCt* und H*C*R, daß HR=*ht*. Nun iſt aber HS=HR (§. 62); Folglich *hu*=*ht*, das heißt, die Linie *tu* wird durch den Durchſchnitt der Hyperbel in dem Punkt *h* in zwey gleiche Theile getheilet, und folglich iſt dieſe Linie eine Tangente der entgegengeſetzten Hyperbel (§. 61).

* §. 66.

Vierter Zuſatz. Auch die Linien H*n*G und H*pg*, die von dem Berührungspunkt H nach den Endpunkten G und *g* des conjugirten Diameters G*g* gezogen iſt, werden in den

Punkte

Punkten *n* und *p*, in welchen ſie mit den Aſymptoten *C*S und *C*R zuſammen ſtoſſen, in zwey gleiche Theile getheilet, das heißt, *gp*=*p*H und G*n*=*n*H. Dieſes iſt klar genug, weil, da H*g* mit *C*S parallel iſt (Conſtr.), man folgendes Verhältniß hat. 1) G*C* : *Cg*=G*n* : *n*H. Nun iſt aber G*C*=*Cg* (§. 64). Folglich iſt G*n*=*n*H.

2) Da auch HG mit *C*R parallel iſt, ſo verhält ſich auch *gC* : *C*G=*gp* : *p*H. Nun iſt aber *gC*=*C*G; Folglich iſt *gp*=*p*H. W. z. E. W.

* §. 67.

Fünfter Zuſatz. Wenn folglich die Aſymptoten *C*S und *C*R der Hyperbel nebſt einem Punkt H dieſer krummen Linie gegeben ſind, und man ſucht zwey conjugirte Diameter, wovon der eine durch den Punkt H gehet, ſo darf man nur durch das Centrum *C* die Linie H*Ch* ziehen, H*C*=*Ch* machen; durch den Punkt H, die Linie H*n* mit der Aſymptote *C*R parallel ziehen; H*n* ſo verlängern, daß *n*G=H*n*; und G*Cg*, die im Centrum *C* in 2 gleiche Theile getheilet wird, ſo werden die beyden Linien H*Ch* und G*Cg* die 2 conjugirten Diameter der Hyperbel ſeyn.

Beweis. Wenn man durch den Punkt H die Linie SHR ziehet, die durch die Aſymptote determinirt und mit der Linie G*Cg* parallel iſt, ſo werden die Triangel H*n*S und G*nC* ſich ähnlich ſeyn, und da ihre Seiten H*n* und *n*G ſich gleich ſind (Conſtr.), ſo wird auch *C*G=SH ſeyn. Weil aber die Linien G*C* und HR und HG und *C*R parallel ſind (Conſtr.), ſo iſt offenbar G*C*=HR; Folglich iſt SH=HR. Folglich iſt die Linie SHR eine Tangente an dem Punkt H (§. 61). Folglich iſt die Linie G*Cg*, die eben ſo groß und mit ihr parallel iſt, der conjugirte Diameter von dem Diameter H*Ch* (§. 64). W. z. E. W.

§. 68.

Sechſter Zuſatz. Wenn man durch zwey conjugirte Diameter H*h* und G*g* (Fig. 75) wovon H*h* der erſte Diameter iſt, oder die Hyperbel durchſchneidet, die Aſymptoten dieſer krummen Linie beſtimmen wolte, ſo müſte man die Endpunkte G und *g* des 2ten Diameters durch die Linien HG und H*g* verbinden und durch das Centrum *C* und durch die Mitte *n* und *p* dieſer Linien die Linien von unbeſtimmter Länge *C*S und *C*R ausziehen. Dieſe werden die geſuchten Aſymptoten ſeyn. Denn hätte man die Aſymptoten als bekannt angenommen, ſo würden ſie die Linien HG und H*g* in 2 gleiche Theile getheilet haben (§. 66) und würden alsdenn, wie itzt von den Linien *C*S und *C*R nicht unterſchieden geweſen ſeyn. Es müſſen alſo dieſe Linien die geſuchten Aſymptoten ſeyn.

§. 69.

Siebender Zuſatz. Laſſet uns durch irgend einen Punkt L der Hyperbel, der von H verſchieden iſt, die Linie M*m*, deren Endpunkte die Punkte M und *m* in den Aſymptoten ſind, mit der Tangente SHR parallel ziehen, ſo wird der Diameter H*Ch*, der gegen K verlängert wird, die Linien L*l*, die durch die krumme Linie determinirt wird in P in zwey gleiche Theile theilen.

Beweis. Da die Tangente in dem Berührungspunkt *H* (§. 62) durch die Linie *h*P in 2 gleiche Theile getheilet wird, ſo wird deren Parallellinie M*m* auch in P in 2 gleiche Theile getheilet. Folglich iſt ML + LP = *ml* + P*l*; Nun iſt ML = *ml* (§. 60); Folglich LP = P*l*. Folglich u. ſ. w.

* §. 70.

Wenn hingegen eine Sehne L*l* der Hyperbel in dem Punkt P durch den Diameter *h*K in 2 gleiche Theile getheilet wird, ſo wird dieſe Linie nothwendig mit der Tangente S*H*R parallel

lel ſeyn, die durch den Punkt H, wo der Diameter die krumme Linie ſchneidet, gezogen iſt.

Denn wenn Ll unter dieſen Umſtänden nicht mit der Tangente SHR parallel wäre, ſo könnte man durch den Punkt l mit der Tangente eine Parallellinie lx ziehen, die oberwärts oder unterwärts Ll fallen, und in dem Punkt y durch den Diameter hK in 2 gleiche Theile getheilet werden würde (§. 69). Und es verhielte ſich folglich lP: PL$=ly$: yx. Folglich würde Lx mit Py oder mit dem Diameter bK parallel ſeyn. Folglich würde eine Linie, die mit dem Diameter der Hyperbel parallel wäre, dieſe krumme Linie in 2 Punkten durchſchneiden können. Dieſes iſt aber unmöglich, weil ſich die Hyperbel immer mehr und mehr von einem ihrer Diameter entfernet.

2) Wenn 2 parallellaufende Sehnen Ll und xT einer Hyperbel durch die Linie KP in 2 gleiche Theile getheilet werden, ſo gehet dieſe verlängerte Linie nothwendig durchs Centrum dieſer krummen Linie.

Denn gienge ſie nicht dadurch, ſo könnte vom Centrum eine andere Linie nach der Mitte P der Linie Ll ziehen. Dadurch würde Ll mit der Tangente an dieſem Punkt, in welchem dieſe andere Linie die krumme Linie berührt, parallel ſeyn (N° 1); Folglich würde xT auch mit dieſer Tangente parallel ſeyn, und folglich durch die aus dem Centrum gezogene Linie in 2 gleiche Theile getheilet werden (§. 69). Vermöge der Bedingung wird aber xT auch durch KP in 2 gleiche Theile getheilet, und zwar in einem andern Punkt, als in dem angenommenen Punkte der Berührung. Sonſt würden dieſe 2 Punkte P und K in einander fallen. Folglich würde die Linie xT 2 Mittelpunkte haben. Dieſes iſt unmöglich. Folglich gehet eine jede Linie KP, die die Mitte zwoer parallel gezogenen Sehnen in einer Hyperbel mit einander vereiniget, nothwendig durch das Centrum dieſer krummen Linie.

§. 71.

Erklärung. Man nennet eine jede Linie, wie LP oder P*l*, die durch einen beliebigen Punkt P dieſes verlängerten Diameters mit der Tangente S*H*R an dem Punkt *H*, durch welchen dieſes Diameter gehet, parallel gezogen iſt, eine Ordinate dieſes Diameters.

§. 72.

Achter Zuſatz. Ein jeder erſter Diameter *HCh*, der von der Axe unterſchieden iſt, macht mit ſeinen Ordinaten ſchiefe Winkel, oder welches auf eines hinaus lauft, macht mit den Tangenten S*H*R und *thu*, die an den Punkten *H* und *h*, wo dieſer Diameter die entgegengeſezte Hyperbel durchſchneidet, gezogen ſind, ſchiefe Winkel.

Beweis. Man ziehe die halbe Axe CA und verlängere ſie willkührlich nach *r* zu, ſo kann man an dieſelbe aus dem Punkt *h* eine Ordinate oder Perpendiculairlinie *hr* ziehen, und da eine jede Tangente der Hyperbel die Axe dieſer krummen Linie nothwendig in einem Punkt *e* berühren muß (§. 27), ſo folgt daraus, daß *her* ein bey *r* rechtwinklichter Triangel iſt, und folglich iſt der Winkel *her* ein ſpitziger und *heC* ein ſtumpfer. Folglich iſt auch der Winkel *Che* ſpitzig. Hieraus erhellet die Wahrheit dieſes Zuſatzes.

§. 73.

Neunter Zuſatz. Hieraus folgt, daß die Axe der einzige erſte Diameter ſey, welcher mit ſeinen Ordinaten rechte Winkel macht.

*§. 74.

Zehnter Zuſatz. Das Quadrat $\overline{\mathrm{LP}}^2$ oder $\overline{\mathrm{P}l}^2$ einer jeden Ordinate an einem verlängerten erſten Diameter *Hh* verhält

hält ſich zu dem Rechteck $hP \times HP$ aus dem aufgefangenen Diameter hP und der Abſciſſe HP, wie das Quadrat $\overline{Gg}^2$ des conjugirten Diameters Gg zum Quadrat $\overline{Hh}^2$ des Diameters Hh.

Beweis. Man ziehe durch den Punkt l der Hyperbel lQ und lN mit den Aſymptoten CS und CR parallel, und laſſe das übrige alles, wie vorhin. Man mache $CH = Ch = a$. Folglich iſt $Hh = 2a$ und $\overline{Hh}^2 = 4aa$; $CG = cg = SH = HR = b$; Folglich iſt $Gg = 2b$ und $\overline{Gg}^2 = 4bb$; Cp oder $nH = c$; $Hp = d$; $LP = Pl = z$; $CQ = Nl = r$; $QL = t$; $CP = s$. Folglich iſt $hP = s + a$, und $HP = s - a$; Folglich $hP \times HP = (s + a)(s - a) = ss - aa$.

Nun hat man wegen der ähnlichen Triangel CHR und CPm folgendes Verhältniß: $CH : HR = CP : Pm = PM$ oder $a : b = s : \frac{bs}{a} = Pm$ oder PM; Folglich iſt $lm = Pm - Pl = \frac{bs}{a} - z$ und $lM = PM + Pl = \frac{bs}{a} + z$.

Eben ſo iſt der ähnlichen Triangel RHp und mlQ wegen $HR : Hp = lm : lQ$; oder $b : d = \frac{bs}{a} - z$: $\frac{bds - adz}{ab} = lQ$; und aus den ähnlichen Triangeln HSn und lMN fließt folgendes Verhältniß $SH : Hn = lM : lN$ oder $b : c = \frac{bs}{a} + z : \frac{bcs + acz}{ab} = lN$. Es iſt aber $lQ \times lN = Hp \times pC$ (§. 56), das heißt, wenn man die analytiſchen Werthe dieſer Linien $\frac{bds - adz}{ab}$, $\frac{bcs + acz}{ab}$, d, c ſubſtituirt, ſo iſt $\frac{b^2cds^2 - a^2cdz^2}{a^2b^2} = cd$. Wenn man folglich durch cd dividirt, und darauf durch a^2b^2 multiplicirt, ſo

ſo iſt $b^2s^2 - a^2z^2 = a^2b^2$. Folglich $b^2s^2 - a^2b^2 = a^2z^2$ (D) oder $(s^2 - a^2)\,b^2 = a^2 \times z^2$. Deswegen verhält ſich $z^2 : s^2 - a^2 = b^2 : a^2 = 4b^2 : 4a^2$ oder $\overline{LP}^2 : hP \times HP = \overline{Gg}^2 : \overline{Hh}^2$.

§. 75.

Anmerkung. Man ſiehet vermöge dieſes Zuſatzes, daß auch die conjugirten Diameter die Eigenſchaften der Hyperbel haben, die in Betracht ihrer Axen im 3ten Hauptſatze und in den daraus gefolgerten Sätzen, angegeben ſind.

§. 76.

Zweyter Zuſatz. Folglich verhalten ſich 1) die Quadrate der Ordinaten an jedem erſten Diameter zu einander, wie die Rechtecke aus den aufgefangenen Diametern und den correſpondirenden Abſciſſen. Das heißt: $\overline{xK}^2 : \overline{LP}^2 = hK \times HK : hP \times HP$.

2) Alle Rechtecke, wie $ML \times Lm$ ſind allemal ſo groß als einerley Quadrat $\overline{HR}^2$ oder $\overline{GC}^2 = bb$, und ſind folglich auch unter ſich gleich. Denn, wenn man die Glieder der Gleichung aus §. 74 verſetzt, ſo iſt $b^2s^2 - a^2z^2 = a^2b^2$ und folglich $\frac{b^2s^2}{aa} - zz = bb$. oder $\left(\frac{bs}{a} - z\right) \times \left(\frac{bs}{a} + z\right) = bb$. Nun iſt aber $\frac{bs}{a} - z = ML$ und $\frac{bs}{a} + z = Lm$ (§. 74). Folglich iſt $ML \times Lm = bb = \overline{HR}^2 = \overline{GC}^2$.

3) Wenn man von dem Punkt L der Hyperbel mit dem erſten Diameter HCh eine Parallellinie LfO ziehet, und ſie ſo lange verlängert, biß ſie die Aſymptote in den Punkten f und o durchſchneidet, ſo ſind alle Rechtecke wie $Lf \times Lo =$

dem Quadrat $\overline{CH}^2 = aa$, und folglich unter ſich gleich.

Man darf zu ſeiner Ueberzeugung nur die Gleichung D im §. 74 wieder zur Hand nehmen, und wenn man in derſelben mit bb dividirt, ſo iſt $s^2 - a^2 = \frac{a^2z^2}{bb}$; Folglich durchs Verſetzen $s^2 - \frac{a^2z^2}{bb} = aa = \left(s - \frac{az}{b}\right)\left(s + \frac{az}{b}\right)$. Nun iſt aber $s - \frac{az}{b} = Lf$ und $s + \frac{az}{b} = Lo$. Denn wegen der ähnlichen Triangel CGS und CJf verhält ſich CG oder HS: GS oder CH = CI oder LP : If oder IO (weil tS in G in 2 gleiche Theile getheilet wird; Folglich wird auch die Parallellinie von derſelben in I in 2 gleiche Theile getheilet, und folglich iſt If = Io), das heißt, wenn man die analytiſchen Werthe ſubſtituirt, $b : a = z : \frac{az}{b} = If = Io$. Folglich iſt $Lf = IL - If = CP - If = s - \frac{az}{b}$ und $Lo = IL + Io = CP + Io = s + \frac{az}{b}$. Folglich iſt $Lf \times Lo = \left(s - \frac{az}{b}\right)\left(s + \frac{az}{b}\right) = aa$. Dieſes iſt der vorige Ausdruck. Folglich iſt $Lf \times Lo = aa = \overline{CA}^2$. W. z. E. W.

4) Man kann auch auf eine eben ſolche leichte Art beweiſen, daß die Linien Lf und ob, die durch die entgegengeſetzten Hyperbeln und durch die Aſymptoten determinirt werden, ſich gleich ſind. Wenn man durch b an dem Diameter Hh eine Ordinate ziehet, ſo wird dieſe Ordinate ſo groß ſeyn als LP. Daraus erhellet daß $Lf = ob$.

5) Wenn man folgendes Verhältniß annimmt: $Hh : Gg = Gg : p$, oder $2a : 2b = 2b : p = \frac{2bb}{a}$: ſo wird

p

p oder $\frac{2bb}{a}$ der Parameter des Diameters Hh ſeyn, und folglich verhält ſich $4aa : 4bb = 2a : p$ oder $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$. Wenn man folglich aus dem §. 74 die Gleichung D durch bb dividirt, ſo iſt $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$ (L) und wenn man in dieſer letzten Gleichung den Ausdruck $\frac{2a}{p}$ an der Stelle von $\frac{aa}{bb}$ ſetzet, ſo iſt $ss - aa = \frac{2azz}{p}$. Dieſe Gleichung kommt mit der im § 37 überein, und die Gleichung $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$ (L) mit der Gleichung im §. 17. Es ſind alſo die Gleichungen der Hyperbel aus ihren Axen und dem Parameter der Axen einerley mit den aus den 2 conjugirten Diametern und den Parametern dieſer Diameter. Nur darin ſind ſie unterſchieden, daß die Axen rechtwinkliche gegen einander ſind, die conjugirten Diameter aber ſchiefe Winkel unter ſich machen.

6) Nimmt man die conjugirten Diameter als gleich an, das heißt, macht man $a = b$, ſo wird aus der Gleichung $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$ folgende werden $ss - aa = zz$. Dieſes iſt die Gleichung für eine gleichſeitige Hyperbel gegen jede 2 ihrer Diameter. Weil würklich in der gleichſeitigen Hyperbel die 2 conjugirten Axen ſich gleich ſind (§. 18) und der Aſymptotenwinkel SCR ein rechter Winkel iſt (§. 19), ſo wird alſo ein Cirkel, den man aus der Mitte H der Linie SR $=$ Gg mit dem Radius HS oder HR beſchreibet, durch das Centrum C der Hyperbel gehen und es wird HC $=$ HS oder 2HC $=$ 2HS ſeyn, oder Hh $=$ SR. Es iſt aber SR $=$ Gg. Folglich iſt Hh $=$ Gg. Hieraus ſiehet man, daß in der gleichſeitigen Hyperbel ſo wohl die 2 conjugirte Diameter als auch die Axen ſich gleich ſind.

* §. 77.

Achter Hauptſatz. Man ziehe durch jede 2 Punkte M und *l* der Hyperbel (Fig. 76) die Tangenten CMS und *dl*N, die durch die Aſymptoten in den Punkten C und S; *d* und N beſtimmt werden. Man ziehe auch die Linien C*d* und und NS, ſo werden nothwendig dieſe 2 letztern Linien unter ſich parallel ſeyn, oder es verhält ſich alsdenn OC : ON = O*d* : OS.

Beweis. Man ziehe durch die Berührungspunkte M und *l* die Linien MP und *l*G mit der Aſymptote O*d* parallel, ſo wird MP×PO ſo groß ſeyn, als *l*G×GO (§. 56) Folglich verhält ſich PO : GO = *l*G : MP oder 2PO : 2GO = 2*l*G : 2MP. (D). Es iſt aber CP = PO, weil (§. 62) CM = MS. Folglich iſt OC = 2PO oder 2CP.

Da ferner MP mit OS parallel iſt (Conſtr.), ſo verhält ſich OC : CP = OS : MP. Nun iſt aber OC = 2CP. Folglich iſt OS = 2MP und da N*l* = *ld* (§. 62), ſo iſt NG = GO; Folglich ON = 2GO oder 2NG. Da folglich *l*G mit O*d* parallel iſt (Conſtr.), ſo verhält ſich ON : NG = O*d* : *l*G. Es iſt aber ON = 2NG. Folglich iſt O*d* = 2*l*G.

Setzen wir daher in dem obigen Verhältniß D die Werthe, die wir ſo eben beſtimmt haben, das heißt, ſetzen wir für 2PO, OC; für 2GO, ON und O*d* für 2*l*G und OS für 2MP, ſo verhält ſich OC : ON = OD : OS. Dieſes zeigt an, daß C*d* mit NS parallel ſey. W. z. E. W.

* §. 78.

Zuſatz. Weil NS mit C*d* parallel iſt, ſo verhalten ſich CN : ON = *d*S : OS.

* §. 79.

Neunter Hauptſatz. Wenn man durch die Berührungs-

rungspunkte M und l die Linie Ml ziehet, ſo wird dieſe mit der Linie Cd und NS parallel ſeyn.

Beweis. Denn Cd iſt mit NS parallel (§. 77). Wenn man folglich von den Punkten M und l die Perpendiculairlinien TMK und SlF fallen läßt, ſo iſt

1) Wegen der Aehnlichkeit der Triangel TMS und CMK, CM : MS = MT : MK. Nun iſt aber CM = MS (§. 62). Folglich iſt MT = MK : Folglich iſt MK $= \frac{KT}{2}$ oder $\frac{FS}{2}$.

2) Aus den ähnlichen Triangeln DlF und nlS ziehet man nachſtehendes Verhältniß : dl : lN = lF : lS. Nun iſt dl = lN (§. 62); Folglich iſt lF = lS = Folglich iſt lF $= \frac{FS}{2}$. Es iſt aber MK $= \frac{FS}{2}$ (N° 1) Folglich iſt die Perpendiculairlinie MK ſo groß, als die Perpendiculairlinie lF. Folglich iſt Ml mit cd parallel. Es iſt aber Cd mit NS parallel (§. 77) Folglich iſt MC mit den beyden Linien Cd und NS parallel (W. z. E. W.)

* §. 80.

Zehnter Hauptſatz. Die Tangenten CMS und dlN werden durch die Berührungspunkte M und l und den Punkt x, wo ſie ſich ſchneiden, ſo getheilet, daß die beyderſeitigen Theile im Verhältniß gegen einander ſtehen, das heißt, daß CM : dl = Mx : lx = xS : xN.

Beweis. Weil CD mit Ml parallel lauft (§. 79), ſo iſt CM : dl = Mx : lx und Mx : lx = xS : xN. Denn die Triangel xMl und xNS ſind ſich ähnlich. Folglich verhält ſich CM dl = Mx : lx = xS : xN. W. z. E. W.

*§. 81.

Zuſatz. Folglich verhält ſich auch $CM : Mx = dl : lx$. Folglich iſt $CM + Mx : Mx = dl + lx : lx$, das heißt, $Cx : Mx = dx : lx$ oder $Mx : Cx = lx : dx$.

*§. 82.

Eilfter Hauptſatz. Man ziehe einen erſten Diameter OlP (Fig. 77) und durch den Punkt l, wo er die krumme Linie durchſchneidet, die Tangente Nld, um an dieſen Diameter eine Ordinate PM zu erhalten. Ferner verzeichne man durch den Punkt M die Tangente CMS. Nun behaupte ich, daß dieſe Tangente den Diameter OlP in einem Punkt R unterhalb dem Centrum O durchſchneiden werde, daß daher $OP : Ol = Ol : OR$.

Beweis. Man verlängere die Ordinate PM ſo lange, bis ſie in dem Punkt G die Aſymptote OC durchſchneidet und ziehe mit der Tangente CS die Parallellinie lK. Nun wird die Tangente CS den Diameter OP in einem Punkt R unterwärts O durchſchneiden, weil dieſe Tangente, die immer unterhalb O iſt von der Aſymptote OC zur Aſymptote Od gehet, zwiſchen welchen der erſte Diameter OP nothwendig durchgehet.

2) Itzt iſt zu beweiſen, daß $OP : Ol = Ol : OR$. Es iſt aber wegen der Parallellinien Nl und PG, $Pl : Ol = GN : ON$ oder $\frac{Pl}{OL} = \frac{GN}{ON} = \frac{GN \times NC}{NC \times ON}$. Da nun GM der Conſtruction wegen mit Nx parallel iſt, ſo verhält ſich $GN : NC = Mx : Cx = lx : dx$. (§. 81) $= KS : dS$ (weil lK mit xS parallel iſt) (Conſtruct.). Folglich verhält ſich $GN : NC = KS : dS$ oder $\frac{GN}{NC} = \frac{KS}{dS}$.

Ferner verhält ſich $NC : ON = dS : OS$ (§. 78)

Folg.

Folglich iſt $\frac{NC}{ON} = \frac{dS}{OS}$: Wenn man folglich in der Gleichung $\frac{Pl}{ol} = \frac{GN \times NC}{NC \times ON}$. Die Gröſſe $\frac{KS}{dS}$ an der Stelle von $\frac{GN}{NC}$ und $\frac{dS}{OS}$ an der Stelle von $\frac{NC}{ON}$ ſetzet, ſo iſt $\frac{Pl}{Ol} = \frac{KS}{OS}$. Nun verhält ſich aber wegen der Parallellinien lK und RS (Conſtr.) $KS : OS = lR : OR$ oder $\frac{KS}{OS} = \frac{lR}{OR}$. Folglich iſt $\frac{Pl}{Ol} = \frac{lR}{OR}$ oder $Pl : Ol = lR : OR$. Folglich iſt $Pl + Ol : Ol = lR + OR : OR$, das heißt, $OP : Ol = Ol : OR$. W. z. E. W.

*§. 83.

Wenn man hingegen an einem Diameter OP eine Ordinate OM ziehet, und zu den 2 Linien OP und Ol eine dritte Proportionallinie ſuchet, und wenn man dieſe aus O in R trägt und die Linie MR ziehet, ſo behaupte ich, daß dieſe Linie MR eine Tangente von der Hyperbel ſey.

Beweis. Wäre ſie keine Tangente an dem Punkt M, ſo könnte man aus dieſem Punkt eine andere ziehen. Dieſe würde den Diameter OP in irgend einem Punkt V oberhalb oder unterhalb R durchſchneiden. Setzt man aber das Verhältniß $OP : Ol = Ol : OR$, ſo kann VM unmöglich eine Tangente ſeyn Denn nähme man VM als eine Tangente an, ſo verhielte ſich nach §. 82 $OP : Ol : Ol : OV$. Folglich wäre $OV = \frac{\overline{Ol}^2}{OP}$. Vermöge der Bedingung verhält ſich aber $OP : Ol = Ol : OR$. Folglich iſt $OR = \frac{\overline{Ol}^2}{OP}$. Folglich wäre $OV = OR$: Welches unmöglich iſt.

§. 82.

Anmerkung. Dieſe Art, eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen, hätte man ſchon lange verſtehen können. Die Anfänger werden aber finden, daß man auf dieſem Wege langſam und beſchwerlich zu ſeinem Endzweck kommt. Wir werden daher nicht unſchicklich unſere Methode Tangenten an krumme Linien zu ziehen, wieder vornehmen. Man wird finden, wie leicht ſie gegen die vorige Methode der Alten ſey.

§. 85.

Aufgabe. Den Ausdruck von OC zu finden, wenn man OH für die Tangente annimmt (Fig. 70).

Auflöſung. Man ſtelle ſich anfänglich vor, daß OH die Hyperbel in den Punkten H und L durchſchneide und ziehe die Ordinate HE und LR auf die Axe oder auf den Diameter.

Nun iſt es evident, daß $OC = CE - OE$, das heißt, OC iſt ſo groß, als die undeterminirte Linie CE weniger die Subtangente OE. Man ſuche alſo den Ausdruck für die Subtangente.

1) Deswegen ſey $CA = BC = a$; $CE = x$; $ER = r$; $OE = s$; $OC = CE - OE = x - s$; $OR = OE + ER = s + r$; $BR = BC + CE + ER = a + x + r$; $AR = CE + ER - CA = x + r - a$. Folglich iſt $BR \times AR = (a + x + r)(x + r - a) = xx + 2rx + rr - aa$; $AE = CE - CA = x - a$; $BE = CE + BC = x + a$. Folglich iſt $BE \times AE = (x + a)(x - a) = xx - aa$.

2) Nach dieſer Vorausſetzung iſt der ähnlichen Triangel ORL und OEH wegen $OR : OE = RL : EH$ oder $\overline{OR}^2 : \overline{OE}^2 = \overline{RL}^2 : \overline{EH}^2$. Allein (§. 4) $\overline{RL}^2 : \overline{EH}^2 = BR \times AR :$

$\times AR : BE \times AE$. Folglich $BR \times AR : BE \times AE = \overline{OR}^2 : \overline{OE}^2$. Das heißt, wenn man in dieſer Proportion die analytiſchen Werthe dieſer Glieder ſetzet. $xx + 2rx + rr - aa : xx - aa = ss + 2rs + rr : ss$. Wenn man folglich das 2te Glied vom erſten und das 4te vom 3ten abziehet, ſo iſt $2rx + rr : xx - aa = 2rs + rs : ss$. Wenn man folglich das Factum der beyden äuſſerſten und mittelſten Glieder macht, ſo iſt $2rs^2x + r^2s^2 = 2rsx^2 + r^2x^2 - 2a^2 . rs - a^2r^2$ und wenn man durch r dividirt, ſo iſt $2s^2x + rs^2 = 2sx^2 + rx^2 - 2a^2s - a^2r$ (E). Auf dieſe Gleichung kommt man, wenn man OH für eine Sekante annimmt. Wird nun aber OH die Tangente, ſo fallen die Punkte L und H in einander und der Unterſchied der Abſciſſen $ER = r$ verſchwindet oder $r = o$. Folglich muß man in der Gleichung E alle Glieder, worin r vorkommt, wegnehmen, ſo iſt $2s^2x = 2sx^2 - 2a^2s$. Wenn man folglich durch $2s$ dividirt, ſo iſt $sx = xx - aa$ oder $s = \frac{xx - aa}{x}$ $= OE =$ der Subtangente.

3) Folglich iſt $OC = CE - OE = x - \frac{xx + aa}{x} = \frac{xx - xx + aa}{a} = \frac{aa}{x}$. Folglich iſt $OC = \frac{aa}{x}$ oder $OC \times x = aa$. Folglich verhält ſich $x : a = a : OC$ oder $CE : CA = CA : OC$. Dieſer Werth iſt dem im §. 82 gefundenen vollkommen gleich.

§. 86.

Anmerkung. Nach der vorigen Methode haben wir den Werth von OC nur vermittelſt 9 Hauptſätzen erhalten, unter welchen der 9te allein ſchon ſo langwierig und beſchwerlich, als die ganze Auflöſung unſerer Aufgabe, nach meiner

Methode iſt. Man hat dort eine viel gröſſere Anzahl Vergleichungen nöthig, als in dem letztern Fall, wo man alles durch 2 ähnliche Triangel und vermittelſt der im erſten Hauptſatz bewieſenen Eigenſchaft der Hyperbel blos durch Rechnung findet.

Vielleicht hält man dieſe Erfindung für unnütz, weil man ohne ſie eine Tangente an die Hyperbel ziehen kann. Es iſt wahr, man kann dieſe Aufgabe auflöſen, wenn Aſymptoten mit in der Auflöſung vorkommen. Allein, auſſerdem, daß man vermittelſt dieſer letzten Methode ohne Aſymptoten; bloß durch die Axe oder einen von den Diametern die Tangente ziehen kann, ſo dient uns auch der augenblicklich gefundene Ausdruck für OC, nämlich $\frac{aa}{x}$, darzu, 2 Punkte der Hyperbel zu finden, welcher bey der Anwendung dieſer krummen Linie auf die ausübenden Künſte wichtig iſt. Wir werden dieſes zeigen, wenn wir vorher einige Folgerungen aus dem vorigen Satze gezogen haben.

§. 87.

Erſter Zuſatz. Weil (Fig. 70) die Subtangente $OE = \frac{xx - aa}{x}$ (§ 85. N° 2), ſo iſt $OE \times x = (x+a)(x-a)$ oder $x : x+a = x-a : OE$. oder $CE : BE = AE : OE$. als der Subtangente, aus welcher man die Tangente herleitet. Wenn folglich einer von den Punkten H der Hyperbel und ihre Axe oder einer ihrer erſten Diameter gegeben iſt, ſo darf man nur, die Tangente OH zu bekommen, die Ordinate HE an den gegebenen Diameter ziehen (§. 101. Ellypſe). Dadurch wird die Gröſſe CE determinirt, und durch dieſe kann man das übrige finden.

§. 88.

Zweyter Zuſatz. Wenn man den Ausdruk von OC

=

$=\frac{aa}{x}$ (§. 85) annimt und wenn man alsdenn OC von CA ab⸗ziehet, ſo iſt $CA - OC = aa - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x} = AO$. oder $AO \times x = (x - a)\ a$. D raus folgt, daß $x : x - a = a : AO$ oder $CE : AE = CA : AO$. Dieſes be⸗ſtimmt auch den Punkt O der Tangente, wenn ein Punkt der krummen Linie und einer ihrer erſten Diameter gegeben iſt.

§. 89.

Dritter Zuſatz. Man bemerke hier, daß eine Tangente, die an einen Punkt der Hyperbel, der von dem Scheitelpunkt verſchieden iſt, gezogen wird, nothwendig die Axe oder einen ihrer erſten Diameter in einem Punkt zwiſchen dem Centrum der krummen Linie und dem Scheitelpunkt durchſchneide und daß ſie eine Neigung habe, auf der entgegengeſetzten Seite eine von den Aſymptoten zu durchſchneiden. Weil nun beſtän⸗dig $OC = \frac{aa}{x}$ (§ 85) oder weil $CE : CA = CA : OC$, ſo erhellet, daß die Linie CE unaufhörlich wachſen und ge⸗gen CA unendlich groß werden kann, weil CA eine beſtändi⸗ge Gröſſe iſt. Es kann CE z.E. hundert Millionen mal gröſ⸗ſer werden als CA, folglich kann auch CA hundert Millio⸗nenmal gröſſer werden als OC, oder welches einerley iſt, OC kann nur der hundertmillionſte Theil von CA ſeyn. Es wird aber der hundertmillionſte Theil von CA keine merkliche Gröſ⸗ſe ſeyn. Wenn folglich CE ſehr groß in Vergleichung gegen ihren erſten Diameter wird, ſo werden die Punkte O und C gewiſſermaſſen in einander fallen, oder ihre Tangente wird die Axe oder den Diameter beynahe im Centrum durchſchneiden, und folglich iſt die Tangente beynahe nicht von der Aſymptote verſchieden, weil ſie mit dieſer Linie beynahe 2 Punkte gemein⸗ſchaftlich hat. Folglich kann man behaupten, daß die Aſymp⸗tote der Hyperbel, die in einer ſehr groſſen Weite verlängert ſind,

ſind, nach der Empfindung zu urtheilen, die Tangente der krummen Linie werde (*a*).

* §. 90.

(*a*) Wolte man einwenden, daß dieſes alles dem §. 46 widerſpräche, in welchem man bewies, daß die Aſymptoten der Hyperbel, man mögte ſie auch ſo lange verlängern, als man will, niemals dieſe krumme Linie berühren würde, ſo muß man bedenken, daß die Aſymptoten nur alsdenn Tangenten werden, wenn ſie ins unendliche verlängert werden. Da dieſes aber unmöglich iſt, ſo iſt es eben ſo viel, als wenn man ſagte, daß ſie ſich bey einer ſehr groſſen Verlängerung endlich ſo ſehr der Tangente näherten, daß der würkliche Unterſchied zwiſchen ihnen und der Tangente unmerklich und kleiner als jede Gröſſe wird. Dieſes geſchiehet aber nur, wenn ſie unendlich verlängert wird, und dieſes heißt im Grunde nichts anders, als es ſey unmöglich, daß es jemals ſtatt habe. Wenn man alſo um die Gleichheit 2 Gröſſen zu zeigen, ſich dieſes Satzes bedlente: Zwey Gröſſen ſind ſich gleich, wenn ihr Unterſchied kleiner, als jede Gröſſe iſt, ſo muß man wohl Acht haben, ob die Gränze, welcher ſich die Gröſſen beſtändig nähern, unendlich oder endlich ſey. Im lezten Fall iſt würklich eine Gleichheit da, weil nach dem Beweiſe unmöglich ein Unterſchied angegeben werden kann. Anders iſt es aber im erſten Fall. Denn, weil ſie die Gränze erſt in einer unendlichen Weite oder Entfernung erreicht, ſo iſt es eben ſo viel, als wäre gar keine Gränze da. Weil alſo der Punkt der Vergleichung fehlet, ſo findet der Satz nicht weiter ſtatt, und ſich alſo darauf gründen, heißt, ſich einem unfehlbaren Trugſchluß ausſetzen, der uns gewiß auf dieſen offenbahren Widerſpruch führen würde, daß die Aſymptoten der Hyperbel niemals mit dieſer krummen Linie zuſammen ſtoſſen könnten, und daß ſie inzwiſchen ſich dennoch durchſchnitten.

Ich habe mich den Anfängern zu Gefallen hierbey etwas aufgehalten. Sie hätten ein Mißtrauen gegen den Satz faſſen können, daß Gröſſen ſich gleich ſind, wenn bewieſen iſt, daß der Unterſchied zwiſchen ihnen kleiner, als jede angebliche Gröſſe iſt. Ich habe es aber um ſo viel lieber gethan, da ich keinen einzigen Geometer kenne, welcher Achtung genug darauf gehabt hat, daß man dieſen ſcheinbaren Widerſpruch heben müſſe.

* §. 90.

Vierter Zuſatz. Wenn man die Tangente MO nach Gefallen gegen T verlängert (Fig. 78), biß ſie in einem Punkt H mit der 2ten nach Erforderniß verlängerten Axe GCD zuſammen ſtößt und wenn man von dem Punkt M auf dieſe 2te Axe eine Perpendiculairlinie MS ziehet, ſo verhält ſich

S : CG = CG : CH oder $CS \times CH = \overline{CG}^2$.

Beweis. Man ziehe die Ordinate $ME = CS = y$ und behalte die vorige Benennungen der Linien. Man erinnere ſich, daß $OE = \frac{xx - aa}{x}$ und $OC = \frac{aa}{x}$ (§. 85). Betrachten wir nun die ähnlichen Triangel OEM und OCH, ſo verhält ſich OE : EM oder CS = OC : CH. Das heißt, wenn man die analytiſchen Werthe ſubſtituirt $\frac{xx - aa}{x} : y = \frac{aa}{x} : CH$ oder wenn man die Brüche wegnimmt, $xx - aa : y = aa : CH$. Es iſt aber $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ (§. 17). Folglich verhält ſich $\frac{aayy}{bb} : y = aa : CH$, oder wenn man den Bruch aufhebt $aayy : bby = a^2 : CH = \frac{aabby}{aayy} = \frac{bb}{y}$. Folglich iſt $CH \times y = bb$ oder $CH \times CS = \overline{CG}^2$. Hieraus folgt, daß CS : CG = CG : CH. W. z. E. W.

§. 91.

Fünfter Zuſatz. Man richte aus den Endpunkten B und A der erſten Axe AB die Perpendiculairlinien AV und BT auf, und verlängere ſie, biß ſie auf eine Tangente MOT ſtoſſen, ſo iſt das Rechteck AV × BT aus dieſen Perpendicu-

lair-

lairlinien ſo, groß als das Quadrat der halben 2ten Axe $\overline{CG}^2$.

Beweis. Es verhält ſich CE : CA = CA : OC (§. 85) Folglich iſt $CE - CA : CA = CA - OC : OC$, oder $AE : CA = AO : OC$ oder verwechſelt $AE : AO = CA : OC$: Folglich iſt $AE + AO : AO = CA + OC$, oder $BC + OC : OC$. Das heißt, es verhält ſich $OE : AO = OB : OC$ oder $AO : OE = OC : OB$. Es verhält ſich aber wegen der ähnlichen Triangel OAV und OEM, $AO : OE = AV : EM$. Folglich iſt $AV : EM = OC : CB$. Nun geben aber die ähnlichen Triangel OCH und OBT folgendes Verhältniß $OC : OB = CH : BT$. Folglich verhält ſich auch $AV : EM$ oder $CS = CH : BT$. Folglich iſt $AV \times BT = CS \times CH$. Nun iſt $CS \times CH = \overline{CG}^2$ (§. 90). Folglich iſt $AV \times BT = \overline{CG}^2$. W. z. E. W.

§. 92.

Sechſter Zuſatz. Wenn man von den Punkten f und F (§. 29) auf die Tangente MT Perpendiculairlinien FL und fK ziehet, ſo iſt das Product aus dieſen Perpendiculairlinien $fK \times FL$ ſo groß, als das Quadrat von der Helfte der 2ten Axe $= \overline{CG}^2$. Folglich iſt zu beweiſen, daß $fK \times FL = \overline{CG}^2$.

Beweis. 1) Wir behalten immer die nämliche Benennungen und nennen nun noch $CF = Cf = c$, ſo iſt $cc = aa + bb$. (§. 29) $Of = Cf - Oc = c - \frac{aa}{x} = \frac{cx - aa}{x}$; $OF = CF + OC = c + \frac{aa}{x} = \frac{cx + aa}{x}$; $AO = CA - OC = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x}$; $OB = CB + OC = a + \frac{aa}{x} = \frac{ax + aa}{x}$.

2)

2) Jtzt verhält ſich der ähnliche Triangel OAV und OKf wegen Of : OV = fK : AV. (S) und aus den ähnlichen Triangeln OLF und OBT fließt folgendes Verhältniß OF : OT = FL : BT. (T) Wenn man folglich die Glieder dieſer beyden Verhältniſſe S und T der Ordnung nach durch einander multipliciret, ſo verhält ſich $Of \times OF : OV \times OT = fK \times FL : AV \times BT$ (D) Wenn man folglich beweiſet, daß $Of \times OF = OV \times OT$, ſo iſt bewieſen, daß $fK \times FL = AV \times BT = \overline{CG}^2$ (§ 91). Nun iſt aber $Of \times OF = \left(\frac{cx - aa}{x}\right) \times \left(\frac{cx + aa}{x}\right)$ (N° 1) $= \frac{c^2x^2 - a^4}{xx} = \frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx}$ (Wenn man nämlich $aa + bb$ in der Stelle von cc ſetzet). Folglich iſt noch zu beweiſen, daß auch $OV \times OT = \frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx}$.

3) Um dieſes beweiſen zu können, erinnere man ſich anfangs, daß $OE = \frac{xx - aa}{x}$ (§. 85); Folglich $\overline{OE}^2 = \frac{(xx - aa)^2}{xx}$ und wegen des rechtwinklichten Triangels OEM iſt $\overline{OM}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{EM}^2$ oder $OM = \sqrt{\left(\frac{(xx - aa)^2}{xx} + yy\right)}$.
Aus der Aehnlichkeit der Triangel OEM und OAV ſchlieſſen wir folgendes Verhältniß OE : OM = AO : OV oder $\frac{xx - aa}{x} : \sqrt{\left(\frac{(xx - aa)^2}{xx} + yy\right.} = \frac{ax - aa}{x} : OV$. Dividiren wir folglich das erſte und dritte Glied durch $\frac{x - a}{x}$ und verwechſeln die Glieder, ſo verhält ſich $x + a : a = \sqrt{\left(\frac{(xx - aa)^2}{xx} + yy\right)} : OV$ (G).

So iſt wegen der ähnlichen Triangel OEM und OBT, OE:
OM :

$OM = OB : OT$ oder $\frac{xx-aa}{x} : \sqrt{\left(\frac{(xx-aa)^2}{x} + yy\right)}$ $= \frac{ax+aa}{x} : OT$. Dividirt man alſo das erſte und dritte Glied durch $\frac{x+a}{x}$ und verwechſelt ſie alsdenn, ſo iſt $x - a : a = \sqrt{\left(\frac{(xx-aa)^2}{xx} + yy\right)} : OT$. (L) Wenn man folglich die Glieder der beyden Verhältniſſe G und L der Ordnung der Glieder nach durch einander multiplicirt, ſo iſt $xx - aa : aa = \frac{(xx-aa)^2}{xx} + yy : OV \times OT$. Setzet man alſo in dieſem lezten Verhältniß den Werth von $yy = (xx-aa) \times \frac{bb}{aa}$ (§. 23) und multiplicirt alsdenn die mittelſten Glieder durch einander und dividirt dieſes Product alsdenn durchs erſte Glied $xx - aa$, ſo iſt $OV \times OT$

$$= \frac{\frac{(xx-aa)(xx-aa)}{xx} \times aa + (xx-aa) \times \frac{bb}{aa} \times aa}{xx - aa}$$

$$= \frac{a^2x^2 - a^4}{xx} + bb = \frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx}.$$

Dieſer Werth von $OV \times OT$ iſt grade derjenige, den wir (N° 2) für $Of \times OF$ gefunden haben. Folglich iſt $Of \times OF = OV \times OT$. Folglich iſt, vermöge des Verhältniſſes D (N° 2) $fK \times FL = AV \times BT$. Nun iſt aber $AV \times BT = \overline{CG}^2$ (§. 91). Folglich iſt endlich $fK \times FL = \overline{CG}^2$. W. z. E. W.

§. 93.

Zwölfter Zuſatz. Nachdem man aus dem Centrum C (Fig. 70) die Hypothenuſe BD auf die Punkte F und f der Axe der entgegengeſetzten Hyperbeln getragen hat, und wenn man von einem beliebigen Punkt M einer dieſer Hyperbeln

beln die Linien MF und Mf an die Punkte F und f (§. 29) ziehet, und wenn man ferner an den nämlichen Punkt M die Tangente Ml ziehet, ſo behaupte ich, daß der Winkel $fMl = lMF$ oder welches einerley iſt, daß $Mf : MF : fl : lF$ (*).

Beweis. Man gäbe den nämlichen Linien die vorige Benennung, und erinnere ſich, daß im §. 29 bewieſen ward, daß $Mf = \frac{cx + aa}{a}$ und $MF = \frac{cx - aa}{a}$. So verhält ſich alſo $Mf : MF = cx + aa : cx - aa$. Allein, da Cl in Abſicht auf die Tangente Ml das iſt, was OC in Betracht der Tangente OH iſt, ſo iſt (§. 85) $Cl = \frac{aa}{x}$; Folglich iſt $fl = Cf + Cl = C + \frac{aa}{x} = \frac{cx + aa}{x}$; Folglich iſt $fl = \frac{cx + aa}{x}$ und $lF = CF - Cl = c - \frac{aa}{x} = \frac{cx - aa}{x}$; Folglich iſt $lF = \frac{cx - aa}{x}$; Folglich verhält ſich $fl : lF = cx + aa : cx - aa$. Wir haben aber ſo eben bewieſen, daß $Mf : MF = cx + aa : cx - aa$. Folglich verhält ſich $Mf : MF = fl : lF$ und folglich iſt der Winkel $fMl =$ dem Winkel lMf. W. z. E. W.

§. 94.

Wenn man hingegen den Winkel fMF in 2 gleiche Theile theilet, oder wenn der Winkel $fMl = lMF$ iſt, ſo wird die Linie Ml die Tangente in dem Punkt M ſeyn. Und um dieſes zu beweiſen, dürfen wir nur zeigen (§. 83) daß $CP : CB = CB : Cl$ oder, daß $Cl = \frac{aa}{x}$. Denn nach der Vorausſetzung iſt $CP = x$ (Fig. 70).

 Beweis.

(*) Denn da der Winkel $fPM = FRM$, weil er zu beyden Triangeln gehört, ſo ſind unter dieſer Bedingung dieſe Triangel ſich ähnlich. Folglich findet das angegebene Verhältniß ſtatt. B.

Beweis Weil nach der Bedingung der Winkel $fMl = lMF$, ſo verhält ſich $Mf : MF = fl : lF$ (Geom.). Folglich iſt $Mf - MF : MF = fl - lF : lF$ (G). Nun iſt aber $Mf - Mf = 2a$ (§. 31). $MF = \frac{cx - aa}{a}$ (§. 29 N° 2); $fl - lF = Cl + CF - lF = Cl + Cl + lF - lF = Cl + Cl + lF - lF = 2Cl$; Folglich iſt $fl - lF = 2Cl$; und $lF = \frac{cx - aa}{x}$ (§. 93). Wenn man folglich in dem Verhältniß G die Werthe von $Mf - MF$, MF $fl - lF$, die wir itzt eben gefunden haben, ſubſtituirt, ſo verhält ſich $2a : \frac{cx - aa}{a} = 2Cl : \frac{cx - aa}{x}$. Daraus ſchlieſſet man, daß

$$2Cl = \frac{\frac{cx - aa}{x} \times 2a}{\frac{cx - aa}{a}} = \frac{(cx - aa) \times 2a \times a}{(cx - aa) \times x} = \frac{2aa}{x}$$

Folglich iſt $Cl = \frac{aa}{x}$ oder $Cl \times x = aa$. Folglich verhält ſich $x : a = a : Cl$ oder $CP : CB = CB : Cl$ und folglich iſt Ml eine Tangente (§. 83). W. z. E. W.

§. 95.

Erſter Zuſatz. Man verlängere die Linien fM und lM nach Belieben biß zu den Punkten b und a. Da nun der Winkel aMb ſo groß, als ſein Verticalwinkel $fMl = lMf$ (§. 93), ſo folgt, daß der Winkel $aMb = lMF$, das heißt, daß der Einfallswinkel FMl dem Reflexionswinkel bMa gleich ſey. Wenn folglich in dem Punkte F ein leuchtender Körper ſtünde, ſo würden die Lichtſtrahlen FM nach ihrem Auffallen auf die krumme Linie nach den Linien Mb ſo zurückgeworfen werden, daß, wenn ſie von A aus verlängert würden, ſie durch den andern Punkt f gehen würden. Folglich

lich würden ſich alle dieſe reflectirte verlängerte Lichtſtrahlen in dem Punkt f vereinigen, und wenn man hingegen den leuchtenden Körper in f ſetzte, ſo würden alle Strahlen von der erhabenen Seite der krummen Linie ſo zurück geworfen werden, daß dieſe verlängerten reflectirten Linien ſich in dem Brennpunkt F vereinigen würden. Dieſes alles erhellet, wenn man FM von der Seite h verlängert. Deswegen ſind die Punkte f und F Brennpunkte. Dieſes verſprachen wir im §. 36 zu beweiſen.

§. 96.

Zweyter Zuſatz. Man ziehe von einem Punkt M (Fig. 79) einer Hyperbel die Linien MF und Mf nach den Brennpunkten F und f, und theile den Winkel fMF durch die Linie CME in 2 gleiche Theile, ſo iſt dieſe Linie CME an dem Punkt M die Tangente dieſer Hyperbel (§. 94). Aus dem Berührungspunkt M richte man auf dieſer Tangente die Perpendiculairlinie GML auf, und ziehe durch dieſen nämlichen Punkt MT = Mf mit der Axe ABS parallel. Wenn man nun von den Punkten T und f auf GMl die Perpendiculairlinien TG und fG ziehet, ſo verhalten ſich dieſe unter einander, wie ſich die erſte Axe AB zur Entfernung der Brennpunkte Ff verhält. Das heißt, es verhält ſich TL : fG = AB : Ff.

Beweis. 1) Man verlängere fM von der Seite P und ziehe von dem Punkt S auf fP die Perpendiculairlinie SP. Darauf ziehe man FO mit GL parallel, damit Of der Unterſchied zwiſchen Mf und MF ſey. Denn da GL auf CE perpendiculair iſt (Conſtr.), ſo iſt FO es gleichfalls. Weil folglich der Winkel FME = OME (Conſtr.), ſo erhellet, daß MFE = MOE; Folglich MF = MO. Folglich Mf — MF = Mf — MO = Of. Folglich iſt die Differenz zwiſchen Mf nnd MF die Linie Of. Ferner iſt dieſe Linie Of = der erſten Axe AB; Denn Mf — MF = AB. (§. 31). Nun

 iſt

iſt Mf—MF=Of, wie wir oben geſehen haben. Folglich iſt Of=AB. Endlich ziehe man noch MH auf AS perpendiculair.

2) Nach dieſer Vorausſetzung verhält ſich wegen der rechtwinklichten ähnlichen Triangel TML und MSH, TL : MH=MT oder Mf : MS. Wegen der ähnlichen rechtwinklichten Triangel fGM und SPM verhält ſich aber Mf : MS=fG : PS. Folglich iſt Tl : MH=fG : PS oder TL : fG=MH : PS. Es verhält ſich aber auch wegen der ähnlichen rechtwinklichten Triangel fPS und fHM, MH : PS=fM : fS. Folglich auch TL : fG = f*M* : fS ; Weil aber OF mit ML parallel iſt (Conſtr.), ſo verhält ſich auch fM : fS = Of : fT. Folglich auch TL : fG=Of : fF=AB : fF. Denn Of=AB (N° 1). Folglich verhält ſich endlich TL : fG=AB : fF. W. z. E. W.

§. 57.

Man laſſe eine Perpendiculairlinie fG auf die Linie G*M*L fallen. Dieſe Linie ſtehet perpendiculair auf *CM*E, die den Winkel f*M*F, welcher von den 2 Linien Mf und *M*F, die aus einem Punkt *M* einer Hyperbel in die Brennpunkte F und f gezogen ſind, entſtanden iſt, in 2 gleiche Theile theilet. Man ſuche alsdenn die 4te Proportionallinie TL zu 3 gegebenen fF, AB, fG und man conſtruire an dem Punkt *M* auf der verlängerten Linie G*M* den rechtwinklichten Triangel L*M*T, deſſen Hypothenuſe *M*T=*M*f und deſſen andere Seite =TL iſt (*a*). Nun behaupte ich, daß *M*T mit der Axe ABS parallel ſey.

Beweis.

(*a*) Die Conſtruction dieſes rechtwinklichten Triangels auf die Verlängerung GM iſt ſehr leicht. Denn da die Gröſſe der Hypothenuſe MT=Mf nebſt der Länge der Linie TL (Beding) gegeben iſt, ſo weiß man folglich auch die Länge von ML, worauf man dieſen Triangel conſtruiren ſoll.

Beweis. Vermöge der Conſtruction verhält ſich $TL : fG = AB : fF = OF : fF$ (denn es iſt $Of = AB$ (§. 96)) $= fM : fS$ (weil OF und MS Parallellinien ſind) $= MT : fS$ (weil $MT = fM$ (Beding)). Folglich verhält ſich $TL : fG = MT : fS$ oder $TL : MT = fG : fS$. Folglich ſind die rechtwinklichten Triangel MLT und fGS ſich ähnlich (Geom.); Folglich iſt der Winkel $TML = GSf$. Folglich ſchneidet die Linie GML die Linien MT und AS ſo, daß die Wechſelwinkel ſich gleich ſind. Folglich iſt MT mit AS parallel. W. z. E. W. Wir gebrauchen dieſen Satz.

§. 98.

Dritter Zuſatz. Man ziehe an 2 Punkte einer Hyperbel 2 Tangenten MS und TQ (Fig. 80) und aus dem Brennpunkt F die Perpendiculairlinien FH und FR auf dieſe Tangenten. Nun behaupte ich, daß dieſe Tangenten nach einem geringern Verhältniß unter ſich wachſen, als in dem Verhältniß der Quadratwurzeln der Träger FM und FT, die aus dem Brennpunkt F an die Berührungspunkte M und T gezogen werden, das heißt, FH iſt gröſſer im Verhältniß gegen FR als $\sqrt{FM}$ gegen $\sqrt{FT}$. Folglich iſt zu beweiſen, daß $\frac{FH}{FR} > \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$.

Beweis. 1) Nachdem man aus dem Brennpunkt f der entgegengeſetzten Hyperbel die Linien fM und fT an die Berührungspunkte M und T gezogen hat, ſo iſt der Winkel FMH ſo groß, als der Winkel fMS (§. 93). Und folglich ſind die rechtwinklichten Triangel FHM und fSM ſich ähnlich. Folglich verhält ſich $FM : fM = FH : fS = \frac{FH \times fM}{FM}$ oder $fS \times FH = \frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM}$. Nun iſt $fS \times FH =$

$\overline{CG}^2$ (§. 92); Folglich iſt $\frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM} = \overline{CG}^2$; Folglich iſt

$\overline{FH}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$.

2) Da auch der Winkel $FTR = fTQ$ (§. 93), ſo ſind die rechtwinklichten Triangel FRT und fQT ſich ähnlich; Folglich verhält ſich $FT : fT = FR : fQ = \frac{FR \times fT}{FT}$. Folglich iſt $fQ \times FR = \frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT}$. Es iſt aber $fQ \times FR = \overline{CG}^2$ (§. 92). Folglich iſt $\frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT} = \overline{CG}^2$. Folglich iſt $\overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT}$. Nun iſt $\overline{FH}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$: (N° 1). Folglich verhält ſich $\overline{FH}^2 : \overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM} : \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT} = \frac{FM}{fM} : \frac{FT}{fT}$; Folglich iſt $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} = \frac{\frac{FM}{fM}}{\frac{FT}{fT}} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$. Allein $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} > \frac{FM}{FT}$ denn $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} : \frac{FM}{FT} = \frac{fT}{fM} : 1 = fT : fM$. Nun iſt $fT > fM$. Folglich iſt $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} > \frac{FM}{FT}$ und folglich, weil $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$, ſo iſt auch $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} > \frac{FM}{FT}$. Wenn man folglich die Quadratwurzeln ausziehet, ſo iſt $\frac{FH}{FR} > \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$. W. z. E. W.

§. 99

§. 99.

Vierter Zuſatz. Wenn man in der Hyperbel den undeterminirten 2ten Diameter NS (Fig. 81) mit der Tangente Mr parallel ziehet, ſo durchſchneidet er den Radius Vector FM, der von dem Brennpunkt F der entgegengeſetzten Hyperbel an den Berührungspunkt M gezogen wird, dergeſtalt in dem Punkt O, daß der Theil OM dieſes Radius Vector jederzeit der Helfte CB der erſten Axe gleich iſt. Es iſt alſo zu beweiſen, daß $OM = CB$.

Beweis. Ziehet FT mit Mr parallel und verlängert fM, biß ſie FT berührt. Nun iſt

1) Wegen der Parallellinien FT, NS und Mr (Conſtr.) der Winkel $MTF = rMf = rMF$ (§. 93) $= MFT$, als ſeinem Wechſelwinkel. Folglich iſt $MTF = MFT$. Folglich iſt $MT = MF$.

2) Es verhält ſich $MT : MF = MS : OM$. Nun iſt $MT = MF$ (N° 1); Folglich iſt $MS = OM$ oder $2MS = 2OM$.

3) Es verhält ſich $fS : ST = fC : CF$. Es iſt aber $fC = CF$; Folglich iſt $fS = ST$. Folglich iſt $fS + MS = MF$. Es iſt aber $fS + MS = fM + 2MS$. Folglich $MF = fM + 2MS$; Folglich $MF - fM = 2MS = 2OM$ (2); Nun iſt $MF - fM = AB$ (§. 31) $= 2CB$. Folglich iſt $2OM = 2CB$ oder $OM = CB$. W. z. E. W.

§. 100.

Anmerkung. Dieſes ſind die Haupteigenſchaften, die die Hyperbel oder die entgegengeſetzten Hyperbeln characteriſiren, und die man hauptſächlich in der Anwendung dieſer krummen Linie auf die Kunſt und auf die Theorie der Geſetze der Bewegung gebraucht. Da ich inzwiſchen nichts von den Hyperbeln geſagt habe, die man den entgegengeſetzten Hyperbeln beyzugeſellen pfleget, ſo will ich auch von dieſen einiges anführen. Ich löſe nachfolgende Aufgaben vorher auf. Es haben dieſe Hyperbeln die nämlichen Eigenſchaften, als ihre

ſchafterinnen. Ja, ſie ſind nicht einmal zur Entdeckung der Eigenſchaften der Hyperbeln nöthig. Dieſes iſt auch der Grund, warum ich biß hieher noch nicht davon gehandelt habe. Ich wolte nämlich die Kette von Sätzen nicht unterbrechen.

§. 101.

Aufgabe. Zwo entgegengeſetzte Hyperbeln ſo zu conſtruiren, daß die Entfernung der Brennpunkte F und *f* mit der Zwerchaxe AB in einem gegebenen Verhältniß ſtehe. z. E. wie 3 : 2. (Fig. 82).

Auflöſung. Dieſe Aufgabe kann auf verſchiedene Art aufgelöſet werden. Dieſes iſt die ſimpelſte und meiner Meynung nach die ſicherſte und in der Ausübung die geſchwindeſte.

1) Muß man die Diſtanz F*f* der Brennpunkte ſeiner Abſicht gemäß beſtimmen. Dieſe theile man in 3 gleiche Theile. Darauf trage man die Helfte von einem dieſer Theile aus *f* in A und aus F in B, ſo wird dieſe Diſtanz F*f* nach Verlangen getheilet ſeyn. Denn F*f* = 3, und BF und A*f* = $\frac{1}{2}$ (Conſtr.), ſo wird AB = 2 ſeyn; Folglich verhält ſich F*f* : AB = 3 : 2.

3) Man trage AB auf eine unbeſtimmte Linie A6. Man ſetze einen von den Schenkeln des Cirkels in dem Punkt *f* und öfne ihn etwas weiter, als *f*B. Mit dieſer Oefnung des Cirkels beſchreibe man die Bögen in 1 und 1, ſo wohl aus dem Punkt F für die Hyperbel 5B5, als auch aus dem Punkt F für die entgegengeſetzte Hyperbel 5A5. Darauf trage man dieſe nämliche Oefnung des Cirkels von A in 1 auf die Linie A6. Man nehme auf dieſer Linie die Weite B1. Mit dieſer Linie beſchreibe man aus den Punkten F und *f* Bögen, welche die erſten in 1 und 1 durchſchneiden, u. ſ. w. So werden die Punkte 1 und 1 in den verlangten Hyperbeln ſeyn.

Um mehrere Punkte dieſer Hyperbeln z. E. 2 und 2 zu bekommen, nehme man auf der unbeſtimmten Linie A6 eine Diſtanz

Diſtanz A2. Mit dieſer ziehe man aus den Punkten F und f auf beyden Seiten von fF Bögen in 2. und 2. Darnach nehme man auf der nämlichen Linie A6 die Linie B2 und ziehe aus den Punkten F und f andere Bögen, welche die mit dem Radius A2 gezogenen in 2 und 2 durchſchneiden werden, ſo werden dieſe neuen Punkte 2 und 2 auch in den Hyperbeln 5A5 und 5B5 ſeyn.

Auf dieſe Art werden dieſe alſo conſtruirte krumme Linien, in welchen der Unterſchied der Linien Lf und LF (die durch einen Punkt 1. 2. — — des Umkreiſes dieſer krummen Linien an den Punkten F und f gezogen ſind) beſtändig der Linie AB gleich iſt, nothwendig Hyperbeln ſeyn, deren Brennpunkte F und f ſind, deren erſter Diameter oder Zwerchaxe AB und worin Ff : AB = 3 : 2.

Beweis. Dieſes letztere iſt ſchon N° 1 dieſes §. bewieſen worden. Es iſt alſo nur noch dieſes zu beweiſen, daß die alſo conſtruirten Linien 5B5 und 5A5 würklich Hyperbeln ſind. Man richte HK auf der Mitte C der Linie AB perpendiculair auf und beſchreibe aus dem Scheitelpunkt B mit CF oder Cf Bögen, welche die Linie HK in G und D ſchneiden, damit GD die 2te Axe dieſer krummen Linien ſey (§. 29), wenn ſie anders Hyperbeln ſind.

Es ſey itzt $CF = Cf = BG = BD = c$; $AC = CB = a$; $CD = CG = b$. So iſt wegen der rechtwinklichten Triangel BCD, $bb = cc - aa$. Es ſey auch $LM = y$, $CM = x$, ſo iſt $fM = x + c$ und $FM = x - c$; $AM = a + x$; $BM = a - x$. Folglich $AM \times BM = aa - xx$. Nennen wir ferner $2f$ die Summe der Linien fL und LF, und ihren Unterſchied (Conſtr.) $= AB = 2a$, ſo iſt die größte Linie $fL = f + a$ und die kleinſte $LF = f - a$. Nach

dieſer Vorausſetzung iſt in dem rechtwinklichten Triangel fML, $\overline{fL}^2 = \overline{fM}^2 + \overline{LM}^2$ oder $ff + 2af + aa = xx + 2cx + cc + yy$ (T). Eben ſo iſt in dem rechtwinklichten Triangel FML, $\overline{LF}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{LM}^2$ oder $ff - 2af + aa = xx - 2cx + cc + yy$ (S). Wenn man folglich die Gleichung S von der Gleichung T abziehet, ſo iſt $4af = 4cx$ oder $f = \frac{cx}{a}$. Wenn man folglich dieſen Werth von f in der Gleichung T ſubſtituirt, ſo iſt $\frac{c^2x^2}{aa} + 2cx + aa = xx + 2cx + cc + yy$. Wenn man folglich von beyden Seiten $2cx$ abziehet und durch aa multiplicirt, ſo iſt $c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$. Wenn man folglich die Glieder verſetzt, ſo iſt $c^2x^2 - a^2x^2 = a^2c^2 + a^2y^2 - a^4$ (M) oder $(cc - aa)\,x^2 = (cc - aa \times aa) + a^2y^2$ (M). Es iſt aber, wie wir wiſſen, $cc - aa = bb$. Wenn man folglich in den beyden Helften der Gleichung M, bb in der Stelle von $cc - aa$ ſetzet, ſo iſt $bbxx = aabb + a^2y^2$. Folglich iſt $bbxx - aabb = a^2y^2$, das heißt, $(xx - aa)\,bb = aa \times yy$. Folglich verhält ſich $yy : xx - aa = bb : aa = 4bb : 4aa$ oder $\overline{LM}^2 : BM \times AM = \overline{GD}^2 : \overline{AB}^2$. Dieſes zeiget an, daß das Quadrat der Ordinate LM an der krummen Linie 5B5 ſich zu dem Rechteck aus der Abſciſſe BM und der aufgefangenen Axe AM verhalte, wie das Quadrat der 2ten Axe GD zum Quadrat der Zwerchaxe AB. Dieſes iſt aber vollkommen die Eigenſchaft der Hyperbel, die im §. 15 veſtgeſetzet iſt. Folglich ſind die krumme Linien 5B5 und 5A5 die verlangten Hyperbeln.

§. 102.

Solte man mit den gegebenen Linien AB und GD als den Axen dieſer krummen Linien, Hyperbeln conſtruiren, ſo muß man dieſe Axen rechtwinklicht ſo zuſammen ſetzen, daß ſie einan-

einander in der Mitte durchſchneiden. Darauf muß man die Hypothenuſe BD aus *C* in die Punkte F und *f* tragen. Dadurch werden die Brennpunkte beſtimmt werden (§. 93. 95). Nun darf man in der Conſtruction dieſer krummen Linien nur nach dem §. 101 verfahren.

§. 103.

Aufgabe. Zu einer gegebenen Hyperbel LBT, das Centrum, die Axen, ihre Parameter, ihre Brennpunkte und Aſymptoten zu finden (Fig. 83).

Aufloͤſung. Ziehet nach Belieben in der Hyperbel 2 Paar parallellaufende Sehnen, oder machet LS mit BM und BT mit *ur* parallel. Durch die Mitte 1 und 2 der Sehnen BM, und LS ziehet von einer willkuͤhrlichen Laͤnge eine Linie 2. 1, ſo erhellet aus §. 70 daß dieſe alſo verlaͤngerte Linie 21 nothwendig durch das Centrum dieſer krummen Linie gehen muͤſſe. Macht man die naͤmliche Operation mit den 2 Sehnen *ur* und BT, ſo wird auch die Linie *ao*, welche durch die Mitte dieſer gegen *y* verlaͤngerten Sehnen, auch nothwendig durch das Centrum der Hyperbel gehen. Folglich iſt der Punkt *C*, wo ſich dieſe beyden Linien 21 und *ao* durchſchneiden, das Centrum der krummen Linie.

2) Setzet einen von den Cirkelfuͤſſen in dem Centrum *C* und oͤfnet dieſes Inſtrument ſo weit, daß ihr damit die krumme Linie in 2 Punkten *x* und *y* durchſchneiden koͤnnt. Ziehet den Bogen *xpy*. Wenn ihr nun von dem Punkt C durch die Mitte *p* dieſes Bogens die Linie *CpQ* von beliebiger Laͤnge ziehet, ſo iſt dieſes die geſuchte Axe. Denn, wenn man die Sehne *xy* ziehet, ſo ſtehet jene Linie augenſcheinlich auf *CQ* perpendiculair, und wird durch die Sehne in 2 gleiche Theile getheilet. Es wird alſo die Sehne eine doppelte Ordinate von *CQ* ſeyn (§. 71. 70). Nur die Axe aber hat recht-

rechtwinklichte Ordinaten (§. 73). Folglich wird der Diameter *CQ* die Axe der krummen Linie ſeyn.

3) Iſt die erſte Axe gefunden, ſo bekommt ihr die 2te nach §. 28.

4) Sind die 2 Axen bekannt, ſo findet ihr den Diameter nach §. 33 und die Brennpunkte nach §. 93 und 95.

5) Die Aſymptoten bekommt ihr endlich, wenn ihr die Linie *ht* die an der Spitze B der erſten Axe gezogen iſt, der 2ten Axe GD gleich macht, daß B*h* = B*t* und wenn ihr von dem Centrum *C* durch die Endpunkte *h* und *t* die unbeſtimmte Linien *C*N und *C*K ziehet, ſo ſind dieſes die Aſymptoten der vorgegebenen krummen Linie (§. 42. 47). Es reducirt ſich alſo dieſe Aufgabe darauf, daß man das Centrum uud die erſte Axe der Hyperbel finde, wodurch man alles übrige erhält.

* §. 104.

Aufgabe. Es ſeyn die entgegengeſetzten Hyperbeln HB*x* und *h*A*y* (Fig. 84); AB und GD ihre Axen. Von den Tangenten LBQ und MAN eine jede ſo groß, als GD. Man ziehe LM und QN, ſo bekommt man die Figur LMNQ. Dieſes iſt ein von auſſen um der Hyperbel beſchriebenes Rechteck aus den Axen. Itzt ziehe man durch einen beliebigen Punkt H einer von den Hyperbeln einen erſten Diameter H*Ch*, und nachdem man durch die Punkte L und Q die Aſymptoten *C*R und *C*K (§. 42. 47) gezogen hat, ſo ziehe man H*n* mit *C*K parallel. Man mache *n*P = H*n*, damit, wenn man P*C* verlängert biß *Cp* = P*C*, P*p* alsdenn der 2te oder conjugirte Diameter von dem erſten H*h* ſey (§. 67). Nun ziehe man durch die Punkte *h* und H die Tangenten RHS und V*h*T, wovon eine jede ſo groß iſt, als der 2te Diameter P*p* (§. 64). Ziehen wir nun die Linien RV und ST aus, ſo entſtehet die Figur RSTV, die man das äuſſere Parallogramm aus den 2 conjugirten Diametern H*h* und P*p* nennet. Nun will man wiſſen, was das äuſſere Rechteck LMNQ aus den

Axen

Axen gegen das äuſſere Parallelogram RTSV aus 2 conjugirten Diametern H*h* und P*p* für ein Verhältniß habe?

Auflöſung. Man ziehe BG. So iſt der Triangel B*C*G der 8te Theil des Rechtecks aus den Axen; weil das Quadrat LBCG der 4te Theil davon iſt. Und da BG in O in 2 gleiche Theile durch die Aſymptote *C*R getheilet wird (Bew. §. 54), ſo iſt der Triangel BO*C* die Helfte von B*C*G; Folglich iſt BOC der 16te Theil des Rechtecks aus den Axen. Denn wir haben bemerket, daß B*C*G der achte Theil davon iſt.

Weil auch der Triangel RST die Helfte des äuſſern Parallelogramms aus den conjugirten Diametern iſt, ſo wird R*C*S der 4te Theil davon ſeyn; R*C*H der 8te, weil RH=HS (§. 62) und folglich wird der Triangel *C*H*n* der 16te Theil davon ſeyn; weil R*n*=C*n* (§. 61). Folglich iſt zu zeigen, was der Triangel BOC für ein Verhältriß gegen den Triangel CH*n* habe?

Da aber BO und H*n* mit der Aſymptote CK parallel ſind, (Conſtr.), ſo iſt $Hn \times nC = BO \times OC$ (§. 56). Folglich verhält ſich $nC : CO = BO : Hn$. Ziehet man nun die Perpendiculairlinien *Hb* und B*d* auf *C*R, ſo ſind die Triangel BO*d* und H*nb* ſich augenſcheinlich ähnlich, und es verhält ſich alſo $BO : Hn = Bd : Hb$. Folglich auch $nC : OC = Bd : Hb$. Folglich iſt $nC = Hb = OC \times Bd$ oder $\frac{nC \times Hb}{2} = \frac{OC \times Bd}{2}$, das heißt, der Triangel CH*n*=dem Triangel BO*C*. Und da folglich ein jeder von dieſen Triangeln der 16te Theil von ihrem Parallelogramm iſt, ſo folgt, daß das äuſſere Rechteck aus den Axen der entgegengeſetzten Hyperbeln beſtändig dem äuſſern Parallelogramm aus jeden conjugirten Diametern gleich ſey. W. z. Th. u. z. E. W.

* §. 105.

Aufgabe. Die Fläche der Hyperbel HAP oder die Helfte derſelben HA*l* zu finden (Fig. 83).

Auf-

Aufloͤſung. Da man im ſtrengſten Verſtande noch keine Methode beſitzet, dieſe Aufgabe aufzuloͤſen, ſo bedienet man ſich der Naͤherung. Deswegen ziehe man an den Scheitelpunkt A die Tangente eS, die ſo groß iſt, als die 2te Axe GD dieſer Hyperbel, und ziehe nun die Aſymptote Cb. Itzt ſuche man den Innhalt des Trapez $Aebl$. Wenn man darauf die Linien bH, 22, 77. u. ſ. w mit der Tangente Ae parallel und ſehr nahe an einander ziehet, ſo wird der Raum $AebH$ in verſchiedene Theile $bH22$, 2277 u. ſ. w. die von den kleinen Trapezen nicht merklich unterſchieden ſind, getheilet. Itzt rechne man ein jedes von dieſen Trapezen insbeſondere aus, ſo wird die Summe derſelben faſt gaͤnzlich die Flaͤche des Raums $AebH$ geben. Dieſen gefundenen Raum ziehe man von dem Trapez $Aebl$ ab, ſo wird augenſcheinlich die Flaͤche der halben Hyperbel HAl uͤbrig bleiben. Folglich — — —

§. 106.

Vorbereitungsſatz zur Cubatur der Hyperbel. (Fig. 85). Man beſchreibe 2 concentriſche Cirkel und ziehe den Diameter qV und an dem Punkt g, wo dieſer Diameter den Umkreis des kleinen Cirkels durchſchneidet, richte man die Perpendiculairlinie gS auf und verlaͤngere ſie biß an die Peripherie des groſſen Cirkels, ſo behaupte ich, daß die Krone, oder der zwiſchen den 2 concentriſchen Peripherien eingeſchloſſene Raum einem Cirkel gleich ſey, der mit dem Halbmeſſer gS beſchrieben wird. Es iſt aber gS die mittlere Proportionallinie zwiſchen der Summe qg der Halbmeſſer der concentriſchen Cirkel, und der Differenz Vg der Halbmeſſer.

Beweis. Es ſey $Vm = R$; $gm = r$. So iſt $qg = R + r$ und $Vg = R - r$. Es ſey ferner A die Peripherie des groſſen Cirkels, und a die Peripherie des kleinen. So iſt die Flaͤche des groſſen Cirkels $= \frac{AR}{2}$ und die Flaͤche des kleinen

kleinen $=\frac{ar}{2}$. Nennet man ferner s die Peripherie von dem Radius gS und dieſen Radius ſelbſt y ſo iſt $\frac{sy}{2}$ der Flächen Innhalt dieſes Cirkels. Nach dieſer Vorausſetzung erhellet, daß die Krone ſo groß ſey, als der groſſe Cirkel weniger dem kleinen, oder, daß dieſe Krone $=\frac{AR}{2}-\frac{ar}{2}$. Es iſt alſo zu beweiſen: daß $\frac{AR}{2}-\frac{ar}{2}=\frac{sy}{2}$ oder daß $Ar - ar = sy$.

Man bemerke 1) daß nach der Natur des Cirkels $\overline{gS}^2 = qg \times Vg$ oder $yy=(R+r) \times (R-r)$ $RR-rr$.

2) Daß die Cirkelflächen ſich unter einander verhalten wie die Quadrate ihrer Halbmeſſer. Folglich verhält ſich $\frac{AR}{2} : \frac{ar}{2} = RR : rr$ oder $Ar : ar = RR : rr$. Folglich $AR - ar : ar = RR - rr : rr$. Es iſt aber $RR - rr = yy$. Folglich verhält ſich $AR - ar : ar = yy : rr$. Nun verhalten ſich aber die Quadrate der Halbmeſſer r und y unter einander wie ihre Cirkelflächen oder $yy : rr = \frac{sy}{2} : \frac{ar}{2} = sy : ar$. Folglich $AR - ar : ar = sy : ar$. Da nun $ar = ar$, ſo iſt auch $AR - ar = sy$. W. z. E. W.

*§. 107.

Aufgabe. Den körperlichen Innhalt eines hyperboliſchen Aſterkegels zu finden (Fig. 83)

Aufloſung. Es ſey HAP die beſchreibende Hyperbel des Körpers; Cb und Cd die Aſymptoten; eS die Tangente an dem Scheitelpunkt A dieſer krummen Linie, welche Tangente jederzeit ſo groß iſt als die 2te Axe GD (§. 42). Man bilde ſich itzt ein, nachdem die Axe Al in eine ſehr groſſe Anzahl gleicher Theile getheilet worden, daß man durch die Theilungspunkte mit der Tangente AS Parallellinien gezogen habe,

be, um die äuſſern Parallelogramme von dem Trapez *AldS* und der halben Hyperbel *ACP* zu bekommen. Eben ſo verfuhren wir bey Aufſuchung des Innhalts der Paraboloide und Ellypſoide. Stellen wir uns nun vor, daß dieſe Figur um ihre Axe *Al* ſich drehe, ſo wird das Trapez *AldS* einen abgekürzten Kegel und ein jedes von dieſen äuſſern Parallelogrammen *fm* wird um dieſen abgekürzten Kegel einen Cylinder beſchreiben. Die halbe Hyperbel *AlP* wird einen Hyperboliſchen Afterkegel und ein jedes ihrer äuſſeren Parallelogramme *mn* einen äuſſeren Cylinder von der Hyperboloide. Nun haben wir aber bewieſen (§. 68. 69 der Parabel und 68. 77 der Ellypſe) daß die Summe der äuſſern Cylinder eines abgekürzten Kegels von dem körperlichen Innhalt dieſes Kegels ſelbſt nicht unterſchieden ſey, und daß die Summe der Cylinder, die um eine Hyperbel beſchrieben ſind, für die Hyperbel ſelbſt genommen werden können. Können wir folglich den Unterſchied zwiſchen der Summe der äuſſern Cylinder um den abgekürzten Kegel und zwiſchen den äuſſern Cylindern um der Hyperbel beſtimmen, ſo haben wir augenſcheinlich den Unterſchied zwiſchen dieſen 2 Körpern ſelbſt. Und da man den abgekürzten Kegel ausrechnen kann, ſo haben wir dadurch ein Mittel, den körperlichen Innhalt des paraboliſchen Afterkegels zu finden.

Es ſey folglich G der Cylinder, der durch die Umwälzung des Parallelogramms *fm* erzeugt iſt. P der Cylinder, der durch die Herumdrehung des Parallelogramms *mn* entſtanden iſt. Der Cirkel von dem Radius $mV = S$; der Cirkel vom Halbmeſſer $mg = C$, und der Cirkel von $AS = T$, ſo iſt der Cylinder $G = S \times Am$ und der Cylinder $P = C \times Am$; Folglich $G - P = (S - C)\ Am$ (K). Man bemerke itzt, daß die Halbmeſſer mV und mg die concentriſchen Cirkel S und *C* beſchreiben und daß alſo der Unterſchied $S - C$ dieſer Cirkel, oder die Krone die zwiſchen ihnen iſt, einem Cirkel gleich ſey, deſſen Radius *a* die mittlere Proportionallinie zwiſchen der Summe *gq* und der Differenz *Vg* dieſer Halbmeſſer iſt (§. 106).

106). Es iſt aber die Linie AS dieſer Radius. Denn es iſt (§. 42) $qg \times Vg = \overline{AS}^2$. Folglich verhält ſich qg : AS : AS : Vg. Folglich iſt der Cirkel von AS, oder T = S — C. Setzet man folglich in der Gleichung K den Cirkel T in der Stelle von S—C, ſo iſt G — P = T × Am = dem Cylinder, der durch die Herumwälzung des Parallelogramms mS beſchrieben iſt. Das nämliche findet man in Anſehung eines jeden äuſſern Cylinders des abgekürzten Kegels, wenn man ihn gegen jeden um der Hyperboloide beſchriebenen hält. Folglich iſt der Unterſchied zwiſchen der Summe der um dem abgekürzten Kegel beſchriebenen Cylinder und der Summe der Cylinder T × Am die durch die Herumwälzung des Rechtecks lS erzeugt ſind. Es iſt aber dieſe lezte Summe dem ganzen Cylinder gleich, der durch die Herumwälzung des Rechtecks lS um ſeine Axe AC entſtanden iſt. Folglich iſt der Unterſchied zwiſchen dem abgekürzten Kegel und der Hyperboloide der durch das Rechteck lS erzeugte Cylinder. Man muß alſo, um den körperlichen Innhalt der Hyperboloide zu finden, zuerſt den Innhalt des abgekürzten Kegels beſtimmen, der durch Herumwälzung des Trapezs AldS entſtanden iſt, und davon den Cylinder abziehen, der durch die Herumwälzung des Rechtecks lS um ſeine Axe Al entſtanden iſt.

Conjugirte Hyperbeln.

* §. 108.

Wenn man in der Hyperbel PBT (Fig. 86) eine beliebige Anzahl von Punkten P, M und B — — annimmt und aus dieſen Punkten mit der Aſymptote CL die Linien Pop, Mem, Bfg — — parallel ziehet, und op = Po, em = Me, fg = Bf — — macht, und die nämliche

Operation mit dem andern Arm BT vornimmt und wenn man endlich mit den entgegengeſetzten Hyperbeln xAd in Abſicht der nämlichen Aſymptoten eben ſo verfährt, und endlich durch die Punkte p. m. g — — eine Linie zwiſchen dem Winkel oCl und eine ähnliche Linie innerhalb deſſen Verticalwinkel LCr ziehet, ſo werden dadurch 2 entgegengeſetzte Hyperbeln HGh und pgS entſtehen, die mit den entgegengeſetzten Hyperbeln PBT und xAd, deren Axen AG und Gg ſind, conjugirt ſind. Und dieſe beyden neuen Hyperbeln werden mit den erſtern einerley Aſymptoten und Axen haben, auſſer, daß die erſte Axe der erſtern Hyperbeln bey den conjugirten die 2te Axe wird, und umgekehrt.

Beweis. 1) Vermöge der Conſtruction iſt $em = Me$; Folglich $em \times eC = Me \times eC = Bf \times fC = \overline{Bf}^2$ (§. 54), weil die krumme Linie PBT eine Hyperbel iſt (Beding). Folglich iſt $em \times eC = Bf \times fC$. Nun iſt $Bf = fg$ (Conſtr.); Folglich iſt $em \times eC = fg \times fC = \overline{fg}^2$.

Aus dem nämlichen Grunde iſt $op \times oC = \overline{fg}^2$ — — In dieſem Falle ſind aber die Punkte p. m. g .... in der Hyperbel (§. 55). Folglich iſt die krumme Linie $pmgS$ und ihre entgegengeſetzte Hgh, die nach der Bedingung auf eine gleiche Art in dem entgegengeſetzten Winkel LCr beſchrieben iſt, eine Hyperbel.

2) Weil in der Hyperbel PBT, $Me > Po$ (§. 45) ſo iſt auch in der Hyperbel $pmgS$, $em > op$. Folglich nähern ſich dieſe Hyperbeln je länger je mehr der Linie Co. Folglich iſt die Linie Co eine von den Aſymptoten dieſer Hyperbel und von der Hyperbel BPT (§. 47). Eben ſo beweiſet man auch, daß Cl eine Aſymptote der Hyperbel $pmgS$ ſey.

3) Der Scheitelpunkt einer Hyperbel hat dieſe Eigenſchaft (§. 54), daß eine Linie, die durch dieſen Punkt mit einer der Aſymptoten parallel gezogen und durch die andern

beſtimmt

beſtimmt wird, dem Theil der andern Aſymptote gleich iſt, der zwiſchen der Spitze des Aſymptotenwinkels und dem Berührungspunkt liegt. Es erhellet daraus, da die Linie *fg* dieſe Eigenſchaft hat, daß der äuſſerſte Punkt derſelben *g* der Scheitelpunkt der Hyperbel *pmg*S ſey. Folglich iſt GC*g* die erſte Axe derſelben.

4) Wenn man aus dem Punkt *g* auf dieſe erſte Axe G*Cg* eine Perpendiculairlinie *bga*, die durch die Aſymptote determinirt iſt, aufrichtet, ſo erkennet man ohne Schwierigkeit, da in dem Triangel *yba* die Linie *ba* doppelt ſo groß, als BC iſt, daß ſie ſo groß, als BA ſey. Ferner iſt *bg*=BC =CA=*ga*. Folglich *bg*=*ga*. Folglich iſt *ba* eine Tangente am Scheitelpunkt der Hyperbel, (§. 61. 63). Nun iſt aber die Tangente am Scheitelpunkt der Hyperbel, wenn ſie durch die Aſymptoten determinirt wird, ſo groß, als die 2te Axe dieſer krummen Linie (§. 42. 47). Weil alſo *ba*=BA und die Linie BA durch die Spitze des Aſymptotenwinkels gehet, wo ſie in 2 gleiche Theile getheilet wird, und da ſie perpendiculair auf der erſten Axe GC*g* ſtehet, ſo folgt daraus, daß BA die 2te Axe von der Hyperbel *pmg*S und ihrer entgegengeſetzten *H*G*h* ſey. W. z. E. W.

§. 109.

Anmerkung. Die Hyperbeln *pmg*S und HG*h* heiſſen deswegen conjugirte Hyperbeln von PBT und *x*A*d*, weil dieſe Hyperbeln auf eine gleiche Art ſich gegen einander verhalten, indem durch die Hyperbeln PBT und *x*A*d* die Hyperbeln *pm*GS und HG*h* und jene durch dieſe beſchrieben werden können.

* §. 110.

Erſter Zuſatz. Man ziehe von einem beliebigen Punkt M der Hyperbel MBT einen erſten Diameter MCD, M*em* mit der Aſymptote L*l* parallel, und von einem Punkt *m* einen erſten Diameter *m*C*h* an die conjugirte Hyperbel *pmg*S, ſo

 wird

wird dieſer erſte Diameter MC*h* der 2te conjugirte Diameter MC*d* der Hyperbel MBT ſeyn.

Denn um den conjugirten Diameter von dem Diameter MC*d* zu bekommen (§. 54) muß man von dem Punkt M die Linie M*em* mit der Aſymptote L*l* parallel ziehen; M*e*=*em* machen und MC*h* ſo ziehen, daß C*h*=*m*C. Dieſes iſt aber hier geſchehen, weil M*e*=*em* mit L*l* parallel (Conſtr.) und *m*C=C*h* iſt, weil *mh* einer der erſten Diameter der entgegengeſetzten Hyperbeln *pmg*S und HG*h* iſt.

* §. 111.

Zweyter Zuſatz. Man ſiehet hieraus, daß die conjugirte Hyperbeln *pmg*S und HG*h* durch die Endpunkte aller 2ten Diameter der Hyperbeln PBT und *x*A*d* gehen, und umgekehrt ꝛc.

* §. 112.

Anmerkung. Die Eigenſchaft, die die conjugirte Hyperbeln *pmg*S und HG*h* haben, daß ſie nämlich durch die Endpunkte aller 2ten Diameter der Hyperbeln PBT und *x*A*d* gehen, hat bey einigen Geometern die Vermuthung erreget, ja es giebt ſo gar einige, die es ausdrücklich behaupten, daß die 4 Hyperbeln der 86ten Figur nur 4 Viertheile der nämlichen krummen Linie ſind, oder, daß dieſe 4 Hyperbeln nur eine einzige krumme Linie ausmachen. Sie haben ſich in ihren Gedanken dadurch beſtärket, weil ſie glaubten vorausſetzen zu dürfen, daß dieſe Hyperbel in einer ſehr groſſen Entfernung von ihrem Scheitelpunkt ſich mit ihren Aſymptoten vereinigen würden, ohngeachtet es nach aller Strenge bewieſen iſt, daß dieſe Linien ſich abſolut niemals berühren können (§. 47).

Um ſich zu überzeugen, daß verſchiedene Punkte krummer Linien zu einer und derſelbigen gehören, ſo muß man darauf ſehen, ob ein jeder dieſer Punkte auf einerley Art gegen einer-

einerley Linie gehalten, einerley Gleichung gäbe. Da nun die Punkte der conjugirten Hyperbeln, wenn ſie als perpendiculair gegen die erſte Axe eine Hyperbel betrachtet werden in dem nämlichen Punkt dieſer Axe offenbar nicht diejenige Gleichung, die die Punkte der andern Hyperbel, womit ſie conjugirt iſt, geben; ſo muß man nothwendig ſchlieſſen, daß die conjugirte Hyperbeln nicht Theile oder Viertel von den Hyperbeln ſind, womit ſie conjugirt ſind.

Würden alſo würklich die Aſymptoten der entgegengeſetzten Hyperbeln endlich Tangenten dieſer krummen Linie (die Unmöglichkeit davon iſt aber ſchon gezeiget) ſo würde man doch kein Recht haben, daraus zu ſchlieſſen, daß ſie 4 Viertel der nämlichen krummen Linie wären.

Gebrauch der Hyperbel in der Dioptrick theils bey Verfertigung der Brenngläſer, theils bey Verfertigung der Augengläſer.

* §. 113.

Ich ſetze hier alle die Vorbereitungsſätze der Dioptrick die im §. 110. 111. 112. 113 der Ellypſe erklärt ſind, voraus.

Es ſey folglich in der Hyperbel PBZ (Fig. 87), der Punkt F ihr Brennpunkt; *f* der Brennpunkt der entgegengeſetzten und ihre erſte Axe AB. Dieſe ſtehe mit der Diſtanz der Brennpunkt F*f* in dem Verhältniß der Refraction aus Glas in Luft, das heißt, ungefehr in dem Verhältniß wie 2 : 3 (*a*). Nun behaupte ich, daß alle Lichtſtrahlen TM, die mit der

(*a*) Um entgegengeſetzte Hyperbeln von dieſen Eigenſchaften zu be-

der Axe AB parallel einfallen, und aus Luft in den Glaskörper gehen, der durch die Herumwälzung der Hyperbel PBZ, wovon PZ eine doppelte Ordinate iſt, um ihre Axe entſtanden iſt, ſo werden alle Lichtſtrahlen nach ihrem Herausgehen aus dem Glas bey M von ihrer Richtungslinie MS nach einer Linie Mf gewendet werden, die nach dem Brennpunkt f der ihr entgegengeſetzten Hyperbel gerichtet iſt.

Beweis. Richtet aus dem Punkt M auf der krummen Linie oder ihrer Tangente an dieſem Punkt eine Perpendiculairlinie GL auf. Machet TM=Mf. Beſchreibet aus dem Punkt M ein Stück eines Cirkelbogens fRTQ und aus den Punkten T und f laſſet die Perpendiculairlinien TL und fG auf GL fallen. Aus dieſer Conſtruction erhellet, daß GML die Axe der Refraction iſt, daß TL der Sinus des Neigungswinkels TML iſt, und daß fG der Sinus des Winkels GMf ſey. Zeigt man alſo, daß TL : fG=2:3 (dieſes iſt das Verhältniß des Sinus des Neigungswinkels zu dem Sinus des gebrochenen Winkels, wenn ein Lichtſtrahl aus Glas in Luft geht), ſo hat man bewieſen, daß fG der Sinus

---

bekommen, und worinn der Scheitelpunkt der einen in einer gegebenen Weite, z. E. von 20 Schuh von dem Brennpunkt f der andern, entfernt iſt, muß man dieſe Weite um $\frac{1}{5}$ folglich hier um 4 Schuh vergröſſern. Gibt man alsdenn der Linie Ff24 und theilet ſie in 6 gleiche Theile, deren jedes 4 Schuh hat, ſo muß man 1 von dieſen Theilen aus F in B und aus f in A tragen, ſo bleiben $\frac{4}{6}$ für AB übrig und folglich verhält ſich Ff : AB=$\frac{6}{6}$: $\frac{4}{6}$=6 : 4=3 : 2. Folglich verhält ſich 1) AB : Ff=2 : 3. Wenn man nun dieſe Hyperbeln conſtruirt (§. 101), ſo erhellet, da die Entfernung der Brennpunkte Ff 24 Schuh iſt und BF 4 Schuh hat (Conſtr.), daß BF accurat 20 Schuh haben werde. Dieſe Regel iſt allgemein. Denn wenn man die gegebene Länge um $\frac{1}{5}$ vermehrt, ſo hat ſie $\frac{6}{5}$ oder 1+$\frac{1}{5}$. Wenn man folglich dieſes $\frac{1}{5}$ der Linie FB giebt, ſo hat man ihr den 6ten Theil von $\frac{6}{5}$ gegeben. Folglich bleibt noch $\frac{5}{5}$ oder 1 oder die für Bf gegebene Weite übrig. W. z. E. W.

Sinus des gebrochenen Winkels ſey, und daß alſo der Lichtſtrahl beym Herausgehen aus Glas in dem Punkt M ſich nach der Linie M*f* wenden müſſen, der durch den Brennpunkt *f* gehet.

Nun wird aber 1) der Strahl TM, da er mit der Axe AB parallel iſt, und auf die Fläche PZ perpendiculair fällt, bey ſeinem Durchgehen aus Luft in Glas keine Refraction erleiden. Folglich wird er in M auf die hohle Seite des Glaſes und zwar unter einer ſolchen Richtung fallen, die mit AB parallel iſt. Beym Herausgehen aber aus Glas in Luft, wird er ſeine Direction MS nach den Geſetzen der Strahlenbrechung verändern um ſich von der Perpendiculairlinie GML zu entfernen.

2) Ich behaupte, daß, wenn der Strahl den Weg M*f* nimmt, er genau ſo gebogen ſey, wie er gebogen ſeyn ſolte, damit ſich der Sinus TL des Inclinationswinkels TML zum Sinus *f*G des gebrochenen Winkels GM*f* verhalte $=2:3$. Denn es verhält ſich (§. 96) TL : *f*G $=$ AB : F*f*. Nun iſt aber (Conſtr.) AB : F*f* $= 2 : 3$; Folglich TL : *f*G $= 2 : 3$. Da TL der Sinus des Neigungswinkels iſt, ſo muß *f*G nothwendig der Sinus des gebrochenen Winkels ſeyn, und folglich muß der Winkel GM*f* dieſer gebrochene Winkel ſelbſt ſeyn. Indem nun der Lichtſtrahl TM oder ein jeder anderer Lichtſtrahl die Richtungslinie M*f* nimmt, ſo wird er ſo gebrochen, wie er es nach den Geſetzen der Refraction ſeyn ſoll. Folglich ſuchen ſich alle mit der Axe AB parallellaufende Strahlen nach ihrem Durchgange, durch ein ſolches Glas in dem Brennpunkt *f* zu vereinigen. Man erhält alſo hierdurch ein vortrefliches Brennglas.

§. 114.

Es werden hingegen alle Lichtſtrahlen eines leuchtenden Körpers, der in dem Brennpunkt *f* in der Luft ſtehet, nach ihrem Durchgang durch den Glaskörper PBZ, mit der Axe

 paral-

parallellaufend gemacht. Denn es wird der Lichtſtrahl fM, indem er auf die erhabene Seite des Glaſes PBZ fällt, die Linie MV verlaſſen und ſich der perpendiculairen Linie GML ſolchergeſtalt nähern, daß nach den Geſetzen der Refraction, die ein Strahl, der aus der Luft in Glas fährt, beobachten muß, folgendes Verhältniß entſtehe: $fG : TL = 3 : 2$ oder $TL : fG = 2 : 3$. Es verhält ſich aber auch (Conſtr.) $AB : Ff = 2 : 3$. Folglich verhält ſich $TL : fG = AB : Ff$. Unter dieſen Umſtänden iſt aber der gebrochene Lichtſtrahl MT mit der Axe AB parallel (§. 97).

§. 115.

Erſter Zuſatz. Setzet man hingegen, daß dieſer Lichtſtrahl von der Seite f auf die erhabene Seite der Hyperbel PBZ (Fig. 88) mit der Axe parallel auffalle, ſo behaupte ich, daß, wenn man OT in einer Entfernung von 2 oder 3 Linien von dem Scheitelpunkt B gegen die Axe perpendiculair ziehet, und wenn man die Linien OP und TZ mit dieſer nämlichen Axe parallel ziehet, und wenn man darauf die Figur OPBZT ſich um die Axe Bf drehen läßt, ſo wird daraus ein Körper entſtehen, welcher aus Glas gemacht ſeinen Eigenſchaften nach alle parallel einfallende Lichtſtrahlen nach ihrem Durchgange eine ſolche Richtung geben wird, als wenn ſie aus dem Brennpunkt f der entgegengeſetzten Hyperbel ansliefen.

Beweis. Man ſetze nach der 87ſten Figur daß SM mit Bf parallel ſey und in dem Punkt M aus Glas in Luft übergehe, ſo wird dieſer Strahl nach dem Geſetze der Refraction in dem Punkt M ſeine Richtungslinie MT verändern und ſich von der Perpendiculairlinie ML eben ſo entfernen, als wenn er von T gegen S liefe. Damals machte er aber den Winkel SMf. Wenn er folglich von S gegen T geht, ſo wird er bey ſeinem Uebergehen in die Luft in dem Punkt M einen Winkel TMV machen, der dem Winkel SMf gleich iſt. Es iſt

aber TMf+SMf=2 rechten Winkeln. Folglich iſt TMf +TMV auch ſo groß als 2 rechte Winkel. Folglich iſt MV in derſelbigen Linie mit Mf, welche durch den Brennpunkt f gehet, (Geometr.). Folglich werden die Lichtſtrahlen SM, die auf der erhabenen Seite dieſes hyperboliſchen Glaſes fallen, nachdem ſie durch daſſelbe mit ihrer Axe parallel durchgegangen ſind, bey ihrem Herausfahren in dem Punkt M in die Luft ſo divergirend werden, als wenn ſie aus dem Brennpunkt f kämen. Folglich werden (Fig. 88) die Lichtſtrahlen SM, indem ſie aus der Luft in Glas gehen und bey ihrem Durchgehen in L auf die ebene Fläche OT dieſes Glaſes perpendiculair fallen, keine Brechung leiden. Folglich werden ſie bis in M die nämliche parallele Lage behalten, daſelbſt aber auf die erhabene Seite der Hyperboloide mit der Axe dieſes Körpers parallel fallen, und bey ihrem Uebergange in die Luft, ſo auseinander fahren, als wenn ſie grade aus dem Brennpunkt f herkämen. W. z. E. W.

§. 116.

Zweyter Zuſatz. Wenn folglich ein Auge K (Fig. 89) ſo beſchaffen iſt, daß es zwar den Punkt F vollkommen, nicht aber, wie es bey alten Leuten geſchiehet, den nähern Punkt A erkennet, oder wenn es in einer gewiſſen Weite die Objecte beſſer als in der Nähe ſehen kann, ſo darf man nur, damit es den Punkt A gehörig ſehen könne, zwiſchen dem Auge und dem Punkt A ein Glas PBZL ſetzen, welches von 2 Hyperbeln erzeugt iſt, wovon der Brennpunkt der gegen das Auge gerichteten und der Hyperbel PLZL entgegengeſetzten Hyperbel CDE in dem Punkt F und wo der Brennpunkt der gegen das Object gerichteten Hyperbel in A iſt (a).

Beweis. Die Lichtſtrahlen Ax und Ay, die aus dem

(a) Es iſt im §. 113 gezeigt worden, wie man ſolche Hyperbeln beſchreiben könne.

Brennpunkt A kommen und auf die erhabene Seite der Hyperbel PBZ auffallen, werden bey ihrem Eingange ins Glas mit der Linie FK, in welcher der Bedingung nach die Axen der Hyperbeln liegen, parallel gemacht (§. 114). Folglich werden die gebrochenem Lichtſtrahlen *xs* und *yt* auf die erhabene Seite der Hyperbel PLZ mit ihrer Axe parallel fallen. Sie werden alſo bey ihrem Uebergange aus dieſem Glas in die Luft in den Punkten *s* und *t* ſo divergiren, als wenn ſie alle aus dem Brennpunkt F von der entgegengeſetzten Hyperbel CDE kämen (§. 115). Folglich wird das Auge eine ſolche Lage gegen dieſe Strahlen haben, daß es den Punkt A deutlich ſehen kan. Denn der Punkt fällt ſo ins Auge, als wenn er in F oder in derjenigen Entfernung wäre, in welcher das Auge nach unſerer Vorausſetzung das Object aufs leichteſte erkennen kann. W z. E. W.

§. 117.

Dritter Zuſatz. Wenn hingegen ein Auge K den nähern Punkt A beſſer ſehen kann, den entfernten Punkt F aber nicht ſo deutlich zu erkennen vermag, ſo muß die Hyperbel die der gegen das Auge gewendeten Hyperbel PLZ entgegengeſetzt iſt, den Punkt A zum Brennpunkt haben und der Punkt F muß der Brennpunkt derjenigen Hyperbel ſeyn, die der beſchreibenden Hyperbel PBZ entgegen geſetzet und gegen das Object gerichtet iſt (*a*). So wird das Glas PBZL die aus F kommende Strahlen ſo determiniren, daß ſie dergeſtalt ins Auge K treffen, als kämen ſie aus dem nähern Punkt A, wo unſerer Annahme nach das Object liegen muß, wenn es durch das Auge ſehr deutlich geſehen werden ſoll. Folglich würde das Auge vermittelſt eines ſolchen Inſtruments das Vermögen bekommen

(*a*) Ob die Figur 89 eigentlich nur zum §. 116 gehört, ſo kann man ſie doch leicht auf den §. 117 anwenden, wenn man annimmt, daß das Objectivglas PBZ das Ocularglas PLZ und das Aug3glas PLZ das Objectivglas PBZ werde.

men, ein Object in einer ſehr weiten Entfernung zu erkennen, welches es ohne dieſes Hülfsmittel nicht konnte.

Beweis. Schlieſſet eben ſo, wie im §. 116. Weil die Strahlen Fx und Fy, die von dem Brennpunkt F derjenigen Hyperbel kommen, die der erzeugenden PBZ entgegengeſetzt iſt, nach ihrem Auffallen auf die erhabene Seite dieſer krummen Linie parallel werden (§. 114), ſo gehen ſie alſo in das Glas nach einer Richtung xs und yt die mit deſſen Axe parallel iſt. Folglich werden ſie auf die erhabene Seite der Hyperbel PLZ parallel fallen, und dadurch bey ihrem Uebergange aus Glas in die Luft ſo aus einander fahren, als wenn ſie aus dem Brennpunkt A derjenigen Hyperbel kämen, die der erzeugenden entgegengeſezt iſt (§. 115). Folglich werden die Strahlen, die ins Auge fallen, als kämen ſie aus dem Punkt A, daſſelbe in der Lage finden, daß es den Punkt F deutlich erkennen kann. Denn es iſt in dieſem Betracht kein Unterſchied zwiſchen dem Punkt A und F. Es bleibt nämlich einmal vorausgeſetzt, daß das Licht durch die Entfernung nicht zu ſehr geſchwächt ſey. W. z. E. W.

Wichtige Bemerkung in Anſehung der Anwendung dieſer Theorie auf die Ausübung.

Dennoch hat die Gewohnheit die Augengläſer ſphaeriſch zu ſchleifen in der Ausübung ohne Zweifel deswegen den Vorzug behalten, weil deren Verfertigung viel leichter iſt. Es wäre daher ſehr zu wünſchen, daß, da die Künſtler von Profeßion nicht ſo leicht Gelehrte werden können, die Gelehrten ſich bemühen mögten Künſtler zu werden. Es würde alsdenn die Vollkommenheit der Künſte und des Genies, den theoretiſchen Entdeckungen, die gleichſam das Licht derſelben

ſind,

ſind, auf dem Fuſſe nachfolgen. Wie viel hat die Uhrmacherkunſt dem vortreflichen Geometer dem Hygens zu danken. Aber waren ſeine Hände nicht eben ſo geſchickt und fleiſſig, als ſein Verſtand ſinnreich? Zur Zeit des Cartes, oder um das Jahr 1627. 28. lebte Mydorge ſein Freund, der ein ſehr guter Mathematicker war und der eine ſo feine und delicate Hand als feinen und ſcharfen Verſtand beſaß. Dieſer zeichnete die mathematiſchen Figuren, die ihm zum Muſter dienen ſolten, ſelbſt, und ließ paraboliſche, hyperboliſche, ovale und ellyptiſche Gläſer mit gutem Erfolg verfertigen.

Dieſes ermunterte den Cartes und in kurzer Zeit war er ſelbſt ein groſſer Meiſter im Glasſchleiffen; und da er überzeugt war, daß der Fleiß des Mathematickers öfters durch Verſehen des Künſtlers, deſſen Geſchicklichkeit nicht allemal ſo groß, iſt als der Verſtand des Mannes, der ihm Arbeiten giebt, ohne Nutzen bleibt, ſo gab er ſich inſonderheit Mühe die Hand einiger der erfahrenſten und zu dieſer Arbeit geſchickteſten Dreher zu bilden. Er war vorzüglich ſo glücklich einen ſolchen gewünſchten Mann im Ferrier, der mathematiſche Inſtrumente zu Paris verfertigte, zu finden. Dieſer Künſtler war kein ſimpler Handwerker, der nur ſeine Hände bewegen konnte. Er beſaß auch die Theorie ſeiner Profeſſion und verſtand die Optick und Mathematick ſo gut als ein Profeſſor des Königl. Collegiums. Er war ſogar in den übrigen Theilen der Mathematick nicht unerfahren. Eines von den vortreflichſten Stücken, welche Cartes durch ihn verfertigen ließ, war ein neuerfundenes Fernglaß, welches aus Hyperboliſchen Gläſern beſtand, dergleichen man nie geſehen hatte. Herr de Ville-Breſſieux, welcher es geſehen hat und in der Werkſtätte ſelbſt gegenwärtig war, verſichert, daß dadurch die Blätter der Bäume auf 3 Stunden weit deutlich erkannt worden wären.

Allein Cartes hielte bey dem erſten Anfange und bey der erſten Grundlage einer ganz neuen Kunſt ſeine Gegenwart für

durch.

durchaus nothwendig, um die Hände des Künſtlers im Schleifen zu regieren und ihm von Zeit zu Zeit, ſo wie er weiter in der Kunſt kam oder etwa fehlte neuen Unterricht zu ertheilen. Deswegen konnte er den Bemühungen ſeiner Freunde, die ſie ihm in den Jahren 1637. 38 bey dem Kardinal Richelieu in Anſehung ſeiner ſchönen dioptriſchen Erfindungen widmeten, unmöglich ſeinen Beyfall ſchenken.

Man war ſo glücklich geweſen, dem Kardinal einen Geſchmack an dem Vorſchlage beyzubringen, Gläſer nach den vom Cartes in ſeiner Dioptrick gegebenen Regeln verfertigen zu laſſen. Dieſe Nachricht erfuhr der franzöſiſche Philoſoph, da er noch in Holland war. Er ſchrieb an ſeine Freunde in Paris um ihnen für ihre freundſchaftliche Dienſte zu danken. Doch zeigte er ihnen ſogleich, wie weit die Ausführung dieſes Projects noch entfernet ſey. Er beſorgte, man mögte in ſeiner Abweſenheit nicht glücklich darin ſeyn und es mögten hernach ihm die Fehler der Arbeiter beygemeſſen werden (*a*).

Die Sache gieng ſo, wie Cartes ſie voraus geſehen hatte. Und man ſahe gegen das Ende ſeines Lebens ihn nicht weiter mit dem Glasſchleifen ſich beſchäftigen. Ja man ſcheint ſelbſt bis auf unſre Zeiten keine anſehnliche Verſuche gemacht zu haben, durch Grundſätze die Kunſt zur Vollkommenheit zu bringen, ohngeachtet man von einer ſo ſtreng bewieſenen Theorie allen glücklichen Fortgang erwarten konnte. Würklich finde ich in dem *Mercur de france* vom Monat September 1749, daß ein Engländer ſehr glücklich die carteſianiſche Anweiſung zur Verfertigung der Ferngläſer in Ausübung gebracht habe. Es iſt dieſes ein Stück aus einem Briefe an Herrn Folkes Präſidenten der Königlichen Societät zu Londen. So heißt es daſelbſt: Herr Short, Mitglied der Königlichen Geſellſchaft zu Londen ſetzte im Jahr 1747 in dem Garten des Pallaſts von Malborough ein 12 Schuh langes reflectirendes Tele-

(*a*) Man ſehe hierüber das Leben des Cartes vom Baillet.

Teleſkop, deſſen Spiegel von Metall war. Dieſes übertraf durch ſeine Würkung alles, was man jemals in dieſer Art geſehen hatte. Es verdient hauptſächlich alle Aufmerkſamkeit, daß Herr Short dem groſſen Spiegel eine paraboliſche Figur und dem kleinen eine ellyptiſche Geſtalt gab, wenn er den groſſen Spiegel nach der Methode des Gregory durchbohrte.

Die Verfertigung der Spiegel oder Gläſer nach Kegelſchnitten iſt alſo nicht unmöglich, wie Herr Deſchales und Wolf in ihrer Dioptrick glauben (*), und unſre gröſten Künſt-

(*) Herr von Wolf ſagt nicht, daß ſolche Arten von Gläſer ganz impracticabel ſind, ſondern er hält ihre Verfertigung in dem §. 325 ſeiner lateiniſchen Elemente der Dioptrick nur für etwas ſehr ſchweres. „*Cum difficillimum ſit Lentes iſtiusmodi ſatis exactas parare &c.*“ Dieſes ſind ſeine eigenen Worte. Wenn ſie aber auch zu erhalten ſind, ſo ziehet er mit Einſtimmung des Newtons und des Deſchals dennoch die ſphaeriſch geſchliffenen Gläſer jenen vor. Und er hat Grund darzu. Denn es iſt zwar wahr, daß die ellyptiſchen und hyperboliſchen Gläſer die Strahlen, die mit ihrer Axe parallel laufen, genauer vereinigen als Gläſer die ſphaeriſche Segmente ſind. Dieſe letzteren behalten aber insgemein den Vorzug, wenn die einfallenden Lichtſtrahlen mit der Axe einen merklichen Winkel machen. Denn die Cirkelkrümme iſt von allen Seiten gleichförmig gebogen, worinn die ellyptiſchen und hyperboliſchen Krümmungen ſehr verſchieden ſind. Doch auſſer dieſem allem macht die neuere Entdeckung der verſchiedenen Brechbarkeit des Lichts, ſie gänzlich unnütz. Dieſe verurſacht eine Haupthinderniß in Anſehung der Deutlichkeit des Objects und die Abweichung, die dadurch entſtehet, iſt ſehr viel gröſſer als diejenige, die von der ſphaeriſchen Figur entſpringt. Wenn man alſo auch den Gläſern eine noch ſo vortheilhafte Geſtalt gäbe, ſo würde die Deutlichkeit dennoch nicht viel gröſſer ſeyn. Vergebens ſuchte demnach Cartes und viele andere Künſtler durch Hülfe ſolcher Gläſer die kleinſten Objecte in den Geſtirnen zu entdecken. Die Vorſehung hat uns einen Vorhang vor unſre Augen gezogen, wodurch wir zwar wie durch einen Flor manches ſchöne nnd prächtige der Natur ablauren können, den wir aber niemals gänzlich vor unſern Augen

Künſtler ſolten ſich billig nach ihrem Muthe und Geſchicklichkeit in dem Beſitze der Ehre ſetzen, die Cartes ehedem für Frankreich auf eine ſo richtige Art erworben hat.

Gebrauch der Hyperbel in der Catoptrick.

§. 118.

Es kann auch der durch die Herumwälzung einer Hyperbel um ihre Axe erzeugte Afterkegel erhaben und hohl zugleich ſeyn (Fig. 90). Man mag aber die hohle oder die erhabene Seite betrachten, ſo findet man, daß er die Lichtſtrahlen, die von ſeiner Oberfläche abſpringen, vereinigen kann.

Beweis. 1) Es werde demnach durch die Hyperbel RR eine convexo-concave Hyperboloide erzeuget, und man ſetze, daß der Lichtſtrahl DR auf die erhabene Seite oder äuſſere hyperboliſche Krümmung nach einer gegen den Brennpunkt F dieſes Afterkegels gerichteten Neigung auffalle, ſo behaupte ich, daß alle dieſe Lichtſtrahlen in dem Brennpunkte f der entgegengeſetzten Hyperbel ſich vereinigen werden. Denn wenn man an einem Punkt R die Tangente M R l ziehet und den Strahl DR nach RF verlängert, ſo iſt nach dem im §. 93 gegebenen Beweiſe der Winkel fRL $=$ lRF. Es iſt aber lRF $=$ DRM. Folglich wird ſich der Lichtſtrahl DR nach der Linie Rf, die nach dem andern Brennpunkt f gehet, reflectiren und folglich werden alle Lichtſtrahlen DR, die auf die erhabene Seite dieſer Hyperbel ſolchergeſtalt auffallen, daß ſie nach dem Brennpunkt F gerichtet ſind, ſich in dem Brennpunkt

---

gen wegreiſſen werden. Ihr Coloſſen im Saturn und ihr kleinen Caclogallinier im freundſchaftlichen Monde, ſeyd immerhin ruhig; wir werden eure Wohnungen nicht entdecken, und unſer vorwitziges Auge wird eure Beſchäftigungen nicht ausſpühren; Es ſey denn, daß man unter der Begleitung eines Kindermanns euch perſönlich die Viſite mache. B.

punkt *f* der entgegengeſezten Hyperboloide vereinigen. Nimmt man dieſen letztern Körper weg, ſo hat man einen Punkt *f* in der Luft, in welchem die Strahlen DR ſich vereinigen können.

2) Man ſetze itzt, daß die Strahlen PR, die gegen den Brennpunkt *f* gerichtet ſind, auf die hohle oder innere Fläche der Hyperbel fallen, ſo werden die reflectirten Strahlen PR ſich insgeſammt in dem Brennpunkt F des Afterkegels RR vereinigen. Denn, wenn man wie vorhin die Tangente MR*l*, die Linie RF und das Verlängerungsſtück R*f* des Lichtſtrahls PR ausziehet, ſo iſt leicht zu erkennen, daß der Winkel PRM $= fRl = lRF$ ſey (§. 93); Folglich iſt PRM $= l$RF. Folglich wird ſich der Lichtſtrahl PR nach dem Brennpunkt F reflectiren. Eben dieſes gilt von allen übrigen. W. z. E. W.

Gebrauch der Hyperbel bey der Triſection des Winkels.

* §. 119.

Vorbereitungs-Aufgabe. Man ſoll aus 2 für die Aſymptoten gegebenen Linien BA und BC und einem Punkt D dieſe krumme Linie conſtruiren (Fig. 91).

Auflöſung. Ziehet durch den Punkt D zwiſchen den Schenkeln des Winkels AB*C*, eine groſſe Anzahl grader Linien ADM, FDN und GD*C*, u. ſ. w. Machet ML $=$ AD; NO $=$ FD; *C*R $=$ GD u. ſ. w.; ſo ſind die Punkte L. O. R. u. ſ. w. in einer Hyperbel, welche die Linien BA und BC zu Aſymptoten hat.

Beweis. 1) Daß dieſe krumme Linie eine Hyperbel ſey erhellet aus §. 59.

2) Wenn man auf BA eine perpendiculaire Linie D*H* ziehet,

ziehet, ſo ſiehet man, daß $AD > FD$ und $FD > GD$ ſey. Weil folglich (Conſtr.) $ML = AD$, und $FD = NO$ und $GD = CR$ iſt, ſo iſt $ML > NO$ und $NO > CR$. u. ſ. w. So wie ſich demnach die Punkte L, O und R von dem Scheitel-Punkt B entfernen, ſo nähern ſie ſich beſtändig der graden Linie BC, und zwar um ſo viel mehr, als die Winkel M,N,C u. ſ. w. immer kleiner werden. Es wird daher kein Punkt dieſer krummen Linie mit der graden Linie BC zuſammen fallen. Denn, welche Neigung auch die Linie DGC hat, ſo iſt doch der Punkt R derſelben allemal unterwärts der Linie BC (Conſtr.); folglich iſt BC eine Aſymptote von den Arme KLOR (§. 47); und wenn man an einem beliebigen Punkt L dieſes Arms die nämliche Conſtruction vornimt, wie bey D, ſo bekommt man den andern Arm KDS dieſer krummen Linie, deren Aſymptote BA iſt. Es läßt ſich dieſes eben ſo, wie von BC beweiſen. Folglich u. ſ. w. W. z. E. W.

* §. 120.

Aufgabe. Es ſey jetzt (Fig. 92) der gegebene Winkel CO*b* in 3 gleiche Theil zu theilen.

Auflöſung. Man beſchreibe zuerſt aus dem Punkt O mit dem Radius OC oder O*b* einen Cirkel, damit man den Bogen *b*AC, als das Maaß des gegebenen Winkels bekomme. Man ziehe die Sehne *b*C dieſes Bogens, deren Länge bekannt iſt, und den Radius ODA auf B*c* Perpendiculair. Dieſen Radius verlängere man nach L und mache $OD = \frac{OD}{2}$. Man richte auf LA die Perpendiculairlinie $LM = \frac{DC}{2}$ oder $\frac{Db}{2}$ auf. Darauf ziehe man mit LA die Linie MV parallel. Dieſe theilet DC in G in 2 gleiche Theile. Denn es iſt $DG = LM$ und $LM = \frac{DC}{2}$ (Conſtr.) Man beſchreibe durch den gegebenen Punkt O die Hyperbel OTZ, deren

Aſymptoten die grade Linien ML und MV ſind (§. 119), ſo wird dieſe Hyperbel den Bogen bAC nothwendig in einem Punkt T durchſchneiden; denn es iſt dieſe krumme Linie (auch ins unendliche verlängert) beſtändig in dem Aſymptoten Winkel LMV eingeſchloſſen (§. 47). Ziehet man jetzt aus der Spitze O des gegebenen Winkels den Radius OT, ſo iſt der Winkel COT der dritte Theil des gegebenen Winkels COb.

Beweis. Machet DI=DS und ziehet den Radius OIQ; ſo iſt augenſcheinlich $bOQ=COT$. Es iſt alſo noch zu erweiſen, daß der Winkel TOQ=COT. Nun iſt aber

1) Die Sehne TQ mit bC parallel und folglich in dem Punkt N durch ODA, die auf bC Perpendiculair ſtehet, in 2 gleiche Theile getheilet;

2) Ziehet itzt durch den Durchſchnitts Punkt T die Linie TK mit der Aſymptote MV, und durch den Scheitelpunkt O den Diameter HB mit der andern Aſymptote ML parallel, ſo iſt $OL\times LM=TK\times KM$. (§. 56) $=TP+PK$ oder $(TP+OL)\times Pd$ (weil $PK=OL$ und $KM=Pd$) $=Od\times OL$ (§. 56) $=(OP+Pd)\times QL$; Folglich iſt $(TP+OL)\times Pd$ $=(OP+Pd)\times OL$. Nun iſt $(TP+OL)\times Pd=TP\times Pd$ $+OL+Pd$; und $(OP+Pd)+OL=OP\times OL+Pd\times OL$; Folglich iſt $TP\times Pd=OP\times OL$; Folglich verhält ſich $TP:OP:OL:Pd$. Es ſind aber die Triangel TPO und ODS offenbar ſich ähnlich; Folglich verhält ſich $TP:OP=OD:DS$: Folglich $OL:Pd=OD:DS$. Es iſt aber $OD=2OL$. (Conſtr.); Folglich iſt $DS=2Pd$ oder $2rG$; Folglich iſt Dr $=DS+Sr=2Pd+Sr$. Allein $Dr=TN$ und $TQ=2TN$. (Conſtr.); Folglich iſt $TQ=2Dr$ und weil $Dr=2Pd+Sr$, ſo iſt folglich $TQ=4Pd+2Sr$.

3) Itzt iſt $DG=Dr+rG=Dr+Pd$. Es iſt aber, wie wir eben geſehen haben, $Dr=2Pd+Sr$: Folglich iſt $DG=3Pd+Sr=CG$ (denn $DG=CG$ (Art. 1)). Folglich iſt

CG

CG+rG+Sr oder nach der Conſtruction DG+Pd+Sr=4Pd×2Sr; das heißt, CS=4Pd+2Sr. Es iſt aber (Art. 2) TQ=4Pd+2Sr. Folglich iſt CS=TQ.

4) Allein in den Triangeln OJS und OQT verhält ſich OJ : OQ=JS : TQ oder OJ : OC=JC : CS (weil OC=OQ und CS=TQ (Art. 3)); Folglich iſt der Winkel COJ oder COQ durch die Linie OST in 2 gleiche Theile getheilet (Geometrie); Folglich iſt der Winkel COT=TOQ und da der Winkel COT=bOQ (Nr. 1), ſo ſind alſo die 3 Winkel COT, TOQ und bOQ ſich gleich und folglich iſt der Winkel COB in 3 gleiche Theile getheilet worden. W. z. Th. und z. E. W.

* §. 121.

Gebrauch der Hyperbel bey der Verdoppelung des Würfels. (Fig. 93). Es ſey AB die Seite des gegebenen Würfels und BC doppelt ſo groß, als AB. Nun muß man bekanntermaſſen, um die Seite des geſuchten Würfels zu bekommen, 2 mitlere Proportionallinien zwiſchen AB und BC ſuchen, ſo wird die erſte dieſer 2 Linien die Seite des verlangten Würfels ſeyn; (a).

Aufloͤſung. Man conſtruire aus den 2 Linien AB und BC ein Rechteck und nehme die beyden nach Belieben verlängerten Seiten BA und BC für die Aſymptoten der durch den Punkt D zu beſchreibenden Hyperbel an. Man beſchreibe dieſe krumme Linie (§. 119) und um das Rechteck BD einen Cirkel BSC. Nun wird dieſer Cirkel nothwendig

1) Die Hyperbel in einem andern Punct S durchſchneiden.

(a) Man erinnere ſich an die Anmerkung zum §. 167. der Parabel.

2) Wenn man von dieſem Punct auf BC die Perpendiculairlinie ST fallen läßt, ſo werden die beyden Linien BT und TS die 2 geſuchten mitlern Proportionallinien ſeyn.

Beweis des erſten Theils. Es muß, wie bekannt iſt, der Scheitelpunct der Hyperbel in der Sehne BR ſeyn, welche den Aſymptotenwinkel ABC in 2 gleiche Theile theilet. Er muß ferner der Endpunct der halben erſten Axe dieſer krummen Linie ſeyn (§. 57). Es muß aber dieſe erſte halbe Axe auch nothwendig kleiner, als dieſe Sehne, ſeyn.

Um ſich davon zu überzeugen, ſey dieſe halbe Axe $= A$; $AB = CD = b$; $BC = AD = 2b$. Nun iſt (§. 57) $CD \times BC = 2bb$, die Potenz der Hyperbel und folglich $4bb$ das Zweyfache dieſer Potenz. Folglich iſt die erſte halbe Axe $= \surd(4bb) = 2b$. (§. 57) und folglich $A^2 = 4bb$.

Man ſuche itzt den Werth von $\overline{BR}^2$. Da der Winkel ABO die Helfte eines rechten Winkels iſt (Conſtr.), ſo iſt der Winkel AOB auch die Hälfte; Folglich iſt $AO = AB = b$; Folglich iſt $OD = AD - AO = 2b - b = b$. und $OD^2 = bb$. Da nun der Winkel BRD ein rechter Winkel und der Winkel $ROD = AOB$ iſt, ſo iſt auch der Winkel RDO ſo groß, als die Helfte eines rechten Winkels; Folglich iſt $RD^2 = OR^2$; Folglich iſt $\overline{OD}^2 = 2\overline{RD}^2$ und $\overline{RD}^2 = \overline{OD}^2 = \frac{bb}{2}$; allein $\overline{BR}^2 = \overline{BD}^2 = \overline{RD}^2$ und $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 4bb + bb = 5bb$; Folglich iſt $\overline{BR}^2 = 5\frac{bb}{2} - \frac{bb}{2} = 9bb$.

Nun iſt aber (Nr. 1) $A^2 = 4bb$. Um alſo zu beweiſen, daß $A^2 < \overline{BR}^2$, ſo muß man zeigen, daß $4bb < 9\frac{bb}{2}$

oder

oder daß $8bb < 9bb$. Dieſes iſt aber evident. Folglich iſt $A^2 < \overline{BR}^2$ oder $A < BR$. Folglich iſt die erſte halbe Axe dieſer Hyperbel kleiner als die Sehne BR, auf welcher ſie genommen werden muß. Folglich iſt der Scheitelpunkt dieſer Hyperbel, welcher der Endpunkt dieſer halben Axe iſt, innerhalb dem Cirkel. Weil aber die Hyperbel, die durch D geget, in den Cirkel hinein gehet, ſo muß ſie auch durch einen Punkt S wieder heraus gehen und folglich muß ſie auch den Cirkel in 2 Puncten durchſchneiden. W. D. 1te z. E. W.

Beweis des zweyten Theils. Es iſt folglich nur noch dieſes Verhältniß als richtig zu beweiſen: AB : BT = BT : TS = TS : BC.

Man verbinde deswegen die beyden Punkte D und S durch die Sehne DS mit einander und verlängere ſie auf beyden Seiten biß ſie die Aſymptoten in den Punkten H und L durchſchneidet. Man ziehe die Perpendicularlinie SK und die Sehne BS, ſo iſt, nach den im §. 58. beſtimmten Eigenſchaften der Hyperbel DL = SH : da ſich folglich die Triangel DCL und *H*KS ähnlich ſind, ſo iſt HK = DC = AB und CL = KS = BT. Folglich iſt TL = BC. Hieraus erhellet, daß die Winkel BSL und BSH rechte Winkel ſind und folglich iſt wegen des rechtwinklichten Triangels HSB, *H*K : KS = KS : KB oder TS, das heißt, AB : BT = BT : TS und wegen des rechtwinklichten Triangels BSL verhält ſich BT : TS = TS : TL oder BC. Folglich verhält ſich endlich AB : BT = BT : TS = TS : BC. W. z. E. W.

Zuſatz. Wenn folglich die 2 Linien BF und TS die mitlern Proportionallinien zwiſchen AB und BC ſind, ſo verhält ſich $\overline{AB}^3 : \overline{BT}^3 = AB : BC$ (*a*). Nun iſt BC das Zwey-

(*a*) Man ſehe die Anmerkung zum §. 168 der Parabel B.

Zweyfache von AB (Beding.). Folglich iſt der Würfel von BT das Zweyfache von dem Würfel AB W. z. E. W.

Abhandlung über die Brennſpiegel des Archimeds und Proclus.

§. 122.

Ich habe es biß hieher aufgeſchoben von dieſen bey den Alten ſo berühmten Spiegeln zu reden, deren Würklichkeit von den neuern Gelehrten ſo ſehr geläugnet wird. Die Leſer dieſes Werks ſind ohne Zweifel hierinn die natürlichen Richter. Um aber berechtigt zu ſeyn über dieſe itzt zu beſtimmende Meinung urtheilen zu dürfen, muß man wenigſtens eine allgemeine Erkenntniß von allen vorigen Wahrheiten beſitzen. Die Kegelſchnitte waren zu den Zeiten des Archimeds und Proclus bekannt. Es iſt auch bewieſen worden, daß dieſe ſo wohl durch die Brechung als durch die Zurückwerfung etwas entzünden können. Solten dieſe 2 berühmten Mathematiker ſich derſelben nicht bedienet haben. Wir haben 2 Wege hierüber ein Urtheil zu fällen: Die Hiſtorie und die Geometrie. Durch die Hiſtorie lernen wir, was geſchehen ſeyn ſoll, und durch die Geometrie können wir dieſe Erzählungen ſchätzen.

Tzetzes ſagt ausdrücklich (*a*), Archimedes habe mit einem 6 eckigten Spiegel und verſchiedenen andern kleinen 4 eckigten Spiegeln, Feuer in einige Schiffe von der Flotte des römiſchen Generals Marcellus, der Syrakus in Sicilien

(*a*) Hiſtor. 35. Chilias 2. Allein Plutarch, der mit einer gewiſſen Gefälligkeit die wunderbaren Erfindungen des Archimeds beſchreibt, ſagt in dem Leben des Marcellus kein Wort von dieſen Spiegeln.

cilien belagerte, gebracht, ohngeachtet die Schiffe einen Bogenſchuß oder auf 200 Schritt weit von den Mauren der Stadt entfernt waren. **Diodorus** ſagt, es ſey dieſe Entfernung 3 Stadien geweſen: Und **Cluver** verſichert, daß die Entfernung 3000 Schritt groß ſey. Allein da der Vater **Kircher** im Jahr 1636 durch Syrakus ging, ſo unterſuchte er dieſe Sache mit der größten Sorgfalt und fand, daß die Schriftſteller dieſe Entfernung ſehr vergröſſert hätten.

Ohne auf dieſe Unterſuchung zu gehen, redet die Sache ſchon für ſich ſelbſt. Es iſt aus der Geſchichte bekannt, daß die Schiffe des **Marcellus** ſich ſehr nahe an die Mauren der Stadt machten, die man in den alten Zeiten **Acradine** nennte (*a*), und daß die Wellen des Meers an den Fuß derſelben ſchlugen. Denn **Archimedes** konnte durch eine Art von Krahn, der mit Ketten verſehen war, die Schiffe der Römer in die Luft heben und ſie auf einmal wieder ins Waſſer ſtürzen. Folglich konnten die Schiffe des Marcellus nicht weit von dem Orte, wo Archimed ſeine Maſchinen ſpielen ließ, entfernet ſeyn. Nach einer genauen Abmeſſung fand Kircher dieſe Entfernung nicht weiter, als 30 Schritt oder 150 Schuh, wenn man den geometriſchen Schritt zu 5 Schuh rechnet. (*b*)

Ohngeachtet dieſer Beobachtungen des Vater Kirchers ſind doch noch immer Zweifel wegen der Art von Brennſpiegeln übrig, deren ſich Archimed bey dieſer Gelegenheit habe bedienen können (*c*). Hätte er die Schiffe des **Marcellus**

(*a*) Dieſes war eine von den 4 Städten aus welchen Syrakus beſtand.

(*b*) Kircher p. 875. 876. Art. Magn. Luc. & Vmbr. fol. Rom. 1646.

(*c*) Wir wollen hier die Sache als wahr annehmen, ob man gleich dieſelbe vernünftiger Weiſe laugnen könnte.

durch den Brennpunkt eines paraboliſchen Spiegels angezündet, ſo müßte der Parameter dieſer Parabel 4 mal 150 Schuh oder 600 Schuh groß geweſen ſeyn, weil die Entfernung des Brennpunktes einer Parabel von dem Scheitelpunkt der krummen Linie jederzeit dem 4ten Theil des Parameters gleich iſt. (§. 78. 81. Parabel). Iſt es aber wohl möglich eine ſolche ungeheure krumme Linie oder Fläche durch die Kunſt zu verfertigen? Es ſcheinet nicht, daß die Vertheidiger dieſer Meinung ſehr darauf gezählet haben. Deswegen hat ihre Einbildungskraft andere Verbindungen erfunden, die ſich auf die Eigenſchaften der Parabel gründen und durch welche man ihrer Meinung nach auf eine ungleich weitere Entfernung etwas in Brandt ſtecken könne.

Man erinnere ſich nach Fig. 38 an den §. 160 der Parabel, in welchem man zeigte, daß man einen Brennpunkt in eine brennende Linie von unbeſtimter Länge verwandeln könne. Es ſcheint daher keine Entfernung zu groß, in welcher man nicht durch paraboliſche Spiegeln verbrennliche Sachen anzünden könne. Da wir aber auf dieſen Einwurf in dem angeführten § geantwortet haben, ſo ſiehet man, daß dieſe Ausflucht unbedeutend ſey.

Es ſcheinet folglich nicht, daß Archimed die Schiffe des **Marcellus** mit paraboliſchen Brennſpiegeln habe verbrennen können und man begreift leichtlich, daß die ellyptiſchen und heperboliſchen Spiegel noch weniger zur Hervorbringung dieſes Effects geſchickt ſind.

§. 123.

Laſſet uns itzt unterſuchen, ob dieſes durch hohle ſphäriſche Spiegel geſchehen könne. Man ſetze daß der Bogen oder Abſchnitt SAB von 120 Graden (Fig. 94) durch ſein herumdrehen um ſeine Axe AM einen hohlen ſphäriſchen Spiegel beſchrie-

beſchrieben habe und daß ein Lichtſtrahl QS mit der Axe parallel auf den Endpunkt S dieſes Abſchnitts falle. Ziehet man nur den Radius CS und die Sehne SA und an den Punkt S die Tangente PG, ſo wird offenbar der Winkel $r = x$ ſeyn; denn die Winkel CSP und CSG ſind rechte Winkel, und wenn man nun von dem Winkel CSP den Einfallswinkel QSP und von dem Winkel CSG den Reflexionswinkel ASG = QSP abziehet, ſo iſt der beyderſeitige Ueberreſt $r = x$. Es iſt aber $r = u$, als Wechſelwinkel (Conſtr.) und u iſt = 60 Graden (Conſtr.); Folglich iſt $x = 60$ Grad, folglich iſt auch der Winkel CAS = 60°. Folglich iſt der Triangel CSA gleichſeitig. Folglich wird der Lichtſtrahl QS in eine Linie reflectirt, die die Axe in dem Scheitelpunkt A durchſchneiden wird.

Es ſey itzt ein anderer Lichtſtrahl LD mit der Axe AM parallel, der aber näher an derſelben liegt, als der Lichtſtrahl QS, ſo iſt, wenn man die Linie DC und die reflectiote Linie Df ziehet, der Einfallswinkel h = dem Reflexions Winkel y. Nun iſt aber $h = f$CD als Wechſelwinkel (Conſtr.); Folglich iſt der Winkel fCD = y; Folglich iſt Cf = Df; Folglich wird in dem Triangel CfD, da der Winkel fCD und y nicht 60° haben. (Conſtr.) Der Winkel CfD mehr als 60° haben; Folglich iſt CD > Cf oder Df. Es iſt aber CD = CA; Folglich iſt CA > Cf oder die reflectiote Linie Df ſtößt mit der Axe in den Punkt f unterhalb dem Scheitelpunct A zuſammen.

§. 124.

Zuſatz. Daraus erkennet man ſchon, daß ein hohler ſphäriſcher Brennſpiegel, die Lichtſtrahlen, die mit ſeiner Axe parallel einfallen, nicht in einen Punkt reflectire, und daß alſo eigentlich zu reden, dieſe Art von Spiegel keinen Brennpunkt haben. Dieſes hindert aber nicht, daß ſie nicht die

Kraft haben ſolten zu brennen. Denn die reflectirten Lichtſtrahlen Df nehmen zuſammen einen ſo kleinen Raum auf der Axe ein, daß ſie daſelbſt auſſerordentlich verdicht werden und ſich mit einer ſo großen Stärke bewegen, wodurch ſie verbrennlich Sachen entzünden können. Jedoch man muß die vollkommene Uebereinſtimmung zwiſchen der Theorie und den Verſuchen zeigen.

§. 125.

Wenn das Segment BAS kleiner iſt, als von 120°, ſo werden die reflectirten Lichtſtrahlen jederzeit mit der Axe unterhalb dem Scheitelpunkt A ſo ſich vereinigen, daß keiner von ihnen biß zur Helfte O des Radius komme. Denn es iſt immer $Cf+fD > CD$ oder CA oder $Cf+fA$. Es iſt aber (§ 123) $fD = Cf$. Folglich iſt $Cf > fA$. Folglich gehet der Punkt f nicht biß zur Mitte O des Radius CA.

§. 126.

Je mehr Lichthſtralen inzwiſchen mit der Axe parallel einfallen, und je näher ſie bey der Axe einfallen, um deſtomehr Durchſchnitts Punkte zwiſchen den reflectirten Linien und der Axe ſind in der Nähe des Punkts O. Denn ziehet man den Lichtſtrahl HK mit der Axe AM parallel und ziehet ferner den reflectirten Lichtſtrahl Ki und den Radius CK des Spiegels, ſo iſt, wie vorhin, da der Reflexionswinkel CKi ſo groß, als der Einfallswinkel $CKH = iCK$ iſt, es iſt, ſage ich, $iC = iK$. Man hat hier folglich 2 gleichſchenklichte Triangel CfD und CiK, deren Grundlinien CD und CK ſich gleich ſind. Folglich hat der Triangel Cfd, deſſen Winkel an der Grundlinie CD größer ſind, als die Winkel an der Baſis CK des Triangels CiK (Conſtr.), 2 Seiten Cf und fD, die größer ſind, als die Seiten Ci und iK des Triangels CiK, und folglich iſt $Cf > Ci$. Folglich durchſchneidet der reflectirte Lichtſtrahl Ki die Axe in einem Punkt, der näher bey O liegt als der reflectirte Strahl df.

§. 127.

§. 127.

Man nehme itzt ein Segment von 18° (Fig. 95) z. E. DAS, deſſen Mittelpunkt C iſt, und ſehe, was für einen Theil der Axe alle Durchſchnittspunkte aus den reflectirten Lichtſtrahlen und der Axe, einnehmen können. Es ſey folglich ein Lichtſtrahl LD mit der Axe AC, welche das Segment DAS in dem Punkt A in 2 gleiche Theile theilet, parallel. D*f* ſey der reflectirte Lichtſtrahl und der Punkt O die Mitte von dem Radius CA.

Nun haben wir ſo eben gezeiget (§. 126), daß alle Lichtſtrahlen, die mit der Axe AC parallel laufen, und die das Segment DAS in Punkten berühren, die zwiſchen den Endpunkten D und S dieſes Segments liegen, ſo beſchaffen ſind, daß ſie nach ihrer Reflexion die Axe in Punkten durchſchneiden, die näher bey der Mitte O, als der Punkt *f* ſich befinden, dennoch aber niemals die Helfte ſelbſt erreichen. (§. 121) Folglich ſind alle reflectirte Strahlen in der Axe innerhalb eines Raums befindlich, der ſich von *f* biß gegen C erſtreckt, und kleiner iſt, als *f*O. Es iſt alſo zu beſtimmen, was für ein Theil *f*O von dem Radius CA iſt?

Man laſſe deswegen von dem Punkt *f* auf den Radius CD Perpendiculairlinie *fx* fallen. Da nun C*f*=*f*D (§. 123), ſo fällt *fx* auf die Mitte von CD; Folglich iſt C*x*=*x*D. Nehmen wir itzt in dem rechtwinklichten Triangel C*fx*, *f*C für den Sinus Totus an und beſchreiben aus dem Punkt *f* durch C den Bogen CG, der das Maaß des Winkels C*fx* oder C*f*G iſt, ſo iſt die Perpendiculairlinie C*x* offenbar der Sinus des Winkels C*fx*. Da aber der Winkel C*fx* ein rechter Winkel iſt, und der Winkel *f*C*x* 9 Grade hat (Conſtr.), ſo iſt der Winkel C*fx* ein Winkel von 81° Nimmt man folglich an, daß der Sinus Totus *f*C in 10000000 Theile getheilet iſt, ſo enthält der Sinus C*x* des Winkels C*fx*

von

von 81° nach den Tabellen der Sinus und Tangenten 9876883 ſolcher Theile und folglich CD oder CA doppelt ſo viel, als Cx oder 19753766. Nun iſt $CO = Cx$. Folglich iſt $fC - CO$ oder $fO = fC - Cx = 10000000 - 9876883 = 1223117$; und dieſes zeiget an, daß fO 123117 ſolcher Theile habe, wovon 19753766 auf den Radius CA gehen.

Um alſo das Verhältniß von fO gegen CA zu bekommen, darf man nur 19753766 durch 123117 dividiren, ſo iſt es etwas mehr als 160 oder der Raum fO iſt ein wenig kleiner, als der 160te Theil des Radius CA. Nimmt man folglich dieſen Radius 3 Schuh oder 36 Zoll oder 432 Linien groß an, ſo iſt fO ein wenig kleiner als der 160te Theil von 432 Linien $= 2\frac{7}{10}$ Linie.

Folglich werden alle Lichtſtrahlen, die mit der Axe eines Segments von 18° parallel einfallen, nach ihrer Reflexion auf die Axe einen Raum einnehmen, welcher nicht mehr, als $2\frac{7}{10}$ Linien in der Breite hat. Folglich werden alle Lichtſtrahlen daſelbſt ungemein verdichtet werden, und alſo daſelbſt brennbare Körper anzünden können. Dieſes lehrt auch die Erfahrung.

§. 128.

Dennoch ſcheint es mir nicht möglich zu ſeyn, daß Archimed die Schiffe des Marcellus mit hohlen ſphaeriſchen Spiegeln angezündet habe. Es müßten dieſe Spiegel wenigſtens einen Radius von 300 Schuh gehabt haben. Denn geſetzt es ſey ihre Entfernung von den römiſchen Schiffen 150 Schuh (§. 122); Solte nun der Brennpunkt dieſer Spiegel ſich biß dahin haben erſtrecken können, ſo hätte der Radius dieſer Spiegel wenigſtens doppelt ſo groß als 150' ſeyn müſſen, weil der Brennpunkt vom Scheitelpunkt nicht um die Helfte des Radius entfernt iſt. (§. 125) Allein, wenn man auch nur etwas weniges von der Verfertigung ſolcher Spiegel

weiß,

weiß, ſo ſiehet man leicht, daß die Verfertigung eines Spiegels von 300' im Radius über die menſchliche Geſchicklichkeit ſey.

§. 129.

Ich mögte aber dem ohngeachtet noch nicht läugnen, daß Archimed die Flotte des Marcellus mit Brennſpiegeln habe entzünden können, wenn es anders wahr iſt, daß Proclus ein ähnliches Kunſtſtück 7 oder 800 Jahr nach dem Tode jenes vortreflichen Mathematikers verrichtet habe. Es erzählt aber dieſe Geſchichte in ſehr deutlichen und richtigen Ausdrücken Zonaras. (*a*) Er ſagt, daß Anaſtaſius bey der Belagerung, die er in Conſtantinopel von dem Vitellius erlitt, es vornemlich dem Genie des Proclus zu verdanken gehabt habe, daß Vitellius ſich zurück gezogen habe. Es war dieſer Proclus ein durch ſeine Kenntniſſe in der Philoſophie und Mechanik ſehr berühmter Mann. Er verſtand die Kunſt, metallene Hohlſpiegel ſo zu verfertigen und zu ſtellen, daß er dadurch die Flotte des Vitellius in Brand ſteckte und deſſen Schiffe und Schifleute wie durch den Blitz verbrannte.

§. 130.

Anmerkung. Ich glaube nicht, daß ich von den erhabenen ſphaeriſchen Spiegeln etwas ſagen darf, weil dieſe, anſtatt die Strahlen zu vereinigen, dieſelben zerſtreuen. Es iſt alſo, nach dem, was wir von den Würkungen der Hohlſpiegel ausgeführet haben, nur noch dieſes zu unterſuchen, ob ſich Archimed oder Proclus der Planſpiegel habe bedienen können, um ſolche wunderbare Würkungen hervorzubringen. Der Vater Kircher, ein Mann von Genie und einer ſehr ausgebreiteten Gelehrſamkeit in den verborgenſten Wiſſenſchaften, hat zur Auflöſung dieſer Aufgabe Verſuche angeſtellet; das, was er

(*a*) In dem 3ten Bande ſeiner Geſchichte.

er über dieſe Materie ſaget, iſt ſehr gründlich; und damit man mich keiner Vergröſſerung beſchuldige, ſo führe ich ſeine eigenen Worte an und zeichne die Figuren vor den Augen. Ich nehme dieſes aus dem 8ten und 10ten Buche ſeines groſſen Werks, welches den Tittel hat, *ars magna lucis & umbrae.* Seite 887. 888. Rom 1646. Seine Worte ſelbſt ſind dieſe:

Problema. IV.

Machinam ex ſpeculis planis conſtruere ad centum pedes & ultra urentem, das heißt, eine Maſchine, aus Planſpiegeln zu verfertigen, womit man auf eine Entfernung von mehr als 100 Schuh brennen kann.

Nachdem er angemerket hat, daß wenn man eine groſſe Anzahl reflectirter Lichtſtrahlen durch Planſpiegel auf einen Ort fallen läßt, man daſelbſt einen ſehr hohen Grad der Hitze hervorbringen könne, ſo fährt er alſo fort. *Ego certe hujus rei in quinque ſpeculis experimentum ſumpſi & prima quidem lux a luce directa diuerſum calorem habebat; duplicata lux notabile caloris augmentum jam ſuſcipiebat; triplicata calorem ignis praeferebat; quadruplicata calorem utcumque adhuc tolerabilem praeſtabat; quintuplicata pene intolerabilem. Unde certo & indubitate concluſi, multiplicatis ſpeculis planis & ea ratione collocatis, ut omnia reflexam ſolis lucem in unum ſpatium cogant, futurum, ut non tantum majorem uſtionis effectum, quam quaelibet uſtoria parabolica, hyperbolica, ellyptica praeſtent, ſed in multo majus ſpatium radioſam lucem reflectant; quemadmodum me in quinque ſpeculis ad ſpatium centum & amplius pedum experientia docuit.* Das heißt, ich bezeuge, daß ich mit 5 Spiegeln den Verſuch gemacht und bemerket habe, daß das reflectirte Licht von dem erſten Spiegel, welcher grade gegen das Sonnenlicht gehalten ward, eine

eine von der ſimplen Sonnenhitze unterſchiedene Wärme hatte. Die Hitze vermehrte ſich merklich, wenn ich das reflectirte Licht des 2ten Spiegels damit verband. Nahm ich den dritten Spiegel darzu, ſo näherte ſich die Wärme derjenigen, die man empfindet, wenn man ſich an einem mäßigen Feuer erwärmet. Noch konnte man die Hitze ertragen, wenn man den 4ten Spiegel gebrauchte. Setzte man aber noch das reflectirte Licht von dem 5ten Spiegel hinzu, ſo war ſie nicht mehr auszuſtehen.

Ich ſchlieſſe daraus mit Gewißheit, daß wenn man die Anzahl der Planſpiegel vermehret, und ſie ſo ſetzt, daß ſie in einem und dem nämlichen Raum das auf ſie fallende Sonnenlicht zurück werfen, ſo ſchlieſſe ich, ſage ich, daß ſie nicht nur einen gröſſern Effect, als alle paraboliſche, hyperboliſche und ellyptiſche Spiegel hervorbringen werden, ſondern daß auch dieſe vereinigten und von den Spiegeln reflectirten Lichtſtrahlen einen gröſſern Raum einnehmen werden: Ich bin davon durch 5 Spiegel überzeugt, mit welchen ich eine merkliche Hitze auf einer Entfernung von mehr als 100 Schuh hervorgebracht habe.

Si quis igitur mille. v.gr. ſpecula diſponeret, vt omnia in vnum punctum reflecterent - - - non eſt dubium, quia tanta ſuperficierum lucidarum conſtipatio idem praeſtaret & multo efficacius, quam parabolica conſtipatio prope focum; vt vel hinc machinamentum PROCLI, quo naves byſantinas combuſſiſſe ZONARAS refert, hujusmodi ſpeculorum diſpoſitione effectum omnino credam. Wenn folglich jemand z. E. 1000 Spiegel ſo ſtellte, daß ſie insgeſammt die Sonnenſtrahlen in einem einzigen Punkt verſammleten, ſo iſt nicht zu zweyfeln, daß eine ſo groſſe Verdichtung von leuchtenden Flächen nicht eben den Effect und mit noch mehrere Lebhaftigkeit thun ſolte, als die Vereinigung der Lichtſtrahlen im Brennpunkte oder nahe bey dem Brennpunkt einer

einer Parabel. Deswegen glaube ich ohne alles Bedenken dem Zanaras in dem, was er vom Proclus erzählt, wenn er ſagt, daß dieſer Mathematiker Spiegel von Ertzt ſo künſtlich geſtellet habe, daß er dadurch die Flotte des Vitellius habe anzünden können. Man hat hierzu nur eine der vorigen ähnliche Stellung nöthig.

Sint enim ſpecula plana A, B, C, D, E; Sol G. murus F (Fig. 96); *quae ita diſponantur vt ſolis radii ex ſingulis ſpeculis reflexi coëant in Puncto F: certum eſt, & experientia conſtat, vti lucem, ita calorem in F coactum, quintuplo majorem eſſe & intenſiorem, quam lucem & calorem vnico ſpeculo illuc reflexum; ita vt in F manus vix, ob intenſum calorem, firmari poſſit: ſi itaque quinque ſpecula tantum poſſunt, quid non centum aut mille ſpecula hoc ingenio diſpoſita? Certum eſt calorem tam intenſum fore, vt omnia adurere poſſit & in cineres redigere; Cum Focus hic major ſit, & luce conſtipatior, quam in vllis aliis parabolicis ſpeculis: Rogo hic obnixe catoptricos Mathematicos, vt hujus rei experimentum ſumma diligentia ſuſcipiant & invenient id, quod ſupra quoque inſinuavi, nullum aliud machinamentum catoptricum eſſe, quod & majorem in vrendo vim & in majorem diſtantiam obtineat.* Denn es mögen die Planſpiegel A, B, C, D, E ſeyn. Es ſey die Sonne G, die Mauer F. Und die Spiegel ſeyn ſo geſtellet, daß die Sonnenſtrahlen, die durch jeden Spiegel reflectirt werden, ſich in F vereinigen, ſo wird man durch die Erfahrung finden, daß das Licht und die Wärme nach ihrer Vereinigung 5 mal gröſſer oder ſtärker ſey, als diejenige, die durch einen einzigen Spiegel nach dieſem nämlichen Orte geworfen wird. Der Grad der Hitze iſt ſo ſehr erhöhet, daß man kaum die Hände daſelbſt halten kann.

Weil

Weil folglich 5 Spiegel ſchon eine ſolche Kraft haben, was würde man nicht mit 100 oder 1000 derſelben ausrichten, wenn ſie in einer gehörigen Ordnung geſtellet wären? Es würde gewiß dadurch eine ſo heftige Hitze hervorgebracht werden, daß alle verbrennliche Körper dadurch entzündet und in Aſche verwandelt werden würden. Denn der Brennpunkt dieſer Spiegel iſt groß und die Lichtſtrahlen dichter, als in jedem paraboliſchen Spiegel.

Ich erſuche daher die Mathematiker, die ſich auf die Catoptrick legen, nachdrücklich, mit der größten und möglichſten Genauigkeit und Sorgfalt hierüber Verſuche anzuſtellen. Sie werden alsdenn das finden, was ich ſchon vorhin angeführt habe, nämlich, daß keine andere catoptriſche Maſchine die Körper heftiger und in einer gröſſern Entfernung entzünden könne.

Vor einigen Jahren laß Hr. Büffon, Aufſeher der königlichen Garten und Mitglied der Akademie der Wiſſenſchaften öffentlich eine Abhandlung ab, worinnen dieſe Materie meiner Meinung nach ſehr gelehrt abgehandelt war. Ich glaubte darinn eine Reihe ſo neuer Ausſichten zu bemerken, daß ich nicht bey mir anſtand, derſelben alle die Ehre, die man der erſten Empfindung ſchuldig iſt, beyzulegen. Allein da er ſeine Abhandlung von den Brennſpiegeln noch nicht öffentlich bekannt gemacht hat, (*) und da ich mich nicht unterſtehe,

Gg aus

(*) Dieſe Abhandlung findet man in den Schriften der Akademie der Wiſſenſchaften vom Jahr 1747: Er hat ſich bey Verfertigung dieſer Spiegel des berühmten Hr. Paſſements, der vor wenigen Monaten zu Paris verſtorben iſt, bedienet. Dieſer Brennſpiegel entzündet auf 200 Schuh weit Holz; Zinn wird durch denſelben auf 150 Schuh weit und Bley auf 140 Schuh weit geſchmolzen. In folgenden Schriften wird man von dieſer Materie zu ſeinem Vergnügen und Nutzen einen weitern

aus meinem Gedächtniß etwas davon zu erzählen, ſo unter- drücke ich die Entwickelung, die ich mir vorgenommen hatte, davon zu geben. Dieſes iſt die Erfüllung der Vorherſagung des Vater Kirchers: Es ſind nämlich nicht nur die Brenn- ſpiegel des Archimeds und Proclus möglich, ſondern man kann heut zu Tage Effecte davon ſehen, die wenigſtens eben ſo ſtark ſind, als alles, was man von dieſen berühmten Mathemati- kern erzählet. Die Maſchine des Hrn. v. Büffons, die aus platten Spiegeln zuſammengeſetzet iſt, zündet in einer Entfernung von 200 Schuh. Dieſes haben öffentliche Ver- ſuche gelehrt, die dieſes berühmte Mitglied der Akademie im königlichen Garten angeſtellet hat.

Bemerkungen über die Gleichungen für die Kegelſchnitte.

§. †.

Vor einigen Monaten kamen zu Straßburg drey geometri- ſche Verſuche heraus: Ihr Verfaſſer iſt Hr. Maeſſon ein Mann von guter Geſchicklichkeit und der mit Beyfall Un- terweiſungen in der Mathematick gibt. Man findet in dieſem Werke verſchiedene artige Gedanken und unter andern auch folgende Beobachtungen über die Gleichungen für die

weitern Unterricht finden: Nämlich in Bülfingers Diſſerta- tion *de ſpeculo Archimedis;* in Hr. Geheimenraths von Seg- ners Streitſchriften von dem nämlichen Innhalt. In des Saverien Diction. Math. Artik. *Mirois;* in dem *Dictio- nair Encycloped: Artic. Ardent*, *Miroir per Reflex. &c.* In den Abhandl. der Akad. der Wiſſenſch. zu Paris vom Jahr 1726. Im kleinen hat auch der berühmte Hr. Silberſchlag dieſe Verſuche gemacht. Siehe ſeine kloſter- bergiſch. Verſuche.

die Kegelſchnitte. Ich habe geglaubt, daß ſie ſich nicht übel zu dieſem Werke ſchicken würden, und da ſie nicht viele Seiten einnehmen, ſo erlaube ich mir die Freiheit, ſie aus dem franzöſiſchen Originale einigen von den teutſchen Leſern hier zu überliefern. Wegen des wenigen vom differential und integral Calcul, welches man am Ende dieſer Bemerkungen finden wird, werden auch diejenigen, die dieſe Zeilen nicht verſtehen können, mich nicht unfreundlich anſehen. Ich laſſe itzund den Hrn. Verfaſſer ſelbſt reden. B.

§. † 1.

Ich habe noch keine Abhandlung von Kegelſchnitten geſehen, in welchen man dieſes bewieſen hätte, daß die Gleichungen dieſer 3 krummen Linien in einem arithmetiſchen zuſammenhängenden Verhältniſſe ſtehen. Ohne Zweifel ſind die Geometer dadurch gehindert worden dieſe Eigenſchaft zu entdecken, weil in der Gleichung für die Parabel nur eine beſtändige Linie in der Ellypſe und Hyperbel aber zwo beſtändige Linien vorkommen. Dennoch iſt es gewiß, daß, wenn man die zwo Axen der Ellypſe ſo groß, als die zwo Axen der Hyperbel angenommen und auſſerdem vorausgeſetzt hätte, daß alle 3 krumme Linien, folglich auch die Parabel einerley Parameter hätten; es iſt gewiß, daß man alsdenn auch dieſes würde bemerkt haben, daß die Gleichungen dieſer 3 krummen Linien in einer zuſammenhangenden arithmetiſchen Proportion ſtünden.

Es iſt wahr; dieſes hätte leicht geſchehen können. Allein man ſiehet nicht allemal, was man ſehen könnte. Die wichtigſten Dinge ſind öfters vor unſern Augen, ohne daß wir durch unſer Nachdenken dahin dringen können. Deswegen geſchehen die Entdeckungen ordentlicher Weiſe durch die verwickeltſten Wege, und die Erſinder überlaſſen andern die Sorge, ſie einfacher zu machen. Findet dahero jemand, eine Entdeckung

leicht und folglich nicht von groſſem Werthe, ſo können wir ihm antworten: Ey! warum haben Sie ſie denn nicht ſelbſt erfunden!

§. † 2.

Man nehme itzt die 3 Gleichungen: $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $yy = px$, und $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$. Die erſte derſelben iſt die Gleichung für die Ellypſe, die 2te für die Parabel und die dritte für die Hyperbel. (*) In dieſen Gleichungen bedeutet ſowohl für die Ellypſe als die Hyperbel a die groſſe und b die kleine Axe. Nun nehme man für den Parameter der Parabel eine dritte geometriſche Proportionalgröſſe zu den beyden Axen a und b, ſo iſt $a : b = b : p = \frac{bb}{a}$. Dieſen Werth von p ſetze man in der Gleichung der Parabel

Nach dieſer Veränderung bekommen wir folgendes arithmetiſches zuſammenhängendes Verhältniß $\frac{bb}{aa}(ax - xx) - \frac{bbx}{a} = \frac{bbx}{a} - \frac{bb}{aa}(ax + xx)$. Daß aber dieſe Gröſſen in einem ſolchen Verhältniſſe ſtehen, erhellet daher, weil die Summe der beyden mittelſten Glieder der Summe der beyden äuſſerſten Glieder gleich iſt.

§. † 3.

Nehmen wir itzt in dieſen 3 krummen Linien gleiche Abciſſen, und ſetzen voraus, daß die Ellypſe und Hyperbel einerley Axen haben und daß der Parameter der Hyperbel ſo groß iſt, als der

(*) Man ſehe den §. 12 der Ellypſe, den §. 20. der Parabel und §. 15 der Hyperbel, ſo wird man die Richtigkeit dieſer Gleichungen erkennen. B.

der Parameter der erſten Axe der beyden andern krummen Linien, ſo ſtehen gewiß die Quadrate der correſpondirenden Ordinaten der Ellypſe, Parabel und Hyperbel in einer zuſammenhängenden arithmetiſchen Proportion.

§. † 4.

Man erkennt aus den drey Gleichungen $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $yy = \frac{bbx}{a}$ und $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, daß wenn die Abſciſſen einander gleich ſind, die Ordinate der Hyperbel gröſſer ſey, als die Ordinate der Parabel, und daß dieſe gröſſer ſey, als die Ordinate der Abſciſſe. Auch verhalten ſich dieſe 3 Ordinaten zu einander wie die Quadratwurzeln aus den Gliedern der arithmetiſchen zuſammenhängenden Proportion $\frac{bb}{aa}(ax - xx) - \frac{bbx}{a} = \frac{bbx}{a} - \frac{bb}{a}(ax - xx)$.

Setzet man $b = a$, ſo bekommen wir folgendes Verhältniß: $(ax - xx) - ax = ax - (ax + xx)$. Hier iſt das erſte Glied die Gleichung für den Cirkel, deſſen Diameter a iſt, das 2te und 3te Glied ſind Gleichungen der Parabel und das 4te iſt eine Gleichung für die gleichſeitige Hyperbel, (*) deren beyde Axen der Linie a gleich ſind. Hier ſiehet man deutlicher als vorhin, daß dieſe Gröſſen in einem zuſammenhangendem arithmetiſchen Verhältniſſe ſtehen.

§. † 5.

Von dieſer letzten höchſt einfachen arithmetiſchen zuſammenhangenden Proportion könnte man eine analytiſche Abhandlung für die Kegelſchnitte anfangen, in welcher alle ihre Ei-

(*) Nach §. 14 der Ellypſe und §. 18 der Hyperbel. B.

Eigenſchaften unmittelbar aus ihren Gleichungen gezogen wären. Und da dieſe Gleichungen aus einerley Gröſſen zuſammengeſetzet ſind, ſo würde es auch leicht ſeyn die Formeln für ihre ähnlichen Eigenſchaften, z. E. die Formeln für ihre Tangenten, Secanten, Normal und Subnormallinien mit einander zu vergleichen. Durch dieſe ſehr leichten Vergleichungen würde man Eigenſchaften entdecken können, die man bisher nicht vermuthet hätte.

Vielleicht hält man dieſes für eine ungegründete Behauptung. Wir müſſen daher durch ein frappantes Beyſpiel zeigen, daß man aus den angeführten 3 Gleichungen eine unbekannte und wichtige Wahrheit herleiten könne.

§. † 6.

Man ſetze deswegen folgende Gleichungen: $yy = ax - xx$, $yy = ax$ und $yy = ax + xx$, wovon die erſte für den Cirkel, die 2te für die Parabel und die 3te für die Hyperbel iſt. Die Abſciſſen ſollen in allen von einerley Gröſſe ſeyn. Da nun die letzten Helften dieſer Gleichung eine arithmetiſche zuſammenhangende Proportion ausmachen, ſo ſind auch die erſten Helften dieſer Gleichungen in dem nämlichen Verhältniß. Folglich ſtehen die correſpondirenden Ordinaten in einer zuſammenhangenden arithmethiſchen Proportion, und die Ordinaten verhalten ſich untereinander wie die Quadratwurzeln aus den Gliedern dieſes Verhältniſſes.

§. † 7.

Dieſe ſimpeln und klaren Bemerkungen wären noch nicht von vieler Erheblichkeit. Man muß wichtigere anführen, die den ganzen Werth der angegebenen Vergleichungen zeigen können.

Man

Man erkennt ſehr leicht, daß wenn man in den 3 Groſſen $ax-xx$, ax und $ax+xx$ für x nach und nach die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2. 3. 4. 5 .... ſetzet, man alsdenn die Reihe aller zuſammenhangenden Proportionen haben würde, die die Quadrate der correſpondirenden Ordinaten am Cirkel, an der Parabel und gleichſeitigen Hyperbel mit einander machen.

Nun bilde man ſich ein, daß eine jede von dieſen 3 krummen Linien vollkommen ſich um ihre Abſciſſe als um ihre Axe drehen, ſo werden ſie offenbar drey Körper von einerley Höhe beſchreiben, weil ihre Abſciſſen, als gleich angenommen ſind, und ihre correſpondirende Ordinaten werden correſpondirende Cirkenflächen beſchreiben.

Da ſich aber die Cirkelflächen wie die Quadrate ihrem Halbmeſſer verhalten, ſo verhalten ſich die correſpondirenden Cirkel dieſer 3 Körper unter einander wie die Quadrate der correſpondirenden Ordinaten. Dieſe Quadrate ſind aber in einer zuſammenhängenden arithmetiſchen Proportion, folglich ſind auch die correſpondirenden Cirkel dieſer 3 Körper in einem zuſammenhängenden arithmetiſchen Verhältniß.

Da aber dieſe 3 Körper nach der Bedingung gleiche Höhen haben, ſo ſind ſie nothwendig aus einer gleichen Anzahl correſpondirender cylindriſcher Elemente von gleichen Höhen zuſammengeſetzt. Folglich verhalten ſie ſich zu einander wie ihre cirkelförmigen Grundflächen. Da nun dieſe Cirkelflächen in einer zuſammenhängenden arithmetiſchen Proportion ſtehen, ſo ſtehen auch die cylindriſchen Elemente dieſer 3 Körper in einem ſolchen Verhältniß.

Es iſt aber bekannt, oder man kann ſich leicht davon überzeugen, daß, wenn man die correſpondirende Glieder von einer beliebigen Anzahl von zuſammenhangenden arithmetiſchen

Proportionen zuſammen addirt, daß auch die Summen noch in einem ſolchen Verhältniſſe ſtehen werden. Folglich machet in unſerer arithmetiſchen zuſammenhangenden Proportion $(ax - xx) - ax = ax - (ax + xx)$, die alle arithmetiſche zuſammenhängende Verhältniſſe aller Elemente vorſtellet, die Summe der elementariſchen Theile aller erſten Glieder, den körperlichen Innhalt der Kugel; die Summe aber aller mittleren Glieder gibt den Innhalt der Paraboloide, und die Summe aller dritten Glieder den Innhalt der Hyperboloide. Wir können alſo mit Recht ſchlieſſen, daß die Kugel, die Paraboloide und gleichſeitige Hyperboloide in einem zuſammenhängenden arithmetiſchen Verhältniß ſtehen. Dennoch iſt dieſes immer unter der Bedingung zu verſtehen, wenn ihre Höhen ſich gleich ſind, und wenn in den Gleichungen aller 3 erzeugenden krummen Linien einerley beſtändige Linie iſt.

§. † 8.

Man kann eben ſo beweiſen, daß die Ellypſoide, Paraboloide und Hyperboloide in einem arithmethiſchen zuſammenhangendem Verhältniſſe ſtehen, wenn ſie gleiche Höhen haben und die Gleichungen der krummen Linien, woraus ſie entſtanden ſind, folgende Proportion ausmachen $\frac{bb}{aa}(ax - xx) - \frac{bbx}{a} - \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, oder welches einerley iſt, wenn die Ellypſe und Hyperbel einerley Axen haben und wenn der Parameter der Parabel dem Parameter von jener ihrer erſten Axe gleich iſt.

§. † 9.

Wenn man dieſes Verhältniß dieſer Körper in Zahlen ausdrücken wolte, ſo müßte man die Summen der unendlichen Reihen beſtimmen, die ein jedes Glied in folgender Pro-

portion

portion $\frac{bb}{aa}(ax-xx)-\frac{bbx}{a}-\frac{bb}{aa}(ax+xx)$ man indem in jedem dieſer Glieder für x nach und nach die Reihe der natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4. 5 . . . . ſetzte. Man könnte ſeinen Endzweck auch durch die Integral Rechnung erreichen, welche ein abgekürztes Mittel iſt die Summen unendlicher Reihen zu finden. Wir wollen itzt durch dieſen Weg die geſuchte Proportion beſtimmen.

§. † 10.

Es ſey die generale Formel für die ſämtlichen Elemente eines jeden Körpers $\frac{pyydx}{2r}$ (*). Nimt man itzt für yy deſſen beſondern Werth aus der Gleichung der erzeugenden krummen Linie, ſo bekommt man folgende 3 Differentialgröſſen $\frac{bbp}{2aar}(ax-xx)dx$, $\frac{bbpx}{2ar}dx$, und $\frac{bbp}{2aar}(ax+xx)dx$ oder, welches einerley iſt, folgende $\frac{bbp}{2aar}(axdx-xxdx)$, $\frac{bbpxdx}{2ar}$, und $\frac{bbp}{2aar}(axdx+xxdx)$. Integrirt man dieſe, ſo bekommt man für den Innhalt der 3 Körper nachfolgende Gröſſen $\frac{bbp}{2aar}\left(\frac{axx}{2}-\frac{xxx}{3}\right)$, $\frac{bbpxx}{4ar}$ und $\frac{bbp}{2aar}\left(\frac{axx}{2}+\frac{xxx}{3}\right)$. Wollen wir nun den Innhalt dieſer 3 Körper unter der Vorausſetzung haben, daß eines jeden Höhe der erſten Axe a gleich iſt, ſo muß man in den Integralen für x die Gröſſe a ſetzen. So wird daraus $\frac{bbp}{2aar}\times\frac{aaa}{6}$, $\frac{aabbp}{4ar}$ und $\frac{bbp}{5aar}\times\frac{5aaa}{6}$ oder vielmehr: $\frac{abbp}{12r}$, $\frac{abbp}{4r}$ und $\frac{5abbp}{12r}$. Bringen wir die Mitlere

 von

(*) Man ſehe die *Elem. Analyſ.* Hr. v. Wolfs II Th. §. 197. B.

von dieſen 3 Gröſſen mit den 2 übrigen unter einerley Benennung, das heißt, multipliciren wie deren Zähler und Nenner durch 3, ſo bekommen wir $\frac{abbp}{12r}$, $\frac{3abbp}{12r}$ und $\frac{5abbp}{12r}$. Da dieſe Gröſſen nun einerley Nenner haben, ſo verhalten ſie ſich wie ihre Zähler, die in der arithmetiſchen zuſammenhängenden Proportion 1. 3. 5. . . . . ſtehen. Und da dieſe Integrale den Innhalt der Ellypſoide, Paraboloide und Hyperboloide anzeigen, ſo ſtehet auch der Innhalt dieſer Körper in einem ſolchen Verhältniß.

Von der Ciſſoide.

Nachricht. Die 4 folgenden krummen Linien wurden von den Alten zur Auflöſung der berühmten Aufgaben der Verdoppelung des Würfels und der Dreytheilung des Würfels und der Quadratur des Cirkels erfunden. Wir werden ſie hier auch nur in dieſer Abſicht betrachten. Ihr Nutzen in den Künſten iſt nicht von Wichtigkeit.

§. 1.

Es ſey in der 97ten Figur AOBA ein Cirkel; AB einer ſeiner Diameter; BK eine Tangente von ihm und von beliebiger Länge; A*o*, A*o* . . . . ſo viele Sehnen als man ohne Verwirrung in dem halben Cirkel AOB ziehen kann. Man verlängere dieſe Sehnen, biß ſie mit BK zuſammenſtoſſen. Nimmt man nun auf eine dieſer verlängerten Sehnen ATK die Sehne AO und trägt ſie von K in H und macht das nämliche mit allen übrigen Linien, z. E. ALK, ſo entſtehet dadurch

durch eine Reihe von Punkten AHHCHH, welche die krumme Linie ausmachen, die man Ciſſoide nennet (*a*)

§. 2.

Zuſatz. Aus dieſer Entſtehung derſelben folgt:

1) Daß der äuſſerſte Punkt C im Quadranten AC in der Ciſſoide liege. Denn ziehet man den Diameter CD, ſo iſt dieſer offenbar mit BK parallel und man hat daher folgendes Verhältniß AR : RB=AC : KC. Nun iſt aber RB =AR; Folglich KC=AC; Folglich iſt der Punkt C in der Ciſſoide (§. 1).

2) Daß BK die Aſymptote der krummen Linie ACH ſey. Um dieſes einzuſehen wollen wir nach Belieben zwo Linien ALK und ACK unmittelbar neben einander annehmen, ſo iſt AO=KH. (Conſtr.) und AC=KC (Nr. 1). Es iſt aber AO>AC; Folglich iſt KH>KC. Hätten nun KC und KH eine gleiche Neigung, ſo würde, weil KC<KH iſt, der Punkt C der Ciſſoide näher bey BK ſeyn als der Punkt H in der Linie KLH. Da nun KCA eine noch gröſſere Neigung hat, als KLA, ſo muß ſich die Ciſſoide in dem Punkt C der Linie BK noch viel mehr nähern, als der Punkt H in der Linie KLA. In Anſehung ASK, welche unmittelbar nach ACK kommt, kann man eben ſo beweiſen, daß der Punkt H der krummen Linie in ASK näher bey BK ſey, als der Punkt C. Denn da AO=KH iſt, (Conſtr.) und AC=KC, und weil nun AO<AC iſt, ſo iſt auch KH<KC. Folglich wird aus der vorigen Urſache, H näher bey BK ſeyn, als

(*a*) Dieſe krumme Linie, deren Alter über 1400 Jahr hinausgeht, iſt von der Erfindung des Diocles. Sie wird deswegen gemeiniglich die Ciſſoide des Diocles genennet. Man leſe *Voſſ. de ſcript. Math.*

als der Punkt C ꝛc. So wie ſich alſo die Ciſſoide von ihrem anfange A entfernet, ſo nähert ſie ſich beſtändig der Tangente BK. Nichts deſtoweniger können dieſe Linien niemals zuſammenſtoſſen; weil nämlich alle Linien AK immer mit dem Diameter AB einen Winkel machen müſſen (Conſtr.), ſo kann keiner von den Punkten O mit A zuſammen fallen. Folglich werden die Sehnen AO immer eine gewiſſe Länge behalten; Folglich auch KH. Folglich wird H niemals mit K zuſammenſtoſſen; Folglich iſt BK die Aſymtote der Ciſſoide.

3) Daß alle Linien KO immer den ihnen correſpondirenden Linien AH gleich ſind. z. E. Da KLH=ALO, ſo iſt, wenn man von beyden Seiten OH wegnimmt, auch der Reſt KO=AH.

4) Daß die Linien HO beſtändig durch CD in 2 gleiche Theilie getheilet werden, oder daß z. E. HL=OL. Man erinnere ſich deswegen, daß, da AR=RB, auch AL=KL, oder AH+HL=KO+OL ſey. Es iſt aber AH=KO (Nr. 3); Folglich iſt KL=OL.

* §. 3.

Erſter Hauptſatz. Man ziehe von einem beliebigen Punkt H der Ciſſoide die Linie HM mit BK parallel, und aus dem correſpondirenden Punkt O durch das Centrum R des beſchreibenden Cirkels den Radius OR und verlängere ihn ſo lange, biß er mit HM zuſammenſtößt, ſo behaupte ich, daß der Berührungspunkt M genau in der Peripherie des beſchreibenden Cirkels liege.

Beweis. Da HM mit CD parallel iſt (Conſtr.), ſo verhält ſich OL : HL=OR : RM. Es iſt aber OL=HL (§. 2); Folglich iſt OR=RM; Folglich iſt RM ein Radius. Folglich iſt der Punkt M in der Peripherie des Cirkels. W. z. E. W.

* §. 4.

*§. 4.

Zweyter Hauptſatz. Die 4 Linien BF, FM, FA und FH ſtehen in einem zuſammenhängendem Verhältniß oder BF : FM=FM : FA=FA : FH. Dieſes findet man immer von welchem Punkt H der Ciſſoide man die Parallellinie HM ziehet.

Beweis. Man ziehe die Linien BM und AM und bemerke, daß der Winkel *o*RB=ARM; So iſt auch der Bogen OB=AM; Folglich iſt der Winkel OAB oder *H*AF =ABM; und da auch die Triangel AFH und BFM ſo wohl unter ſich, als auch dem Triangel AFM ähnlich ſind, ſo verhält ſich BF : FM=FM : FA=FA : FH. W. z. E. W.

§. 5.

Gybrauch der Ciſſoide bey der Verdoppelung des Würfels. Wir haben ſchon mehr als einmal erinnert, daß dieſe Aufgabe aufgelöſet ſeyn werde, wenn man zwiſchen 2 gegebenen Linien CR und RT 2 mitlere Proportionallinie finden könnte. Hierzu kann man ſich aber der Ciſſoide bedienen (Fig. 97).

Auflöſung. Mit der gröſten der beyden gegebenen Linien CR beſchreibe man einen Cirkel. Man durchſchneide deſſen Diameter CD perpendiculair durch den Diameter AB. Durch die Helfte dieſes Cirkels beſchreibe man eine Ciſſoide (§. 1), deren Anfang in A ſey. Man trage die kleinſte der gegebenen Linien RT von dem Centrum R in T auf die Linie CR. Man ziehe aus dem Punkt B durch T eine Linie BT, biß ſie die Ciſſoide in einem Punkt H durchſchneidet. Man ziehe von dem Punkt A durch H die Sehne AO. Dieſe wird CR in einem Punkt L durchſchneiden. Es

iſt

iſt alsdenn RL die erſte von den 2 geſuchten mitlern Proportionallinien. Folglich iſt die Aufgabe aufgelößt.

Beweis. Man ziehe HM mit CD parallel, ſo verhält ſich 1) $BF : FM = FM : FA = FA : FH$. (§. 4) Folglich 2) $\overline{BF}^3 : \overline{FM}^3 = BF : FH$ (*) 2) $BF : FM = FA : FH$. Nun verhält ſich aber nach der Conſtruction $FA : FH = AR$ oder $CR : RL$; Folglich $BF : FM = CR : RL$; Folglich $\overline{BF}^3$: 3) $\overline{FM}^3 = \overline{CR}^3 : \overline{RL}^3$. Folglich $\overline{CR}^3 : \overline{RL}^3 = BF : FH$. Es verhält ſich aber $BF : FH = RB$ oder $RC : RT$. (Conſtr.) Folglich $\overline{CR}^3 : \overline{RL}^3 = CR : RT$. (A) Hieraus folgt, daß RL die erſte von den 2 geſuchten mitlern Proportionallinien iſt. Denn wenn man die 2te y nennet, und dieſes Verhältniß anſetzt: $CR : RL = RL : y = y : RT$. (Woraus man y beſtimmen kann), ſo iſt $\overline{CR}^3 : \overline{RL}^3 = CR : RT$; Folglich kann das Verhältniß A aus einem zuſammenhängenden Verhältniß von 4 Glieder hergeleitet werden, worinn RL die erſte mitlere Proportionallinie zwiſchen 2 gegebenen Linien CR und RT iſt. W. z. E. W.

Von der Muſchellinie.

§. 1.

Von einem beliebigen Punkt P (Fig. 98) ziehe man auf eine Linie von willkührlicher Länge KM die Perpendicularlinie PT. Man verlängere dieſelbe nach Gefallen. Man ziehe von dem nämlichen Punkt P eine beliebige Anzahl ſchiefer Linien auf beyden Seiten dieſer Perpendicularlinie PA, PB . . . . PF und PG . . . . ſo, daß die Theile derſelben,

---

(*) Man ſehe, meine Anmerkung zum §. 168 der Parabel.

ben, wie xC, uB, rA, welche jenſeits KM ſind, alle der Linie TS gleich ſeyen. Wenn man die Endpunkte D. C. B. A. S . . . . dieſer Verlängerungen durch eine Linie verbindet, ſo bekommt man eine krumme Linie, die die Alten eine Conchoide nannten (*a*); Der erſte Punkt P iſt der Pol derſelben; S der Scheitelpunkt, und die Linien TS rA und uB ſind die beſchreibenden Halbmeſſer.

* §. 2.

Es iſt auch leicht zu begreifen, daß KM die Aſymptote derſelben ſey. Denn da $rA = TS$ iſt (Conſtr.) und TS einen kleinern Winkel mit KM macht, als rA, ſo iſt A nothwendig näher bey KM als der Punkt S. Eben deswegen iſt auch B näher dabey, als A, und ſo immer fort. So wie ſich alſo die Muſchellinie DSL auf beyden Seiten von ihrem Scheitelpunkt S entfernet, ſo nähert ſie ſich immer der Linie KM. Sie wird mit derſelben aber niemals zuſammenſtoſſen, weil (Conſtr.) die beſchreibenden Halbmeſſer immer die Verlängerungen der ſchiefen Linien jenſeits KM ſind.

* §. 3.

Es mag daher eine Linie eine Neigung gegen die Aſymptote einer Conchoide haben, welche ſie will, wenn ſie anders eine grade Linie iſt, die gegen den Pol derſelben gerichtet iſt, ſo wird ſie entweder würklich von der Conchoide durchſchnitten werden oder wenigſtens die Lage darzu haben.

Denn,

(*a*) Im lateiniſchen Conchilis. Man hat ſie wegen der Aehnlichkeit mit der Schale eines Fiſches ſie alſo benennet. Gemeiniglich heißt ſie auch Muſchellinie des Nicomeds von ihrem Erfinder. Proclus, der ungefehr 500 Jahr nach Chriſti Geburt lebte, erwähnt dieſes Geometer. Dieſe krumme Linie iſt alſo ſehr alt. *Voſſ. de ſcript. Math.*

Denn, wenn man dieſe ſchiefe Linie gegen die krumme Linie verlängert, ſo wird ſie ſich beſtändig von der Aſymtote entfernen. Die Conchoide aber nähert ſich derſelben immer. Es wird folglich dieſe Linie über die Conchoide hinausgehen und folglich werden ſich dieſe beyden Linien durchſchneiden.

* §. 4.

Gebrauch der Conchoide bey der Verdoppelung des Würfels. Es kommt darauf an, vermittelſt dieſer krummen Linie zwiſchen 2 gegebenen Linien eine mitlere Proportionallinie zufinden. Ehe wir aber zur Conſtruction ſelbſt gehen, iſt es nützlich von folgenden Wahrheiten vorher überzeugt zu ſeyn.

* **Lehnſatz.** Wenn eine Linie AR in B in 2 unfeiche Thelle getheilet wird (Fig. 99), und einer von dieſen Theilen in der Mitte in H getheilet wird, ſo behaupte ich, daß das Quadrat von RH ſo groß ſey, als das Rechteck aus (BR×RB) + dem Quadrat von HB, oder, daß $\overline{RH}^2 = (AR \times RB) + \overline{HB}^2$.

Beweis. 1) Weil AH=HB (Conſtr.), ſo iſt $RH = AR - AH = AR - HB$. Folglich iſt $\overline{RH}^2 = \overline{AR}^2 - (2HB \times AR) + \overline{HB}^2 = AR - (2\,HB \times AR) + \overline{HB}^2 = (RB \times AR + \overline{HB}^2$ (Weil offenbar $AR - 2\,HB = AR - AB = RB$. Folglich iſt $\overline{RH}^2 = (AR \times RB) \times \overline{HB}^2$.

2) Wenn AE in ungleiche Theile in D und der Theil derſelben AD in 2 gleiche Theile in F getheilt wird, ſo kann man eben, wie vorhin beweiſen, daß $\overline{EF}^2 = (AE \times DE) \times \overline{DF}^2$.

* §. 5.

Aufgabe. Vermittelſt einer Conchoide zwiſchen 2 gegebenen Linien AB und BC 2 mitlere Proportionallinien zu finden.

Aufloͤſung. Nachdem man dieſe beyden Linien rechtwinklicht zuſammengeſeʒt hat, ſo macht man daraus das Rechteck BD. Durch die Mitte F der Linie DA ziehe man die Linie CF, biß ſie mit der verlaͤngerten Linie AB in G zuſammenſtoͤßt. In der Mitte von AB richte man die Perpendiculairlinie HP von willkuͤhrlicher Laͤnge auf. Durch den Punkt B beſchreibe man mit DF oder AF einen Bogen, welcher dieſe Perpendiculalrlinie in P durchſchneidet. Man ziehe die Linien BP, GP und BK mit GP parallel. Aus dem Punkt P laſſe man auf die verlaͤngerte Linie BK eine Perpendiculairlinie PT fallen. Man mache deren Verlaͤngerung TS=DF oder AF oder BP. Aus dem Pol P beſchreibe man mit dem erzeugenden Halbmeſſer TS einen Theil SRL der Conchoide. (§. 1), in welcher S der Scheitelpunkt und TK die Aſymptote iſt. Dieſe krumme Linie muß nothwendig die verlaͤngerte Linie AB in einem Punkt R durchſchneiden. (§. 3). Wenn man darauf die Linie RC ausziehet, biß ſie die in E verlaͤngerte Linie AD durchſchneidet, ſo werden die beyden Linien RB und DE die geſuchten 2 mitlern Proportionallinien ſeyn, oder man wird folgendes Verhaͤltniß haben. BC : RB=RB : DE=DE : AB.

Beweis. 1) $\overline{RH}^2=(AR\times RB)+\overline{HB}^2$ (§. 4). Folglich iſt $\overline{RH}^2+\overline{HP}^2=(AR\times RB)+\overline{HB}^2\times\overline{HP}^2$ (G). Wenn man aber die Linie PR ziehet, ſo iſt der rechtwinklichten Triangel PHR und PHB wegen $\overline{RH}^2+\overline{HP}^2=\overline{PR}^2$ und $\overline{HB}^2+\overline{HP}^2=\overline{PB}^2$. Es veraͤndert ſich alſo die Gleichung G in folgende $\overline{PR}^2=(AR\times RB)+\overline{PB}^2$.

2) Allein wegen der ähnlichen Triangel EDC und CBR iſt ED : CB oder DA = DC oder AB : BR; Folglich verhält ſich ED : $\frac{DA}{2}$ oder DF = 2AB : BR. (M). Da nun DF = AF (Conſtr.) und die Triangel DFC und AFG ſich ähnlich ſind, ſo erhellet, daß AG = DC = AB und folglich 2AB = BG. Folglich verwandelt ſich daß Verhältniß M in folgendes ED : DF = BG : BR = PM : MR. (Weil BM mit GP parallel iſt). Folglich verhält ſich ED : DF = PM : MR. Folglich auch ED + DF : DF = PM + MR : MR oder EF : DF = PR : MR. Allein vermöge der Natur der Conchoide iſt MR = TS (§. 1) und TS = DF (Conſtr.). Folglich MR = DF und alſo PR = EF oder $\overline{PR}^2 = \overline{EF}^2$. Man hat aber geſehen (Nr. 1), daß $\overline{PR}^2 = (AR \times RB) + \overline{PB}^2$. Folglich iſt $AR \times RB + \overline{PB}^2 = \overline{EF}^2 = (AE \times DE) + DF$, oder $\overline{PB}^2$. (§.2.Nr.4.) Ziehet man folglich von beyden Seiten $\overline{PB}^2$ ab, ſo iſt AR × RB = AE × DE oder es verhält ſich RB : DE = AE : AR = BC : RB. (Weil AE mit BC parallel iſt). Folglich verhält ſich BC : RB : DE. Da aber die Triangel CBR und EDC ſich ähnlich ſind, ſo verhält ſich auch BC : RB = DE : DC. Folglich verhält ſich endlich BC : RB = RB : DE = DE oder DC : AB. W. z. E. W. (*a*)

Von

(*a*) Man lieſet im 4ten Buche auf dem 56ten Blatte der *Collect. Math.* des Pappus, daß dieſer Schriftſteller die Conchoide auch zur Theilung eines Winkels in 3 gleiche Theile gebraucht habe. (*)

(*) Nach der Meinung des Newtons in ſeiner *arith. univerſ.* ſoll Archimed ſich dieſer krummen Linie zur Conſtruction der körperlichen Aufgaben bedienet haben. Er ziehet ſie wegen ihrer Simplicität, und wegen ihrer leichten Conſtruction bey der Conſtruction der Gleichungen vom 3ten und 4ten Grade ſelbſt den Kegelſchnitten vor. Der größte Nutzen, den man von der

Con=

Von der Quadratrix.

§. 1.

Es ſey ABH ein rechter Winkel (Fig. 100) und AH der Quadrant, als ſein Maaß. Dieſer ſey in einer ſehr groſſen Anzahl gleicher Theile getheilet, als AC, CL . . . Dieſes kann geometriſch durchs halbiren geſchehen. Aus den Theilungspunkten C, L. . . . . ziehe man die Halbmeſſer BC, BL . . . ; Darauf theile man den Radius AB in eben ſo viele gleiche Theile, als den Bogen AH. Durch die Punkte M, O . . . . ziehe man mit BH die Parallellinien Mx, OR . . . . ſo werden die gemeinſchaftlichen Durchſchnitte dieſer Parallellinien und der correſpondirenden Halbmeſſer, das heißt, der Durchſchnitt x der erſten Parallellinie Mx und des erſten Halbmeſſer BC; der Durchſchnitt der 2ten Parallellinie und des 2ten Radius u. ſ. w. eine krumme Linie AxRF machen, die die Quadratrix heißt, (*a*) weil

 ſie

Conchoide erhalten kann iſt die ſchöne Erfindung des Hrn. Blondels, da er durch einen Zug auf die leichteſte und ſchönſte Weiſe durch eine Conchoide die Säulen verjünget. Dieſe Entdeckung hielt Perrault für ſo hoch, daß er den Verluſt der vom Vitruv verſprochenen Figur, den der berühmte Villalpandus für unerſetzlich hielte, nicht mehr beklagte. Hr. Blondel bedient ſich darzu des vom Nicomed erfundenen Inſtruments, eine Conchoide zu ziehen.

(*a*) Und zwar insbeſondere die Quadratrix des Dinoſtrates von ihrem Erfinder. (*) Dieſe krumme Linie iſt wohl ſchwerlich unter 1500 Jahr alt. Pappus von Alexandrien, welcher vor 1400 Jahren lebte, redet davon in ſeinem Werke, als einer Linie, die zu ſeiner Zeit ſehr bekannt war, und die man ſchon unter den alten ſetzen könnte. Pappus *Collect. Math.* und *Voſſ. de ſcript. Math.*

(*) Einige Geometer eignen ſie dem Nicomedes zu. Man ſehe *Weidleri Inſtitut. Math. p.* 719. Hr. von Tſchirnhauſen hat eine andere krumme Linie erfunden, die er gleichfalls eine Quadratrix nennet. *Medic. Ment. Part. II. p,* 124. B.

ſie die beſondere Eigenſchaft hat, daß ſie ſogleich eine Rectifi-cation der Peripherie, die der wahren ſich ſehr nähert, und alſo die Quadratur des Cirkels, wie wir ſogleich ſehen werden, gibt.

§. 2.

Dieſes iſt alſo die Eigenſchaft dieſer krummen Linie, wenn man durch einen ihrer Punkte R einen Radius BL von dem beſchriebenden Cirkelbogen AH ziehet, und von dem nämlichen Punkt die Perpendiculairlinie RO auf der Axe AB aufrichtet, daß beſtändig AH : LH=AB : OB. Denn es erhellet vermöge der Conſtruction, wenn der Bogen A*H* 8 Theile und der Bogen LHB derſelben hat, daß der Radius AB gleichfals 8 ſolcher Theile habe, wovon 6 die Linie OB ausmachen.

Ziehet man ferner BK und die Perpendiculairlinie SQ, ſo verhält ſich aus vorigen Gründen A*H* : K*H*=AB : QB.

Anmerkung. Dieſe Eigenſchaft würde zur abſoluten Rectification der Peripherie führen, wenn man den Punkt F, als den Endpunkt der Grundlinie BF der Quadratrix ſo genau, als die andern Punkte derſelben, beſtimmen könnte. Dieſes werde ich beweiſen, wenn man ſich vorher von den 2 folgenden Lehnſätzen überzeugt hat.

§. 4.

Erſter Lehnſatz. Wenn man aus der Spitze B eines Winkels AB*H* (Fig. 101) verſchiedene concentriſche Bögen A*H*, GM, DP zwiſchen den Schenkeln deſſelben beſchreibet und wenn man ihn durch die Halbmeſſer BL und BK theilet, ſo behaupte ich 1) daß ſich der Bogen A*H* zum Bogen *H*L verhalte, wie der Bogen GM zum Bogen GR,

2)

2) daß ſich der Bogen AH zum Bogen HK verhalte, wie der Bogen DP zum Bogen DV.

Beweis. Da die Bögen AH und GM ſich gleich ſind, ſo verhält ſich AH : GM = BH : BG und wegen der Aehnlichkeit der Bögen HL und GR verhält ſich BH : BG = HL : GR (*); Folglich verhält ſich AH : GM = HL : GR oder AH : HL = GM : GR. W. d. 1ſte W.

2) AH : DP = BH : BD = HK : DV. Folglich AH : DP = HK : DV oder AH : HK = DP : DV. W. d. 2te W.

§. 5.

Zweyter Lehrſatz. Die Tangente DS. (Fig. 102) eines Bogens DV, der das Maaß eines Winkels DBS iſt, iſt gröſſer als dieſer Bogen ſelbſt.

Beweis. Machet den Bogen VT = DV und ziehet ST ſo erhält, daß ST = DS. Es iſt aber DST augenſcheinlich gröſſer, als DVT. Folglich iſt DS, als die Helfte von DST gröſſer, als der Bogen DV oder als die Helfte von DVT.

§. 6.

Gebrauch der Quadratrix zur äuſſerſt nahen Rectification der Peripherie des Cirkels. Wenn man vorausſetzt, daß man den Punkt F (Fig. 101) wo die Quadratrix mit BH zuſammenſtößt, wiſſe, ſo ſage ich, daß der Bogen AH die dritte Proportionallinie zu den 2 Linien BF

 und

(*) Dieſes Verhältniß erkennt man leicht als richtig aus der Aehnlichkeit der Triangel, wenn man damit dieſe leichte geometriſche Wahrheit verbindet, daß ſich die Bögen wie ihre Sehnen verhalten. B.

und B*H* ſey, oder daß BF : B*H*=B*H* : A*H* oder A*H* : B*H*=B*H* : BF.

Beweis. Es gibt ganz gewiß zwiſchen den 2 Linien A*H* und B*H* eine dritte Proportionallinie. Nun kann aber dieſe 3te Proportionallinie weder gröſſer noch kleiner ſeyn, als BF, z. E. ſie können weder ſo groß, als BG oder BD ſeyn. Folglich muß nothwendig BF die dritte Proportionallinie ſelbſt ſeyn. Man beſchreibe deswegen

1) Aus dem Punkt B den Bogen GRM. Durch den Punkt R, wo er die krumme Linie durchſchneidet, ziehe man BL. Man laſſe die Perpendiculairlinie RO auf AB und RC auf B*H* fallen. Nun verhält ſich unmöglich A*H* : B*H*=B*H* : BG. Denn da B*H* : BG=A*H* : GM, ſo wäre A*H* : B*H*=A*H* : GM und folglich B*H*= dem Bogen GM. Es verhält ſich aber (§ 41) A*H* : *H*L=GM : GR und vermöge der Natur der Quadratrix A*H* : *H*L=AB : OB (§. 2) oder=B*H* : RC; Folglich verhält ſich GM : GR=B*H* : RC. Weil folglich der Bogen GM der graden Linie B*H* gleich ſeyn würde, wie wir ſo eben geſehen haben, ſo würde der Bogen GR der graden Linie RC gleich ſeyn. Dieſes iſt abſurd. Denn der Bogen GR iſt gröſſer als ſeine Sehne und dieſe Sehne gröſſer, als RC. Folglich muß GR gröſſer, als RC ſeyn. Folglich iſt es nicht möglich, daß die 3te Proportionallinie zu den 2 Gröſſen A*H* und B*H* gröſſer, als BF ſey.

2) Man wird aber auch zugleich ſehen, daß man unmöglich behaupten könne, daß ſie kleiner ſey; Man beſchreibe aus dem Punkt B den Bogen DP und ziehe die Linie DS auf B*H* perpendiculair. Man ziehe ferner durch den Punkt S, wo ſie die Quadratrix durchſchneidet, den Radius BK und SQ auf AB perpendiculair. Wenn man nun wie im Nr. 1. ſchlieſſet, ſo kann man beweiſen, daß folgendes Verhältniß unmög,

unmöglich ſey, nämlich daß A*H* : B*H*=B*H* : BD; denn ſonſt verhielte ſich A*H* : B*H*=A*H* : DP, weil B*H* : BD=A*H* : DP. und folglich würde die grade Linie B*H* dem Bogen DP gleich ſeyn. Nun verhält ſich aber A*H* : *H*K=DP : DV (§. 4) und A*H* : *H*K=AB : QB (§. 2) oder =B*H* : DS. Folglich iſt DP : DV=B*H* : DS. Folglich da DP ſo groß iſt als B*H*, ſo würde der Bogen DV ſeiner Tangente DS gleich ſeyn, welches unmöglich iſt (§. 5). Folglich kann die dritte Proportionallinie zu 2 gegebenen Linien A*H* und B*H* nicht kleiner ſeyn, als BF (Nr. 1). Sie kann auch nicht gröſſer ſeyn, als eben dieſe Linie. Folglich iſt ſie ihr gleich, oder es verhält ſich A*H*:BH =B*H* : BF, oder BF : B*H*=B*H* : A*H*.

Man kann aber zu 2 gegebenen graden Linien BF und B*H* geometriſch eine dritte Proportionallinie finden. Folglich könnte man auch die Länge des Bogens A*H* und folglich die Länge der Peripherie finden, die 4 mal ſo groß iſt. Es würde alſo durch dieſen Kunſtgriff die Peripherie des Cirkels geometriſch rectificirt ſeyn. W. z. E. W.

§. 7.

Vermöge der Conſtruction der Quadratrix kann man aber unmöglich nach der genaueſten Strenge den Punkt F finden. (Fig. 100). Denn er müßte durch den Durchſchnitt des Halbmeſſers B*H* und der correſpondirenden Parallellinie aus dem Punkt B beſtimmt werden. Hier fallen aber dieſe 2 Linien in einander und es findet folglich kein Durchſchnitt ſtatt. Da man inzwiſchen durch das halbiren ſo wohl EB als den Bogen V*H* in ſehr kleine Theile theilen kann, wodurch man die Punkte der Quadratrix findet, die zwiſchen Y und F liegen und ſich B*H* beſtändig nähern, ſo kann man geometriſch eine Linie bekommen, die von der Grundlinie BF nicht merklich verſchieden iſt.

§. 8.

Ich habe in meinen Inſtitutionen verſchiedentlich gezeiget, daß die Cirkelfläche einem Triangel gleich ſey, deſſen Baſis ſo groß, als die Peripherie des Cirkels und deſſen Höhe der Radius iſt. Da folglich durch die Quadratrix die Peripherie beynahe rectiſicirt wird (§. 6. 7) ſo kann man itzt auch die Baſis und die Höhe des Triangels, der dem Cirkel gleich iſt, bekommen. Folglich erhält man bey nahe die Quadratur des Cirkels.

§. 9.

Anmerkung. Dieſe Methode, des Cirkels Innhalt ſehr nahe zu finden, iſt deſto artiger, da ſie darzu keine Conſtruction der krummen Linie erfordert. Denn nehmen wir z. E. an, daß durchs halbiren B*r* der 128te Theil von BE und H*d* der 128te Theil von dem Bogen HV ſey, ſo werden ſich der Radius B*d* und die Parallellinie *rZ* in einem Punkt *Z* ſchneiden, der ſo nahe bey B*H* iſt, daß man ohne einen merklichen Irrthum *rZ* für die Baſis BF annehmen kann. Folglich kommt es bey der Rectification und der Quadratur des Cirkels darauf an, einen ſehr kleinen Theil des Radius B*H* von B in *r* auf die Linie AB zutragen, *rZ* mit B*H* parallel zu ziehen, und einen ſehr kleinen Theil *Hd* des Bogens A*H* durchs beſtändige halbiren zu nehmen (*a*) und den Radius B*d* zu ziehen. Denn der Durchſchnittspunkt *Z* der Linie *rZ* und B*d* beſtimmet eine Linie *rZ*, die nicht merklich von der Baſis BF der Quadratrix unterſchieden iſt. Daraus kann man nach §. 6 und 8 ohne Conſtruction dieſer krummen Linie die Gröſſe der Peripherie oder den Innhalt der Cirkelfläche bey nahe herausbringen.

Man

(*a*) Man merke, daß das kleine Theilchen H*d* ſich zu ſeinen Bogen AH verhalten müſſe, wie das kleine Theilchen *r*B zu ſeinem Radius AB.

Man kennte aber dadurch noch nicht das Verhältniß der Peripherie gegen ihren Diameter in Zahlen, geſetzt auch, daß man durch dieſe Methode nach der größten Strenge die Quadratur bekäme, weil die rectificirte Peripherie und ihr Diameter in einem irrationalem Verhältniß gegen einander ſtehen könnten. Deßwegen ſcheint mir in dieſem Betracht das Unternehmen des **Archimeds** oder ſeines Nachahmers des **Metius** ſehr ſchätzbar, weil man in der Ausübung und für die Kunſt den Diameter eines Cirkels ſehr bequem und äuſſerſt nahe aus ſeiner Peripherie und umgekehrt die Peripherie durch ihren Diameter in Zahlen finden kann.

§. 10.

Es gibt neuere Mathematiker (*a*), die dieſer krummen Linie die Eigenſchaften beygeleget haben, daß ſie einen jeden Winkel in eine begehrte Anzahl gleicher Theile theile. Es ſey z. E. nach ihrer Behauptung der Winkel ABV (Fig. 100) in 7 gleiche Theile zu theilen; ſo nimmt man auf dem Quadranten, der ſeine Quadratrix bey ſich hat, einen Winkel, der ſo groß iſt, als der gegebene. (Iſt der gegebene zu groß, ſo theilet man ihn in 2 gleiche Theile). Von dem Punkt Y, in welchem einer ſeiner Schenkel die Quadratrix durchſchneidet, ziehet man YE perpendiculair auf AB. Darauf theilet man AE in die gegebenen 7 Theile. Man ziehet durch die Theilungspunkte M, O . . . . die Parallellinien M*x*, OR . . . Dieſe werden die Quadratrix durchſchneiden und auf dieſer krummen Linie die Punkte *x*, R . . . . beſtimmen. Ziehet man durch dieſe die Halbmeſſer BC, BL, ſo wird man nach dieſen Auctoren den Winkel in die verlangten Theile getheilet finden. Denn es iſt klar (Conſtr.), daß AM beſtändig der nämliche Theil von AE iſt, welcher AC von dem Bogen AV iſt. Nun iſt aber (Conſtr.) AM der 7te Theil von dem Bogen AE. Folglich iſt AC auch der 7te Theil E von AV. Dieſe Aufgabe ſcheinet alſo aufgelöſet zu ſeyn.

(*a*) Die Herren Ozanam und Belidor.

§. 11.

Allein dieſe Schriftſteller haben dieſes aus der Acht gelaſſen, daß die Punkte der Quadratrix nur durchs halbiren beſtimmt werden, und daß, wenn der Schenkel BV des gegebenen Winkels nicht auf einen von dieſen alſo beſtimmten Punkten fällt, und daß, wenn man ferner YE gezogen hat, und man auf AE andere Theile, als diejenigen machen muß, die durch die Conſtruction dieſer krummen Linie entſtehen, daß alsdenn die neuen mit B*H* parallel gezogenen Linien nicht mehr die gemeinſchaftlich beſtimmten Punkte der Quadratrix treffen werden, und daß folglich die aus dem Punkt B gezogenen Halbmeſſer auf dem Bogen AV unzuverläßige Eintheilungen machen werden.

§. 12.

Die Quadratrix würde ohne allen Zweifel und unläugbar die Eigenſchaft einer Omniſectrix haben, wenn es zu machen wäre, daß der Endpunkt A des Radius BA den Bogen A*H* in der nämlichen Zeit gleichförmig durchlief, in welcher die Linie A*a* gleichförmig parallel mit B*H* auf AB getragen wird. Dieſes heißt aber eben das annehmen, wovon die Frage iſt: Ob man nämlich den Bogen A*H* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, wie die Linie AB theilen könne. Dieſe Anmerkung iſt klar, und ſchon vor ungefehr 1400 Jahren vom Pappus von Alexandrien gemacht worden. (*a*).

Von

(*a*) Im 4ten Buche auf dem 57ten Blatte ſeiner Mathemat. Sammlungen, die vom Commandinus aus dem griechiſchen ins lateiniſche überſetzet ſind.

Von der Spirallinie.

§. 1.

Man nehme eine beliebige Linie CB (Fig. 103), theile ſie in verſchiedene, wie hier, in 2 gleiche Theile. Man laſſe von dem Punkt C durch die Theilungspunkte A und B Cirkel gehen. Darauf theile man den Radius CA nach Gefallen in gleiche Theile, z. E. in 9. (Je gröſſer die Anzahl iſt, deſto vollkommner wird die zu beſchreibende krumme Linie ſeyn). Man theile die Peripherie AFMA von dieſem Radius eben ſo, und ziehe durch die neuen Theilungspunkte die Halbmeſſer CD, CF, C*H*.... Endlich trage man einen dieſer Theile des Radius CA auf den nächſten Radius CD vor C in *o*; 2 Theile auf den nächſtfolgenden CF, von C in *r*; 3 Theile auf C*H* von C in P und ſo fort, biß wieder zu dem Radius CA. Man ziehe die Punkte *o* . *r*, P. . . durch eine zuſammenhängende Linie zuſammen, ſo bekommt man eine krumme Linie C*o*P*x*A, die die erſte Spirallinie heißt (*a*).

Man trage aufs neue einen Theil des Radius CA auf CE von D in *b*; 2 Theile auf CK von F in *e*; 3 Theile auf CL von *H* in *d* und vermehre ſo immer fort die Anzahl der Theile um 1, biß man wieder zu dem Radius CB kommt. Man ziehe durch die gefundenen Punkte *b* . *e* . *d* .... eine Linie A*b**d*F*h*B; Siehet man dieſe als eine Fortſetzung der krummen Linie C*o*P*x*A an, ſo nennet man dieſe krumme Linie die 2te Spirallinie. Der Punkt C iſt das Centrum der Spiralen; CA die Linie der erſten Revolution, CB die Linie der 2ten Revolution. Meiner Meinung nach würden dieſe Linien beſſer benennet ſeyn, wenn man die Linie

C*o*P*x*A

(*a*) Sie iſt vom Archimed erfunden worden.

CoPxA die Spirallinie der erſten Revolution und die krumme Linie CoPx A*bdfh*B die Spirallinie der doppelten Revolution, und ſo weiter nach der Anzahl der Cirkel hieſſe. Dieſe Benennungen würden uns eher an die Idee der Erzeugung dieſer krummen Linie erinnern.

§. 2.

Man kann ſich folglich die Spierallinie wie CoPxA ſo vorſtellen, als wäre ſie durch den Punkt C erzeugt, welcher gleichförmig der Länge nach auf dem Radius CA fortlief und ihn genau in der nämlichen Zeit durchlauft, in welcher der Endpunkt A dieſes Halbmeſſers mit gleichförmiger Bewegung ſeine Peripherie beſchreibt, daß folglich C*r* z. E. beſtändig der nämliche Theil von dem beſchriebenden Radius CF oder CA ſey, welcher der Bogen AF von ſeiner ganzen Peripherie iſt. Denn aus der Entſtehung derſelben (§. 1) fließt genau folgendes Verhältniß C*r* : CF oder CA = AF zur Peripherie AHMA.

§ 3.

Wenn man folglich dieſes geometriſch einräumen könnte, daß die Bewegung des Punkts A in der Peripherie AHMA gleichförmig ſey mit der Bewegung des Punkts C auf dem Radius CA, ſo würde die Spirallinie CPxA den Cirkel nach einem gegebenen Verhältniß theilen können. Geſetzt, man verlange einen Bogen, welcher ſich zur ganzen Peripherie verhielte = 2 : 9. Hätte man nun die erſte Spirallinie innerhalb der gegebenen Peripherie beſchrieben, ſo dürfte man nur ihren Halbmeſſer in 9 gleiche Theile theilen und 2 dieſer Theile aus dem Mittelpunkt C auf einen beliebigen Punkt *r* der Spirallinie tragen. Durch dieſen Punkt *r* müßte man den Radius C*r*F ziehen, ſo bekäme man einen Bogen AF, welcher ſich zur Peripherie A*H*MA verhielt, = 2 : 9.

Denn

Denn es verhält ſich beſtändig Cr : CF oder CA, wie der Bogen AF zur Peripherie AHMA (§. 2). Es verhält ſich aber Cr : CA = 2 : 9. (Conſtr.) Folglich verhält ſich AF : AHMA = 2 : 9. Folglich wäre die Aufgabe aufgelöſet.

§. 4.

Da man aber die Peripherie eines Cirkels geometriſch nicht in beliebige gleiche Theile theilen kann, ſo hat dieſe krumme Linie den nämlichen Fehler, den man §. 11 der Quadratrix bemerkt hat. Man darf folglich von der Spirallinie des Archimeds in ſolchen Operationen, wo man eine abſolute Genauigkeit fordert, keinen Nutzen ſich verſprechen. Die Künſte des Geſchmacks aber, können ſich derſelben bedienen, weil man darinn den Sinnen nur Umriſſe darſtellen will, die dieſelben auf die angenehmſte Art rühren.

Von der Cycloide.

§. 1.

Man ſtelle ſich vor, daß der Cirkel AO (Fig. 104), der die grade Linie AC in dem Punkt A berühret, über dieſe grade Linie hinrolle, biß alle Punkte ſeiner Peripherie ſich genau auf AC ſo geleget haben, daß der Punkt A nur nach vollendeter ganzer Revolution um ſein Centrum in C auffällt. Dieſer Punkt wird augenſcheinlich eine krumme Linie, wie AFBC beſchreiben. Dieſe haben die neuern Mathematiker die Trochoide, Radlinie oder am gewöhnlichſten die Cycloide genennet. Sie iſt derjenigen vollkommen ähnlich,

die

die in der Luft ein Nagel eines Rades an einem Wagen beſchreibt, indem er über eine grade Linie hinrollt. (*)

§. 2.

Erſter Zuſatz Man ſiehet aus der Erzeugung dieſer krummen Linie, daß ihre Baſis AC vollkommen der Peripherie des beſchriebenden Cirkels AO gleich iſt; daß wenn dieſer Cirkel in der Mitte D angelangt iſt, der beſchreibende Punkt A die halbe Peripherie durchlaufen habe und daß er in dieſer Lage ſeines Cirkels biß zu dem culminirenden oder zum höchſten Punkt B über die Baſis AC geſtiegen ſey, und dieſer im herunterſteigen den Theil BPC beſchrieben habe, der der halben Cycloide AFB vollkommen gleich und ähnlich iſt.

§. 3.

Zweyter Zuſatz. Folglich werden alle doppelte Ordinaten, wie FP, die durch einen beliebigen Punkt F der krummen Linie mit ſeine Baſis parallel gezogen werden, durch die Linie BD, die durch die Mitte von AC an den culminirenden Punkt B gezogen iſt, in 2 gleiche Theile getheilet. Aus dieſem Grunde und weil dieſe doppelte Ordinaten auf die Linie BD rechtwinklicht ſtehen (Conſtr.), ſo wird dieſe Linie BD die **Axe der Cycloide** genennet.

§. 4.

(*) Dieſes iſt die gewöhnliche Cycloide. In dieſer iſt die Baſis ſo groß, als die Peripherie des beſchreibenden Cirkels. Iſt aber die Baſis grösſer als dieſe Peripherie, ſo heißt ſie eine verlängerte Cycloide. Iſt die Baſis kleiner, ſo heißt ſie eine verkürzte Cycloide. Stellet man ſich vor, daß der beſchreibende Cirkel über einen andern Cirkel rolle, ſo heißt die daher erzeugte Linie eine **Epicycloide**. B.

§. 4.

Dritter Zuſatz. Endlich iſt es auch augenſcheinlich, wenn man auf die Axe eine Perpendiculairlinie BO an ihren culminirenden Punkt aufrichtet, daß dieſe die Tangente von der Cycloide und mit ihrer Baſis parallel ſey, weil der beſchreibende Punkt A ſich beſtändig vor und nach ſeiner Ankunft in dem culminirendem Punkt B unterwärts dieſer parallel oder Perpendiculairlinie befindet.

§. 5.

Erſter Hauptſatz. Nimmt man an, daß der beſchreibende Cirkel AO über AC biß nach L gerollet und der beſchreibende Punkt A biß nach F in der Höhe geſtiegen iſt, und daß folglich dieſer Cirkel die Lage LFM habe; Stellt man ſich ferner denſelben nochmal über die Axe BD beſchrieben vor, ſo behaupte ich, daß der Theil F*H* einer jeden Ordinate FK der Cycloide, welcher zwiſchen dieſer krummen Linie und zwiſchen dem Berührungspunkt *H* des Cirkels von dem Diameter BD enthalten iſt, jederzeit ſo groß ſey, als die Cirkelbogen *H*B, der zwiſchen dem Berührungspunkt *H* und dem culmirenden Punkt B enthalten iſt.

Beweis. Weil alle Punkte des Bogens FL ſich auf die Theile AL gelegt haben (Beding.), ſo iſt die grade Linie AL ſo groß, als der Bogen FL. Nun iſt aber FL = dem Bogen *H*D. Folglich iſt die grade Linie AL = dem Bogen HD. Es iſt aber (§. 2) AL+LD = der halben Peripherie des beſchreibenden Cirkels = *H*D+*H*B: weil folglich AL = *H*D, ſo muß auch der Bogen *H*B = der graden Linie LD = GK = G*H*+HK = FG+GH (denn es iſt HK = FG) = FH ſeyn. Folglich iſt die grade Linie FH = dem Bogen HB. W. z. E. W.

§. 6.

§. 6.

Iſt hingegen eine krumme Linie ſo beſchaffen, wenn man mit ihrer Axe BD als einem Diameter einen Cirkel beſchreibt, daß alle grade Linien, die man wie FH von einem ihrer Punkte gezogen hat, immer ſo groß ſind, als die correſpondirenden Bögen HB, ſo wird dieſe krumme Linie nothwendig eine halbe Cycloide ſeyn, wovon HBD der beſchreibende Cirkel ſeyn wird.

Beweis. Weil FH beſtändig dem Bogen HB gleich iſt (Beding), ſo iſt die grade Linie AD, die eben ſo, wie FH gezogen iſt, der halben Peripherie BHD gleich. Wenn man folglich den Cirkel BD über AD ſo rollen läßt, daß der Punkt B anfangs in A angenommen wird, ſo wird dieſer Punkt eine halbe Cycloide beſchrieben haben, wenn dieſer Cirkel in D gekommen iſt (§. 1). Ziehet man folglich von einem beliebigen Punkt H der halben Peripherie des Cirkels BD mit AD eine Parallellinie, biß ſie mit der halben Cycloide zuſammenſtößt, ſo wird dieſe Parallellinie jederzeit dem correſpondirenden Bogen HB gleich ſeyn. (§. 5) Nun iſt aber (Beding.) der Bogen HB ſo groß, als die grade Linie FH; Folglich iſt dieſe Parallellinie nicht von FH unterſchieden. Da folglich alle Punkte dieſer halben Cycloide mit allen Punkten der gegebenen krummen Linie zuſammenfallen, ſo iſt dieſe krumme Linie nothwendig eine halbe Cycloide. Dieſes iſt wohl zu bemerken.

§. 7.

Zweyter Hauptſatz. Nachdem man eine beliebige Ordinate fh an die Cycloide biß an den Berührungspunkt h des beſchreibenden Cirkels ausgezogen hat, und wenn man an dieſen Punkt h eine Tangente hS am Cirkel ziehet und mit dieſer Tangente durch F gegen AC eine Parallellinie fl ziehet, ſo

ſo behaupte ich, daß Fl nothwendig in die Cycloide hineingehen werde.

Beweis. Es wird die mit der Tangente hS parallel gezogene Linie fl entweder in dieſe Cycloide hinein gehen oder gänzlich, wie fm auſſerhalb derſelben fallen. Dieſes letzte iſt aber unmöglich

I. Denn nimmt man den Bogen ht kleiner als den Bogen Bh, und ziehet aus dem Punkt t mit fh eine Parallellinie tm und verlängert ſie ſo lange, biß ſie hS in b, die Cycloide in P und fm in m durchſchneidet, ſo iſt $m\text{P}+\text{P}b+bt>\text{P}b+bt$. Nun iſt aber (§ 5) $\text{P}b+bt=$ dem Bogen Bh+ dem Bogen ht; Folglich iſt $m\text{P}+\text{P}b+bt>$ als der Bogen Bh + dem Bogen ht. Weil aber fm mit hb parallel ſeyn würde (Beding.), ſo würde $m\text{P}+\text{P}b$ ſo groß ſeyn, als $fh=$ dem Bogen Bh. (§. 5); Folglich wäre der Bogen B$h\times bt>$ als der Bogen Bh+ Bogen ht, oder die grade Linie bt würde gröſſer ſeyn, als der Bogen ht, und folglich noch gröſſer als die Sehne ht. Folglich würde in dem Triangel bht der Winkel thb gröſſer ſeyn, als der Winkel hbt. Hiervon will ich aber ſogleich die Unmöglichkeit zeigen.

II. Um euch davon zu überzeugen, ſo verlängert mt biß in H, ſo werdet ihr euch erinnern, daß der Winkel hbt oder hbH die Helfte des Bogens hBH weniger die Helfte des Bogens ht zu ſeinem Maaße habe, oder, daß der Winkel $hb\text{H}=$ dem Bogen $\frac{\text{BH}}{2}$ + Bogen $\frac{\text{B}h}{2}$ — Bogen $\frac{ht}{2}$ (M). Es iſt aber der Bogen BH= dem Bogen Bg+ Bogen gH= dem Bogen Bh + Bogen ht; Folglich iſt der Bogen $\frac{\text{BH}}{2}$= dem Bogen $\frac{\text{B}h}{2}$ + Bogen $\frac{ht.}{2}$. Setzet man folglich in der Gleichung M dieſen Werth von dem Bogen $\frac{\text{BH}}{2}$, ſo iſt der Winkel $hb\text{H}=$ dem ganzen Bogen Bh oder er hat den ganzen Bogen Bh zum Maaß.

Es hat aber der Winkel *thb* die Helſte des Bogens *ht* zum Maaß. Weil folglich (Beding) der Bogen *ht* kleiner iſt, als der Bogen B*h*, ſo iſt der Winkel *thb* nothwendig kleiner, als der Winkel *hb*H oder *hbt*. Man hat aber ſchon geſehen (I), daß der Winkel *thb* gröſſer ſeyn würde, als der Winkel *hbt*. Wenn man folglich die Linie, die durch den Punkt *f* gegen AC mit *h*S parallel gezogen wird, nicht in die Cycloide hineingienge, ſo würde der Winkel *hbt* zugleich gröſſer und kleiner ſeyn, als der Winkel *hbt*. Dieſes iſt unmöglich. Folglich u. ſ. w.

§. 8.

Dritter Hauptſatz. Nimmt man beſtändig *fh* mit AC parallel und *h*S für die Tangente in dem Punkt *h* des Cirkels an, und ſtellet man ſich vor, daß *fm* die Tangente der Cycloide ſey, ſo wird *h*S nothwendig in einem Punkt S durch die Verlängerung *f*S der Tangente *fm* durchſchnitten werden, oder, die beyden correſpondirenden Tangenten des Cirkels und der Cycloide *f*S und *h*S ſind nothwendig determinirt, ſich zu begegnen.

Beweis. Ziehet *fl* mit *h*S parallel. Dieſe Linie wird innerhalb der Cycloide fallen. (§. 7). Nimmt man aber *fm* für die Tangente an, ſo wird ſie ganz auſſerhalb der Cycloide fallen. Folglich ſind *fm* und *fl* nicht einerley Linie. Weil folglich *fl* von *fm* durchſchnitten worden, ſo wird die Linie *fm* auch *h*S als die Parallellinie von *fl* durchſchneiden. Folglich haben die beyden correſpondirenden Tangenten *f*S und *h*S der Cycloide und ihres beſchreibenden Cirkels nothwendig die Neigung, ſich zu durchſchneiden.

§. 9.

Vierter Hauptſatz. Ziehet man *fh* mit AC parallel und nimmt *f*S für die Tangente der Cycloide in *f* und *h*S für

für die Tangente an dem correſpondirendem Punkt h des beſchreibenden Cirkels, ſo behaupte ich, daß dieſe 2 Tangenten in einem Punkt S ſich ſo durchſchneiden, daß $fh = h$S.

Beweis. 1) Dieſe beyden Tangenten durchſchneiden ſich in irgend einem Punkt. (§. 8).

2) Um einen ſehr einfachen Beweis zu haben, daß $fh = h$S ſey, ſo ſtellet euch vor, daß man ſehr nahe bey fh mit dieſer Linie eine Parallellinie ux gezogen habe. Itzt kann man wegen der äuſſerſten Kleinheit der Bögen fu und hx der Cycloide und des Cirkels, die zwiſchen dieſen 2 Parallellinien enthalten ſind, ohne einen merklichen Irrthum für Theile ihre Tangenten anſehen. Daher entſtehen die ähnlichen Triangel fhS und uxS. Daraus ziehet man folgendes Verhältniß $fh : ux = h$S $: x$S. Folglich $fh - ux : fh = h$S $- x$S $: h$S (T). Nun iſt $fh =$ Bh und $ux =$ Bx (§. 5). Folglich $fh - ux =$ B$h -$ B$x = hx$. Folglich iſt hS $- x$S $= hx$. Wenn man folglich in der Proportion T, hx an der Stelle von hS $- x$S ſetzet, ſo iſt $hx : fh = hx : h$S. W. z. E. W.

§. 10.

Wenn man umgekehrt von einem beliebigen Punkt f der Cycloide mit AC eine Parallellinie fh ziehet, und durch den Punkt h, wo dieſe Parallellinie den beſchreibenden Cirkel durchſchneidet, an dieſen Cirkel eine Tangente hK ziehet, und wenn man alsdenn hS $= fh$ macht, ſo behaupte ich, daß, wenn man die Punkte f und S verbindet, die Linie fS die Tangente an der Cycloide ſeyn werde.

Beweis. Wäre ſie es nicht, ſo könnte man folglich durch den Punkt f eine ander Tangente fK an dieſelde ziehen. Und dieſe würde folglich oberhalb oder unterhalb fS fallen. Dieſesiſt aber unmöglich. Denn wäre fK die Tangente in f,

ſo haben wir erſt geſehen (§. 9), daß alsdenn hk ſo groß wäre als fh. Nach der Bedingung iſt aber $fh = hS$. Folglich wäre $hK = hS$, welches unmöglich iſt. Es iſt aber der nämliche Beweis, wenn fK unterhalb fS fällt. Folglich u. ſ. w.

§. 11.

Fünfter Hauptſatz. Es ſey der Triangel fhS der vorige, ſo behaupte ich, daß die Sehene hB, die durch den Berührungspunkt h an den culminirenden Punkt B gezogen wird, mit der Tangente fS parallel ſey.

Beweis. 1) Verlängert fh biß in g, damit man erkenne, daß der Winkel Shg zu ſeinem Maaße den halben Bogen hBg oder den ganzen Bogen hB habe, (Geometr.). Es hat aber der Winkel ShB nur die Helfte dieſes nämlichen Bogens zum Maaß (Geom.); Folglich iſt der Winkel $Shg = 2\,ShB$.

2) Bemerket itzt, da der Winkel Shg der äuſſere Winkel in dem Triangel fhS iſt, daß er den 2 Winkeln f und S in dieſem Triangel gleich ſey (Geometr.). Nun iſt der Winkel $f = S$, weil $fh = hS$ (§. 9); Folglich iſt der Winkel $Shg = 2\,S$. Man hat aber geſehen, (Art. 1), daß der Winkel $Shg = 2\,ShB$. Folglich iſt $2\,S = 2\,ShB$, oder der Winkel $S =$ dem Winkel ShB ſeinem Wechſelwinkel. Dieſes beweiſet, daß hB mit fS parallel ſey (Geom.)

§. 12.

Wenn man hingegen von einem beliebigen Punkt f der Cycloide fh ſo weit ausziehet, biß ſie in dem Punkt h den beſchreibenden Cirkel durchſchneidet, und auf die Axe deſſelben BD perpendiculair ſtehet, und wenn man nun die Linie hB biß an den culminirenden Punkt B und fS mit hB parallel ziehet,

ziehet, ſo wird dieſe Linie *fS* die Tangente an den Punkt *f* des Cycloide ſeyn.

Beweis. Ziehet an den Punkt *h* des Cirkels die Tangente *hS*. Dieſe wird *fS* in einem Punkt S durchſchneiden, weil ſie *hB*, welche mit *fS* parallel iſt, durchſchneidet (Beding.); verlängert noch *fh* biß in *g*, ſo iſt der Winkel $Sfh = Bhg = ShB = fSh$. Folglich iſt $hS = fh$. Folglich iſt *fS* eine Tangente der Cycloide. (§. 10).

§. 13.

Hieraus folgt, daß die Perpendiculairlinie AO auf der Baſis AC der Cycloide, die an dem Anfangspunkt A oder C gezogen iſt, eine Tangente dieſer krummen Linie ſey. Denn dieſe Perpendiculairlinie hat alle erforderliche Eigenſchaften einer ſolchen Tangente. Es ſtößt nämlich AD mit BD perpendiculair zuſammen, und die Linie AO iſt mit der Sehne oder dem Diameter BD, welcher von dem Berührungspunkt D biß an den culminirenden Punkt B gezogen iſt, parallel. Folglich iſt die Perpendiculairlinie AO eine Tangente der Cycloide.

§. 14.

Aufgabe. Die Quadratur der Cycloide zu finden, oder die Oberfläche der Cycloi de zu beſtimmen (Fig. 105).

Auflöſung. Es ſey AD die Baſis einer halben Cycloide AMB. Die halbe Peripherie BPD des beſchreibenden Cirkels = AD und DG das Rechteck aus der halben Baſis AD und der Axe BD. Man ſtelle ſich itzt vor, daß BG oder AD in einer Anzahl gleicher kleiner Theile, wie GF getheilet ſey, daß die Summe der äuſſern Rechtecke FGAS der Fläche GMBAG von der Summe GFML der innern Rechtecke von eben dieſer Fläche um weniger, als jede angeb-

liche Gröſſe verſchieden ſey. (Die Möglichkeit davon iſt im §. 68 der Parabel gezeiget werden). Durch den Punkt M, wo die Perpendiculairlinie FS die krumme Linie durchſchneidet, ziehe man LMPQ mit AD parallel und von dem Punkt P, wo ſie den Cirkel durchſchneidet, ſey die Perpendiculairlinie PH und die Sehne PB gezogen, welche mit der Tangente AMT an dem Punkt M parallel lauft. (§. 11).

1. Weil nun GF ausnehmend klein iſt, ſo kann das Theilchen AM der krummen Linie betrachtet werden, als wäre es ein Theil der Tangente AT am Punkt M. Folglich iſt AM mit BP parallel (§. 11); da folglich die Trianael ASM und BQP ſich ähnlich ſind, ſo iſt $BQ : QP = MS : AS = \frac{QP \times MS}{BQ} = LM$. Es iſt ferner $GL = BQ$. Folglich $GL \times LM = BQ \times (\frac{QP \times MS}{BQ}) = QP \times MS = QP \times PH$ (weil $MS = PH$) oder das kleine innere Rechteck $GL \times LM$ der Fläche GMBAG iſt dem kleinen correſpondirenden äuſſern Rechtecke $QP \times PH$ von dem halben beſchriebenden Cirkel gleich. Und dieſes gilt in allen Punkten M der krummen Linie. Folglich iſt die Summe der innern Rechtecke des Raums GBMAG der Summe der äuſſern Rechtecke des halben Cirkelsgleich. Nun iſt aber (§. 69 der Parabel) eine jede dieſer Summen ſo groß, als ihre correſpondirende Fläche; Folglich iſt die Fläche GBMAG oder die Fläche, die zwiſchen den Linien GA und GB und der krummen Linie AMB lieget, ſo groß, als die Fläche des halben beſchriebenden Cirkels BPD.

2. Jtzt iſt das Rechteck $DG = AD \times BD$ und die Oberfläche des halben beſchreibenden Cirkels gleich der halben Peripherie BPD oder $AD \times \frac{BD}{4}$, oder der halbe erzeugende Cirkel oder der Raum GBMAG, (Art. 1) iſt nur der 4te Theil des Rechtecks DG. Folglich iſt die Fläche AMBDA der halben

Cycloide

Cycloide $\frac{3}{4}$ davon: Daraus erhellet, daß die $\frac{1}{2}$ Cycloide ſich zum halben erzeugenden Cirkel verhalte wie 3 : 1. Folglich iſt die ganze Cycloide 3 mal ſo groß, als die Fläche des beſchreibenden Cirkels. (*a*) W. z. E. W.

§. 15.

Zuſatz. Hätte man die vollkommene Quadratur des Cirkels, ſo hätte man auch die vollkommene Quadratur der Cycloide, und umgekehrt. (*)

§. 18.

Aufgabe. Eine Cycloide zu beſchreiben.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe kann entweder ganz mechaniſch oder zum Theil mechaniſch und zum Theil geometriſch ſeyn.

(*a*) Man ſiehet hier eine neue Probe von der Zierlichkeit der Methode der Gränzen bey der Quadratur der krummen Linien. Die Conſtruction und der Beweis dieſer Aufgabe durch die Integral Rechnung iſt gewiß nicht ſimpler. Man hat auch noch den Vortheil, dieſe Rechnung zu übergehen, und man genießt hier die Klarheit der ſynthetiſchen Methode ohne die Langwierigkeit derſelben zu empfinden.

(*) Wenn gleich die Quadratur der ganzen Cycloide von der Quadratur des Winkels abhängt, ſo haben doch Wreen und Hygens Beyſpiele gegeben, daß man einzelne Stücke oder Abſchnitte von ihr quadriren könne. Sie haben gefunden, daß, wenn man in der Weite des halben Radius vom Scheitelpunkt eine Ordinate zöge, dadurch ein Segment entſtehe, welches ſo groß iſt, als ein in dem beſchreibenden Cirkel verzeichnetes gleichſeitiges Dreyeck. Leibnitz hat ein ſchiefes Segment auszurechnen gelehrt. Bernoulli hat aber das vollkommſte hierinn geleiſtet. Man ſehe *Bernoulli Oper. T. 1. p. 322. Montucla. Hiſtoire des Math. T. 1. p. 59.* B.

Die erſte ganz mechaniſch Aufloͤſung. Nehmet zwey geebnete Bretter und leget ſie aufs genaueſte ſo, daß das eine perpendiculair und das andere horizontal ſey. Das horizontale muß 2 ſehr ebene und glatte Falzen haben, zwiſchen welchen man genau und ohne viele Kraft einen Cylinder halten kann, deſſen cirkelfoͤrmige Grundflaͤchen ſich ſehr genau an die Falzen anlegen. Die Baſis gegen die Seite des verticalliegenden Brettes muß mit einer Spitze oder einem Stuͤckchen perpendiculairſtehender Kreide oder Bleyſtift verſehen ſeyn, welches nur ſo weit hervorſtehet, als eben noͤthig iſt, das verticalſtehende Brett ſchwach zu beruͤhren. Aus dieſer Vorbereitung erhellet es, wenn man denn Cylinder zwiſchen den 2 Falzen ſich herum waͤlzen laͤßt, daß das aͤuſſerſte der Spitze oder die Kreide auf der verticalſtehenden Flaͤche eine Linie zeichnen werde, welche eine Cycloide iſt. (§. 1).

Anmerkung. 1) Es muͤſſen die Falzen genau in einer graden Linie ſeyn; ſie muͤſſen parallel und durch eine fettigte Materie ſchluͤpfrig gemacht ſeyn, damit die Grundflaͤchen des Cylinders, der ſich immer in der naͤmlichen Flaͤche herumwaͤlzt, nicht den geringſten Anſtoß leiden, und daß alſo der Cylinder ſo richtig, als moͤglich, fortlaufe.

2) Die beſchreibende Spitze muß gegen das Centrum der Grundflaͤche des Cylinders, ſo viel, als moͤglich iſt, vorgeruͤckt werden, damit der Vorſprung der Falzen ſie nicht aufhalte, oder in dem untern Theil der Umwaͤlzung in der Bewegung hindere.

3) Damit man eine ganze Umwaͤlzung der Grundflaͤche des Cylinders genau auf der Verticalflaͤche abgezeichnet bekomme, ſo laͤſſet man den Cylinder ſich ſo herumdrehen, daß man das Ende einer Revolution, eine ganze Revolution, und den Anfang einer dritten habe, ſo erhaͤlt man dadurch 2 Punkte, welche die Baſis der ganzen Revolution beſtimmen und folglich erhaͤlt man eine ganze Cycloide.

4) Will man die Länge der Peripherie der beſchreibenden Fläche in einer graden Linie haben, ſo ſtecke man in der äuſſern Fläche des Cylinders eine ſehr feine Spitze, die ein ganz wenig hervorragt. Man überziehe die Horizontalfläche, worüber der Cylinder ſich bewegen ſoll, mit einer dünnen Lage von Wachs. Nun wird der Eindruck der Spitze den Anfang und das Ende der Revolution zeigen. Dieſe Linie iſt die beſchreibende rectificirte Peripherie.

§. 18.

Zweyte Auflöſung, die zum Theil mechaniſch, zum Theil geometriſch iſt. Wir ſagen, daß dieſe Auflöſung zum Theil **mechaniſch** ſey, weil ſie ſich auf die Rectification der Peripherie des Cirkels gründet. Ein Problem, welches man noch nicht geometriſch aufgelöſet hat. Sie iſt aber nichts deſtoweniger zum Theil geometriſch, weil man aus der vorausgeſetzten Rectification des Cirkels die bekannten Eigenſchaften der zu beſchreibenden krummen Linie herleitet. Dieſes werden wir ſogleich ſehen.

Es ſey AD die halbe Baſis einer zu beſchreibenden halben Cycloide. (Fig. 106) Dieſe Grundlinie ſey der halben Peripherie BMD ihres beſchreibenden Cirkels gleich. (Dieſe muß man mechaniſch nach §. 17. determiniren oder man muß einen Cylinder mit einem biegſamen Maaße umlegen, und es hernach wieder in eine grade Linie ausbreiten). Man richte an dem Endpunkt D dieſer halben Baſis den Diameter BD des beſchreibenden Cirkels perpendiculair auf und über demſelben beſchreibe man den halben Cirkel und theile alsdenn die nämliche halbe Peripherie BMD in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. (Jemehr Theile man macht, deſto genauer iſt die beſchriebene Linie). Man theile die Linie AD in eben ſo viele Theile, z. E. in 6 und ziehe durch die Theilungspunkte O, M, L, K, I Parallellinien mit AD. Man gebe OP 5 Theile von AD; MH 4; LG 3; KF 2 und der Linie IC einen.

Nun behaupte ich, wenn man die Punkte A, P, H, G, F, C, B, durch eine aneinanderhängende krumme Linie verbindet, daß man eine halbe Cycloide bekomme, wovon BMD der halbe beſchreibende Cirkel ſeyn wird.

Beweis. Vermöge der Conſtruction iſt AD = der halben Peripherie BMD. Folglich iſt der 6te Theil von AD ſo groß als der 6te Theil von BMD. Folglich iſt OP, welche 5 Theile von AD iſt (Conſtr.) ſo groß, als der Bogen BO, welcher auch $\frac{5}{6}$ von BMD oder AD hat. Folglich iſt der Punkt P in einer Cycloide, wovon BMD der halbe erzeugende Cirkel iſt (§. 6) und ſchließt man in Anſehung der Punkte G und H auf eine ähnliche Art, ſo wird man finden, daß ſie in der nämlichen krummen Linie ſind. Wiederhohlet man dahero die nämliche Conſtruction auf der andern Seite von BD, ſo wird man eine ganze Cycloide bekommen. W. z. Th. u. z. E. W. (*a*).

§. 19.

Erklärung. Man ſtelle ſich vor, daß die halbe Cycloide oder eine beliebige krumme Linie BCA (Fig. 107), die immer auf die nämliche Seite hohl iſt, mit einem Faden umwickelt ſey; daß dieſer Faden ſich nach und nach von der krummen Linie durch ſeinen Endpunkt B ſo abwickle, daß ſein abgewickelter Theil FC beſtändig genau nach einer graden Linie ausgedehnt ſey: ſo erhellet, daß der Punkt B in dieſer Bewegung eine andere krumme Linie BFM beſchreiben werde. (*b*) Die

(*a*) Mir ſcheint dieſe Conſtructian der Cycloide leichter, kürzer und eines einfachern Beweiſes fähig, als die man ordentlich in den Büchern findet.

(*b*) Dieſes wird beſonders im §. 22. bewieſen werden. Man wird

Die Linie der Evolution (*) nennet, und alsdenn heißt die Linie BCA die Evolute und die Theile des Fadens, wie CF, die ſich von BCA abgewickelt haben, heiſſen die Halbmeſſer der Krümmung.

§. 20.

Erſter Zuſatz. Aus dieſer Entſtehung der Linie der Evolution folgt: 1) Daß ein jeder Halbmeſſer der Krümmung FC allemal dem Theil BC dieſer krummen Linie, wovon er abgewickelt iſt, gleich ſey. 2) Daß dieſer Halbmeſſer eine Tangente der Evolute in dem Punkt C ſey, in welchem er ſie noch berührt. Denn verlängert man FC gegen P, ſo erkennet man, da ſich die Evolute in C krümmet, daß ſie die Richtungslinie CP ummittelbar nach dieſem Punkt verlaſſe und, da der Faden vermöge der Bedingung in die krumme Linie nicht hineingehet, ſo muß er ſie offenbar nur in einem C Punkt berühren.

§. 21.

Zweyter Zuſatz. Wenn man an dem Endpunkt F eines jeden Halbmeſſers der Krümmung FC eine Perpendiculairlinie FG auf dieſem Radius aufrichtet, ſo behaupte ich, daß dieſe die Tangente der Linie der Evolution BFM ſey, und daß folglich alle Halbmeſſer der Krümmung gegen die Linie der Evolution perpendiculair ſind.

Beweis. Wenn FG die krumme Linie in irgend einem an-

---

wird auch im §. 23. zeigen, daß ſie beſtändig auf der nämlichen Seite hohl oder erhaben ſey.

(*) Developpante oder Linie, die durch die Abwickelung der krummen Linie BCA entſtanden iſt. Ich werde ſie im teutſchen immer die Linie der Evolution nennen.

andern Punkt H nach M zu berührte (*a*) oder eine Neigung darzu hätte, ſo würde 1) der Halbmeſſer der Krümmung an dieſem Punkt H, ſo wie er EH wird, FCP in L durchſchneiden und LH>LF ſeyn. (Denn, weil LF auf FG perpendiculair ſtehet (Binding.), ſo muß LH ſchief gegen dieſelbe ſeyn): Folglich wäre LH + LE>LF + LE. Nun iſt aber LF + LE = FC + CL + LE = BC + CL + LE. (Weil FC = BC (§. 20); Folglich wäre LH + LE oder HE oder die krumme Linie BCE>BC + CL + LE. Folglich wäre der Theil CE dieſer krümmen Linie gröſſer als CL + LE, welches unmöglich iſt.

2) Ziehet man den Halbmeſſer der Krümmung an irgend einen Punkt K der Linie der Evolution, der zwiſchen B und F lieget, ſo kann man, wie vorhin beweiſen, daß die verlängerte Perpendiculairlinie FG die krumme Linie in dieſem Punkt nicht berühren oder durchſchneiden kann. Denn ſo bald der Halbmeſſer der Krümmung RK wird und man die grade Linie CK und die Sehne CR ziehet, ſo iſt RK = RB (§. 20) und der Bogen RC> als die Sehne RC; Folglich RB + dem Bogen RC oder der ganze Bogen BC>RK + der Sehne RC Nun iſt aber RK + der Sehne RC> als die grade Linie CK und CK> als CF (denn da CF nach der Bedingung als perpendiculair auf FG angenommen worden iſt, ſo muß CK ſchief gegen dieſelbe ſeyn, und folglich CK> CF) Folglich iſt noch vielmehr der Bogen BC>CF. Dieſes iſt aber unmöglich, weil BC = CF (§. 20); Folglich berührt die Perpendiculairlinie FG die Linie der Evolution nur in einem einzigen Punkt F.

3)

(*a*) Man hat H ziemlich weit von F angenommen, damit die Figur deutlich würde. Dieſes benimmt aber der Stärke des Beweiſes nichts. Denn dieſer erſtrecket ſich auf jeden Punkt.

3) Allein da dieſes noch nicht zum Beweiſe hinlänglich iſt, daß FG eine Tangente ſey, weil es möglich iſt, daß eine Secante mit einer krummen Linie auch nur in einem einzigen Punkt zuſammenkomme, ſo iſt noch dieſes zu zeigen, daß FG gegen B oder M verlängert BFM nicht in dem Punkt F durchſchneide.

Wäre ſie in F eine Secante, ſo würde ſie zwiſchen dem Theile FB dieſer krummen Linie und dem Halbmeſſer der Krümmung FC durchgehen, und würde alſo mit der krummen Linie BCA in einem Punkt y, der zwiſchen B und C iſt, zuſammenſtoſſen, oder ſie würde zwiſchen dem Bogen FM und dem Radius FC durchgehen und alſo einen Halbmeſſer der Krümmung HE in einem Punkt u, der zwiſchen den Endpunkten H und E dieſes Halbmeſſers enthalten iſt, durchſchneiden. Dieſe beyden Fälle ſind aber unmöglich.

Denn ginge erſtlich FG als die Perpendiculairlinie auf FC nach y und man zöge die Sehne Cy, (die ich als ausgezogen annehme, ſo wie Fy und Fu, um die Verwirrung zu vermeiden), ſo würde $Cy > CF$ ſeyn. Es iſt aber $CF =$ dem Bogen CB (§. 20); Folglich wäre $Cy >$ als der Bogen CB, welches unmöglich iſt.

Solte hingegen FG auf die andere Seite nach u gehen, ſo wäre $uL > FL$; Folglich $uL + LE > FL + LE$. Nun iſt aber $FL + LE >$ als die krumme Linie BE, die ſo groß iſt, als der Radius HE (§. 20). Folglich wäre $uL + LE$ oder $uE > HE$. Eine neue Unmöglichkeit!

Folglich berührt die Perpendiculairlinie FG die Linie der Evolution nur in einem einzigen Punkt F ohne ſie zu durchſchneiden; und da dieſer Schluß auf alle Punkte dieſer Linie angewendet werden kann, ſo folgt daraus, daß alle Halbmeſſer der Krümmung

mung einer Evolute, die beſtändig nach einer Seite hohl iſt, gegen ihre Linie der Evolution perpendiculair ſind. Denn, wenn man vor einer Perpendiculairlinie auf einer krummen Linie ſpricht, ſo verſtehet man dadurch eine Perpendiculairlinie gegen eine grade Linie, die durch den Punkt, wo dieſe grade Linie die krumme Linie berühret, gezogen iſt.

§. 22.

Dritter Zuſatz. Dieſes beweiſet, daß die Linie der Evolution BFM würklich eine krumme Linie ſey. Denn wäre BFM eine grade Linie, ſo wäre der Theil derſelben FH es auch. Folglich würden die 3 Winkel des Triangels LFH mehr als 2 Rechtewinkel enthalten. Denn (§. 21) von den beyden Winkeln KFH und LHF würde ein jeder ein rechter Winkel ſeyn. Dieſes iſt abſurd; Folglich muß BFM eine krumme Linie ſeyn.

§. 23.

Vierter Zuſatz. Folglich läßt eine Tangente FG an der Linie der Evolution BFM dieſe krumme Linie ganz auf der einen Seite; Folglich iſt die Linie der Evolution einer krummen Linie, die beſtändig auf einer Seite hohl iſt, auch mit ihrer Evolute immer gegen einerley Seite hohl iſt. Weil ſie keinen Beugungs oder Widerkehrungspunkt haben oder ſich nicht nach einer andern Seite drehen könnte, ohne von ihrer Tangente durchſchnitten zu werden.

§. 24.

Lehnſatz. Zwo krumme Linien BA und BM (Fig. 107) die immer gegen eine Seite hohl ſind, und beyde in B ihren Anfangspunkt haben, können unmöglich ſo beſchaffen ſeyn,

daß

daß alle Linien, die gegen die eine Perpendiculair ſind, zu gleicher Zeit auch auf der andern Perpendiculair ſind.

Beweis. Solte dieſes ſeyn, ſo müßten nothwendig alle Tangenten der einen mit den correſpondirenden Tangenten der andern parallel ſeyn. (*a*) Dieſes iſt aber unmöglich. Es iſt auch gleich anfangs augenſcheinlich, wenn 2 krumme Linien ſich durchkreuzen oder eine Neigung haben, ſich zu durchkreuzen, daß ihre Tangenten nicht parallel ſeyn können, weil dieſe ſich auch durchkreuzen müſſen.

2) Wenn ſie ſich nur in dem Anfangspunkt B berühren, ſo können die 2 Tangenten, die in dieſem Punkt zuſammen fallen, würklich als parallel angeſehen werden. Allein die Tangente der einen, die an dem Punkt, der unmittelbar auf dem Berührungspunkt folgt, gezogen iſt, wird nicht mit der correſpondirenden Tangente der andern parallel ſeyn können. Denn die Tangenten können als kleine Seiten ihrer krummen Linien betrachtet werden. Gibt es alſo 2 derſelben, die gänzlich in einander fallen, ſo können die 2 folgenden kleinen Seiten, oder die 2 folgenden kleinen Tangenten, die von dem nämlichen Endpunkte ausgezogen ſind, nicht parallel ſeyn; und folglich kann die Linie, die gegen die eine perpendiculair iſt, nicht gegen die andere perpendiculair ſeyn. Dieſes iſt ſehr wichtig und merkwürdig.

§. 25.

(*a*) Denn eine Perpendiculairlinie gegen eine krumme Linie, iſt diejenige, die mit der Tangente, die an dem Punkt, wo dieſe Perpendiculairlinie die krumme Linie berühret, gezogen iſt, rechte Winkel macht. Wäre alſo die nämliche Linie gegen 2 krumme Linien perpendiculair, und man zöge die Tangenten an die Berührungspunkte, ſo müßten dieſe Tangenten gegen die nämliche Linie perpendiculair und folglich unter ſich parallel ſeyn.

§. 25.

Zuſatz. Wenn alſo 2 krumme Linien, deren Natur man nicht kennet, ſo beſchaffen ſind, daß, wenn ſie immer gegen eine Seite hohl ſind und einerley Anfangspunkt haben, alle Perpendiculairlinien der einen auch auf der andern perpendiculair ſind, ſo kann man daraus ſchlieſſen, daß dieſe 2 Linien nothwendig eine einzige und die nämliche krumme Linie ſind. Denn ſonſt wäre dieſe Eigenſchaft unmöglich. (§. 24.)

§. 26.

Aufgabe. Bey einer gegebenen halben Cycloide BCA die Natur ihrer Linie der Evolution BFM zu beſtimmen. (Fig. 108).

Auflöſung. 1) Man conſtruire zuerſt das Rechteck DR und nun erinnere man ſich, daß ein jeder Halbmeſſer der Krümmung CF der Evolute BCA eine Tangente dieſer Evolute ſey. (§. 20). Ziehet man folglich, von dem Berührungspunkt C mit der Grundlinie AD die Parallellinie CH, um die Sehne HB ziehen zu können, ſo wird dieſe Sehne mit CF parallel ſeyn. (§. 11). Folglich iſt der Winkel BLF = HBL, als Wechſelwinkel. Wenn man folglich einen Cirkel auf die Perpendiculairlinie LO = BD, conſtruirt, ſo wird dieſer Cirkel dem Halbmeſſer der Krümmung CF in einem Punkt F ſo ſchneiden, daß der Bogen FL = dem Bogen BH ſey. (*a*) Nun iſt aber der Bogen BH = der graden Linie

---

(*a*) Weil der Winkel BLF die Helfte des Bogens FL und der Winkel HBL die Helfte des Bogens BH zu ſeinem Maaße hat; da folglich der Winkel BLF und HBL ſich gleich ſind, ſo iſt auch das Maaß derſelben ſich gleich und folglich auch das Duplum ihres Maaßes, oder die Bögen FL und BH ſind ſich gleich.

Linie CH (§. 5) und CH = BL, (wegen des Parallelogramms BLCH); Folglich iſt der Bogen FL der graden Linie BL gleich.

2) Wird itzt die krumme Linie BCA ganz abgewickelt ſeyn, ſo wird der Faden dieſe Evolute nur in dem Punkt A berühren und folglich auf AD perp ndiculair ſeyn. (§. 13) Folglich wird der Halbmeſſer der Krümmung alsdenn die Lage AM haben. Wenn man folglich auf RM = AR = BD einen Cirkel beſchreibt, und FT mit BR parallel ziehet, ſo iſt der Bogen TR gleich dem Bogen FL = der graden Linie BL. (1); Folglich iſt die grade Linie LR gleich dem Bogen TM. Denn es iſt die halbe Peripherie MTR = AD = BR. (Conſtr.).

3) Der Winkel TRL = FLB, weil der Bogen TR = dem Bogen FL. Folglich iſt die Sehne TR mit der Sehne FL parallel und von gleicher Gröſſe. Folglich iſt LR = FT. Weil folglich LR = dem Bogen TM (2), ſo iſt FT = dem Bogen TM. Das nämliche geſchiehet in jedem ſo wie F determinirten Punkt eines jeden Halbmeſſers der Krümmung. Folglich machen alle dieſe Punkte eine halbe Cycloide BFM (§. 6), die vollkommen der krummen Linie BCA gleich iſt.

4) Wenn man folglich FO mit der Sehne TM parallel ziehet, ſo wird dieſe die Tangente an der halben Cycloide ſeyn. (§. 12). Da nun aber TR mit FL und TM mit FO parallel iſt, ſo erhellet, daß der Winkel OFL = MTR ſey. Da nun MTR ein rechter Winkel iſt, ſo iſt es der Winkel OFL gleichfals. Folglich iſt der Halbmeſſer der Krümmung CF perpendiculair gegen den Berührungspunkt der Tangente OF. Er iſt es folglich auch gegen die halbe Cycloide, zu welcher der Berührungspunkt gehört; Folglich ſind alle Halbmeſſer der Evolute BCA gegen eine halbe Cycloide perpendi-

culair, die ihren Anfangspunkt in dem Scheitelpunkt B dieſer Cycloide hat, und die ihr alſo gleich und gegen die nämliche Seite hohl ſeyn muß. Es ſey aber die Linie der Evolution der krummen Linie BCA, welche ſie will, ſo ſind alle Halbmeſſer der Evolute auch perpendiculair gegen die Linie der Evolution, (§. 21), welche mit ihr von einem Punkte anfangt und gegen eben die Seite, wie BCA hohl iſt. (§. 23) Folglich iſt die Linie der Evolution der halben Cycloide BCA auch eine halbe Cycloide BFM, die ihrer Evolute vollkommen gleich iſt. W. z. E. W.

Da dieſer Beweis in der Folge wichtig wird, ſo iſt es nützlich ihn mit wenigen Worten zu wiederhohlen.

Die halbe Cycloide, die auf der Baſis BR=AD mit einem Cirkel RM conſtruirt wird, der dem beſchreibenden Cirkel BD der Evolute BCA= iſt, hat den nämlichen Anfangspunkt B und iſt mit der Evolute BCA gegen eine Seite hohl. Ferner ſtehen alle Halbmeſſer der Evolute auf der halben Cycloide, deren Baſis BR iſt, perpendiculair. Sie ſtehen aber auch auf der Linie der Evolution von BCA perpendiculair (§. 21); Folglich iſt die halbe Cycloide, die über BR beſchrieben iſt, einerley krumme Linie mit der Linie der Evolution von BCA. Denn ſonſt können nicht alle Linien, die auf der einen perpendiculair ſtehen, auch gegen die andere perpendiculair ſeyn (§. 25); Folglich iſt die Linie der Evolution der Cycloide auch eine Cycloide, die durchaus ihrer Evolute gleich iſt. (*)

§. 27.

(*) Hyghens, der dieſe ſchöne Erſindung machte, zweyfelte, daß es irgend noch krumme Linien gäbe, welche durch die Evolution andere ihnen ähnliche erzeugen könnten. Hr. v. Tſchirnhauſen bewies eben dieſe Eigenſchaft von ſeiner Brennlinie und zeigte zugleich, daß ſie eine Cycloide ſey. Allein Hr. Ber-

§. 27.

Erſter Zuſatz. Weil der Halbmeſſer einer Evolute allemal dem abgewickelten Theil gleich iſt (§. 20), ſo iſt der Bogen CB = CF = CL + LF. Da nun aber der Winkel BLF = HBL iſt, ſo iſt LF = HB und HB = CL, weil die Figur BHCL ein Parallelogramm iſt. (§. 26) Folglich iſt LF = CL. Folglich iſt CF das Duplum von CL und auch das Duplum von der Sehne HB = CL. Folglich iſt der Bogen der Cycloide CB, welcher jederzeit dem Halbmeſſer CF gleich iſt, auch allemal das Duplum der correſpondirenden Sehne HB des beſchreibenden Cirkels DBH. Dieſes iſt wohl zu bemerken.

§. 28.

Zweyter Zuſatz. Aus dem nämlichen Grunde, da MR = AR = BD iſt, ſo iſt der Halbmeſſer der Krümmung AM = 2 AR = 2 BD. Es iſt aber AM = der halben Cycloide ACB (§. 13 20). Folglich iſt ACB = 2 BD, oder die krumme Linie ACB einer halben Cycloide iſt 2 mal ſo groß, als der Diameter des beſchreibenden Cirkels; Folglich iſt die ganze Länge der krummen Linie einer Cycloide 4 mal ſo groß, als der Diameter ihres beſchreibenden Cirkels (*a*).

Bernoulli hat bewieſen, daß dieſe Eigenſchaft nicht bloß bey der hier erklärten gewöhnlichen Cycloide ſtatt finde, ſondern daß alle möglicher Cycloiden durch ihre Evolution ähnliche Cycloiden beſchrieben. Ja er zeigt ſo gar an ſeiner berühmten logarithmiſchen Spirallinie, daß ſie durch ihre Evolution nicht bloß eine ähnliche, ſondern die nämliche Spiral hervorbringe. *Bernoulli Op. T. III. p* 450, 458. *ſqb.*

(*a*) Hier iſt alſo eine rectificirte krumme Linie, die einer bekannten graden Linie gleich iſt. Bemerket indeſſen, daß dieſe Re-

§. 29.

Dritter Zuſatz. Wenn man die halbe Cycloide ACB mit dem Faden AM, mit ihr von einerley Gröſſe iſt, umwickelt, und vom M ſich ſo gegen B bewegt, daß der Theil des Fadens, der noch nicht an der krummen Linie liegt, beſtändig eine grade Linie ſey, ſo erhellet, daß das äuſſerſte Ende deſſelben M die nämliche halbe Cycloide BFM beſchreiben werde. Denn, wenn ſich der Faden wieder aufwickelt, ſo wird er vollkommen die nämliche nur aber entgegengeſetzte Lage wie beym Abwickeln nehmen. Anſtatt alſo den Faden über die halbe Cycloide ACB gegen B zu legen, darf man ihn nur an die halbe Cycloide AE anlegen, indem man von M gegen E ſich bewegt. Denn dieſe Cycloide hat den nämlichen Anfang und iſt vollkommen von einerley Gröſſe und Lage mit der krummen Linie ACB Indem ſich nun der Faden AM von der halben Cycloide ACB abwickelt und ſich auf ihre Begleiterinn AE aufwickelt, ſo wird er durch ſeinen Endpunkt M eine ganze Cycloide BME beſchreiben, die ſo groß iſt als die beyden halben Cycloiden AB und AE zuſammen.

§. 30.

Vierter Zuſatz. Wenn man folglich A für den Punkt annimmt, an welchem ein Faden AM aufgehenket worden, der durch einen ſchweren Körper an ſeinem äuſſerſten Ende M ausgeſpannt wird, und wenn man die krummen Linien AB und AE für cycloidiſche Bleche anſiehet und wenn man dieſen aufgehengten Körper in der Ebene dieſer krummen Linie oſciliren läßt, ſo werden ſeine Schwingungen in einer Cycloide BME geſchehen.

§. 31.

---

tification nicht vollkommen ſey. Denn ſie hängt von der Vorausſetzung ab, daß eine andere krumme Linie einer graden Linie gleich ſey, oder daß die Baſis der Cycloide der Peripherie des beſchreibenden Cirkels gleich ſey. Dieſe Gleichheit läßt ſich aber nicht geometriſch beſtimmen.

§. 31.

Anmerkung. Dieſes ſind die Eigenſchaften der Cycloide, die der Grund zu der unvergeßlichen Entdeckung des Herrn Hyghens waren, als er die Geſetze der Bewegung eines Körpers in dieſer krummen Linie aufzuſuchen ſich bemühete. Er fand, daß ein Körper, der durch ſeine Schwingungen in einer umgekehrten Cycloide AFK (Fig 109) ſich bewegte, deren Baſis AK mit dem Horizont parallel iſt, juſt in der nämlichen Zwiſchenzeit an dem tiefſten Punkt F dieſer krummen Linie komme, er mag einen groſſen oder kleinen Bogen beſchreiben. (*) Der Beweis, den dieſer groſſe Geometer davon gab, iſt ſehr ſchwer. Hr. de la Hire bemühte ſich in ſeiner Mechanick einer zierlichern zu geben (*a*). Allein Herr Johann Bernoulli bemerkte offenbare Paralogismen und entdeckte einen ſehr einfachen Beweis, deſſen Gründe meiner Meinung nach vorher erklärt werden müſſen.

§. 32.

Erläuterung der Gründe, worauf der Beweis des Iſochroniſmus in der Cycloide ſich ſtützet:

I. Wenn ein Körper von den Punkten B und K (Fig. 109) nach der krummen Linie AFK herunter fällt, ſo verhält ſich die Geſchwindigkeit, die er in den Punkten C und H hat, die unterhalb den Punkten B und K liegen, von welchen er zu fallen anfing, zu einander, wie die Quadratwurzeln

 ihrer

(*) Hr. Bernoulli hat beobachtet, daß auſſer dieſer Cycloide es unzählige krumme Linien gäbe, wodurch ein ſchwerer oſcillirender Körper ſeine Schwingungen iſochroniſch mache. Man ſehe *Oper. Ioh. Bern. T. 1. p.* 52. 61. B.

(*a*) Gedruckt zu Paris in 12 im Jahr 1695. S. 421.

ihrer wahren Höhen MP und LO, oder die Geſchwindigkeit, die der Körper in C erhält, wenn er von B fiel, verhält ſich zur Geſchwindigkeit des Körpers in H, wenn er von K fiel $= \sqrt{MP} : \sqrt{LO}$.

Würklich zeiget die Erfahrung, daß ein Körper, welcher vermöge ſeiner Schwere auf einer ſchief liegenden Fläche herunter fällt, genau die nämliche Geſchwindigkeit am Ende dieſer Fläche erhalte, als wenn er durch die ganze verticale Höhe gefallen wäre. Es kann aber eine krumme Linie als eine Reihe von Ebenen betrachtet werden, die unter ſo ſtumpfen Winkeln zuſammenſtoſſen, daß ſie einer einzigen ſchiefliegenden Fläche gleich ſind, die mit der krummen Linie von einerley Höhe iſt. Man hat aber im §. 101. der Parabel geſehen, daß die Höhen H und h, die ein bewegter Körper nach ſeiner Schwere durchlauft, ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten CC und cc oder daß $CC : cc = H : h$. Folglich $C : c = \sqrt{H} : \sqrt{h}$ und folglich hier $= \sqrt{MP} : \sqrt{LO}$.

II. Eine krumme Linie AFK kann in ſo kleine Theile CD oder HG getheilet werden, daß die Geſchwindigkeiten eines bewegten Körpers, die er im Fallen von B und K erhielte, ſich nicht merklich vergröſſern, wenn er die kleinen Linien CD und HG durchlauft. Denn man kann ſie ſich ſo ausnehmend klein vorſtellen, daß die Zeit, die er zum Durchlaufen anwendet, kleiner als jede Gröſſe ſey. Es kann alſo die Zunahme der Geſchwindigkeit während dieſer Zeit in Anſehung der vorhin erhaltenen Geſchwindigkeit für nichts geachtet werden, oder die erlangte Geſchwindigkeit kann während der Zeit, daß der bewegte Körper eine von den kleinen Linien CD durchlauft, für gleichförmig angeſehen werden, daß ſich alſo die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers nur am Ende einer jeden kleinen Theils der krummen Linie, im Durchlaufen dieſes kleinen Theils aber ſich gar nicht verändere. Dieſes iſt leicht

zu

zu begreifen, wenn man ſich einbildet, daß die Schwere ihre Würkungen gegen den bewegten Körper nur nach ſehr kleinen Zwiſchenräumen wiederhohle. Dadurch bleibt die Geſchwindigkeit während jeder kleinen Zwiſchenzeit gleichförmig, ob ſie gleich zu Ende einer jeden durch die vermehrten Züge der Schwere eine Zunahme erhält.

III. Bey einer gleichförmigen Bewegung, wenn ſich die Geſchwindigkeiten C und c unter einander verhalten, wie die durchlaufenen Räume S und s, ſind die Zeiten, in welchen ſie dieſe Räume durchlaufen haben, ſich gleich. Denn man erhält die Geſchwindigkeit eines bewegten Körpers, wenn man den durchlaufenen Raum S durch die angewendete Zeit T dividirt, oder $C = \frac{S}{T}$ und $c = \frac{s}{t}$. Vermöge der Bedingung verhält ſich aber $C : c = S : s$. Folglich $\frac{S}{T} : \frac{s}{t} = S : s$. Folglich $\frac{Ss}{T} = \frac{sS}{t}$. Wenn man folglich durch Tt multiplicirt und darauf mit Ss dividirt, ſo iſt $T = t$.

§. 33.

Sechster Hauptſatz. Ein Körper, der ſich durch ſeine Schwere in einer umgekehrten Cycloide bewegt (Fig. 109), deren Baſis AK mit dem Horizonte parallel iſt, beſchreibet in der nämlichen Zeit eine halbe Cycloide KF, in welcher er einen beliebigen kleinen Bogen BF durchlauft, oder, ein Körper, der ſich in einer Cycloide bewegt, kommt allemal in gleicher Zeit in den tiefſten Punkt F dieſer krummen Linie, ob er gleich von verſchiedenen Höhen herunter fällt; und dieſes verſteht man, wenn man ſagt, daß die **Vibrationen oder Oſcillationen eines Pendels in einer Cycloide iſochroniſch oder von einer gleichen Dauer ſind.**

Beweis des Iſochroniſmus in der Cycloide.

I. Stellet euch vor, daß man den Bogen BF in eine ſehr groſſe Anzahl gleicher Theile CD getheilet habe Und um der Einbildung zu Hülfe zu kommen, ſo ſey CD $= \frac{1}{100}$ von BF, daß alſo BF $=$ 100 CD. Gedenket euch auch die halbe Cycloide KF in eben ſo viele Theile als der Bogen BF ſo getheilet, daß HG $= \frac{1}{100}$ von KF oder daß KF $=$ 100 HG. Setzet noch, daß CD der 30te Theil von BF ſey und machet den Anfang im zählen von dem Punkt B. Es ſey auch HG der 30te Theil von KF von dem Punkt K angerechnet. So iſt BC $=$ 29 CD und CF $=$ 71 CD. Eben ſo iſt KH $=$ 29 HG und HF $=$ 71 HG. Weil folglich 100 HG : 100 CD $=$ 71 HG : 71 CD, ſo verhält ſich KF : BF $=$ HF : CF oder KF : HF $=$ BF : CF. Eben ſo verhält ſich 71 CD : 71 HG oder CF : HF $=$ CD : HG.

II. Man ziehe itzt die Ordinaten CP, HO und BM und die Sehnen FS, FR, und FT. Da nun KF : HF $=$ BF : CF (I) ſo iſt auch FL : FT $=$ FR : FS. Denn die Sehnen des beſchreibenden Cirkels ſind jederzeit die Hälften der correſpondirenden cycloidaliſchen Bögen (§. 27). Folglich verhält ſich $\overline{FL}^2 : \overline{FT}^2 = \overline{FR}^2 : \overline{FS}^2$ (A). Nun iſt (Geom.) $\overline{FT}^2 = FL \times FO$; $\overline{FR}^2 = FL \times FM$ und $\overline{FS}^2 = FL \times FP$. Folglich kann das Verhältniß A folgendes werden: $\overline{FL}^2 : FL \times FO = FL \times FM : FL \times FP$, oder indem man durch FL dividirt, FL : FO $=$ FM : FP. Folglich FL — FO : FO $=$ FM — FP : FP, oder LO : FO $=$ MP : FP. Folglich verhält ſich FP : FO $=$ MP : LO. Folglich $\sqrt{FP} : \sqrt{FO} = \sqrt{MP} : \sqrt{LO}$, wie die Geſchwindigkeit, die er in C erhält, wenn er von B fällt, zur Geſchwindigkeit, die er in H erhält, wenn er von K gefallen iſt. (§. 32).

III.

III. Allein es verhält ſich $FP : FS = FS : FL$. (Geom.); Folglich iſt $FP = \frac{\overline{FS}^2}{\overline{FL}}$ und aus dem nämlichen Grunde $FO = \frac{\overline{FT}^2}{\overline{FL}}$; Folglich verhält ſich $FP : FO = \overline{FS}^2 : \overline{FT}^2$ oder $\sqrt{FP} : \sqrt{FO} = FS : FT = CF : HF$. (§. 27) $= CD : HG$. (I); Folglich $CD : HG = \sqrt{FP} : \sqrt{FO} = \sqrt{MP} : \sqrt{LO}$ (II), wie die Geſchwindigkeit in C zur Geſchwindigkeit in H: Folglich verhält ſich die Geſchwindigkeit, die der Körper in C erhält, wenn er von B gefallen iſt, zur erhaltenen Geſchwindigkeit in H, wenn er von K gefallen iſt, wie $CD : HG$. Es ſind aber die erhaltenen Geſchwindigkeiten während daß er die ausnehmend kleinen Raume CD und HG durchlauft, gleichförmig (§. 32); Folglich ſind die Zeiten, die zur Durchlaufung dieſer Theile der krummen Linie angewendet wurden, ſich gleich (§. 32). Folglich wird die Summe aller CD oder der ganze Bogen BF in der nämlichen Zeit durchlaufen, in welcher die Summe aller HG oder die ganze halbe Cycloide KF durchlaufen wird. W. z. E. W. (*).

(*) Zu dieſer ungemeinſchätzbaren Erfindung des Hyghens ſetze ich noch eine Eigenſchaft dieſer Cycloide hinzu, die ſehr bewundernswürdig iſt. Dieſe umgekehrte ordentliche Cycloide iſt auch die Linie, nach welcher ſchwere Körper, wenn ſie ſo ſchnell als möglich, von einem Punkt A nach dem Punke E (Fig. 108) fallen ſollen, fallen müſſen. Sie iſt alſo, die von dem Hrn. Bernoulli erfundene *Linea Brachyſtochrona*. Natürlicher Weiſe ſolte man glauben, daß da die Diagonallinie AE der kürzeſte Weg iſt, daß ein Körper dieſe Linie durchlaufen müſſe. Es iſt zwar dieſe Linie der kürzeſte Weg, aber nicht derjenige, auf welchem der Körper die möglichſt größte Geſchwindigkeit erhält. Schon Galilaeus merkte, daß es eine

§. 34.

Gebrauch der Cycloide bey der Verfertigung der Pendeluhren. Man weiß, daß eine Uhr eine Maſchine

---

eine krumme Linie ſeyn müſſe, fand aber nicht die wahre. Der unſterbliche Geometer Johann Bernoulli löſte dieſes Problem auf und legte es darauf auch andern Geometern zur Auflöſung vor. Damals war ein goldenes Zeitalter; glückliche Zeiten für die Mathematick und Naturlehre, die Zeit der größten Nacheiferung; wo die erſten Genies von Europa durch Vorlegung ſchwerer und nützlicher Aufgaben wechſelsweiſe ihren Scharfſinn prüften. Ein Zeitpunkt, den ich nie ohne Rührung und ohne ein gewiſſes warmes Gefühl der Hochachtung und des Vergnügens denken kann. Teutſchland, Engelland, Frankreich und die Schweitz theilten bey jener Aufgabe die Ehre der Erfindung, indem ein Leibnitz, Newton, Hoſpital und Jacob Bernoulli dieſes ſchwere Problem auflöſeten. Aber die Ehre, die die Geometrie davon trug, war eine der größten. So verſchieden auch die Wege waren, die dieſe groſſen Geiſter bey ihrer Erfindung betraten, ſo angenehm war das Erſtaunen, da ſie ſich alle zuletzt an einerley Ziel befanden. Ein Beweis, wie ſicher deine Grundſätze ſind, erhabene Mathematick! Du führteſt ſie alle zu einem Ziele, weil die Natur nur ein einziges dieſesmal beſtimmt hatte. Dieſe iſt ſich immer ſelbſt gleich und handelt jederzeit auf die einfachſte Weiſe. Durch einerley Linie läßt ſie die Körper nach der größten Gleichheit ihre Schwingungen vollenden und ſtöſſet ſie durch dieſelbe aufs ſchnellſte von einem Orte zum andern.

Herr Bernoulli findet zugleich in dieſer Auflöſung eine neue Beſtätigung der galilaeaniſchen Geſetze der Bewegung, weil nach jeder andern Hypotheſe zwo Linien nöthig geweſen wären, dieſe verſchiedene Abſichten zu erfüllen.

Und worzu nützt denn nun dieſe ſo erhabene Erfindung? Man ſchlage die Werke des unſterblichen Bernoulli nach. Dieſer Naturlehrer, Mathematiker und Philoſoph (ſeltene Vereinigung!), dieſer würdige Gelehrte wird zeigen, daß es mehr als unnütze Speculationen, daß es Erfindungen ſind, die nichts geringers, als die Erweiterung und eine gröſſere Vollkommenheit der Dioptrick zur Abſicht haben. B.

ſchine iſt, deren man ſich zur Abmeſſung der Zeit bedienet. Sie beſtehet aus einer Menge von Rädern, die ſich einander die Bewegung mittheilen, die das erſte Rad durch ein Gewicht erhalten hat, welches an demſelben beveſtigt iſt. Iſt dieſe Bewegung nicht gleichförmig, ſo kann man ſich nicht darnach richten, und gehet ſie zu geſchwinde, ſo iſt die Verbindlichkeit die Maſchine zurück zu ſtellen unbequem. Daher entſtehet die Nothwendigkeit, ſo etwas in einer Uhr anzubringen, welches die Bewegung nach richtigen Zwiſchenzeiten aufhalte oder mäßige. Dieſen Endzweck würde man offenbar erhalten, wenn man dem letzten Rade eine Hinderniß ſetzte, welches wechſelsweiſe dem Stoſſe ſeiner Zähne auswiche und widerſtünde. Nun würde aber ein Pendul, welches an einer Spindel beveſtigt wäre, welche von dieſem letzten Rade getrieben würde, dieſe Würkung hervorbringen. Denn wenn die Zähne des Rades an die Zähne der Spindel ſtoſſen, oder kunſtmäßig, wenn ſie die Spindellappen anſtoſſen, ſo drehen ſie dadurch die Spindel um und gehen fort. Das Gewicht aber des Pendels führt die Spindellappen wieder zurück, und es wird alſo das Rad von neuem angeſtoſſen werden, oder deſſen Bewegung zum wenigſten gehindert. So gehet es nun während der ganzen Bewegung der Maſchine. Folglich iſt das Pendul zur Mäßigung ihrer Würkung wohl zu gebrauchen.

Das Gleichförmige iſt aber das wichtigſte bey den Uhren. Es mag ein Künſtler einem jeden ihrer Theile auch die größte Vollkommenheit geben, ſo wird doch die Irregularität der Materie und das Reiben verurſachen, daß die Räder nicht in jedem Augenblick mit gleicher Stärke anſtoſſen (*a*). Dadurch werden

(*a*) Es iſt auch möglich, daß das Gewicht, als das, was die Uhr in Bewegung ſetzt, ſeine Geſchwindigkeit beſchleunige. Da ich einen Kunſtverſtändigen darum befragte, ſo hat er mir verſichert, daß meine Muthmaſſung wahr ſeyn müßte, weil es

werden bey jedem Stoſſe die Schwingungen des Perpendikels ungleich. Es hat die Erfahrung bewieſen, daß ungleiche cirkelförmige Schwingungen in ungleicher Zeit geſchehen. Das Pendul, welches cirkelförmig beweget wird, führt alſo die Spindellappen der Spindel nicht in gleichen Zeiten gegen die Zähne des Steigrades. Ein jeder Zahn gehet alſo bald zu geſchwinde, bald zu langſam. Dadurch entſteht aber eine ungleichförmige Bewegung.

Alle dieſe Unrichtigkeiten würden gehoben ſeyn, wenn das ſtärker oder ſchwächer angeſtoſſene Pendul jederzeit in gleichen Zeiten wieder zurück käme. Nun haben wir aber geſehen (§. 33) daß, wenn es ſeine Schwingungen in einer Cycloide macht, daß ſie alsdenn iſochroniſch oder von gleicher Dauer ſind. Es ſcheinet alſo eine Cycloide auſſerordentlich geſchickt zu ſeyn, Uhren alle durch menſchliche Geſchicklichkeit zu erhaltende Gleichförmigkeit zu geben (*).

§. 35.

Um itzt Perſonen, die keine Kunſtverſtändige ſind, oder die niemals die Bewegung einer Uhr unterſucht haben, begreiflich zu machen, wie das Pendul, welches an der Spindel dieſer Maſchine angebracht iſt, ſich in einer Cycloide bewegen

er beſtändig wahrgenommen hätte, daß eine gut gerichtete Pendeluhr merklich geſchwinder ginge, wenn das Gewicht in eine beträchtliche Tiefe gekommen, und daß er öfters dieſem Uebel abgeholfen habe, wenn er die Uhr öfterer, als gewöhnlich aufgezogen habe.

(*) Man leſe hierüber die Abhandlung der Acad. der Wiſſenſch. zu Paris. Der teutſch. Ueberſetz. 1 Th. Seit. 391. folg. und 6 Band. Seit. 376. folg. B.

gen könne, ſo ſetze man nach der 108te Figur, daß der Punkt A das äuſſerſte der Spindel oder einer horizontalen Stange ſey, die auf ihrer Axe ruhet, und durch den Stoß der Zähne des letzten Rades, welches man das Steigrad nennet, hin und her beweget wird. An dieſem Punkt ſey das Pendul AM aufgehangen, welches aus 2 Theilen beſtehet, wovon der unterſte Theil SM unbeugſam, und der oberſte Theil beugſam iſt, wie ein Faden, kleine Kette, oder ein ſehr dünnes metallenes Blättchen. Einige Linien von dem Punkt A, in welchem das Pendul aufgehenget iſt, entfernt, ſey an der Spindel eine Art von Winkelmaaß, welches man eine Gabel nennet, beveſtigt, deſſen einer Schenkel vertical herunter geht, und der andere dadurch horizontal liegt; Dieſer horizontale Schenkel ſey faſt ſeiner ganzen Länge nach ausgehöhlet, damit der unbeugſame Theil des Pendels dadurch gehen könne, und endlich ſeyen an beyden Seiten von A 2 Bleche AE und AB, die nach dem Bogen einer Cycloide gebeugt ſind, deren Axe BD oder AR die Hälfte des Pendels AM ſey.

Aus dieſer Conſtruction erhellet, daß die Zähne des Steigrades an die Spindellappen der Spindel anſtoſſen und dieſe Spindel dadurch um ihre Axe bewegen werden. Die Gabel, die durch dieſe Bewegung angezogen wird, wird den unbeugſamen Theil des Pendels, der in ihrem horizontalen Arm angebracht iſt, mit ſich fortbewegen. Dieſem wird der beugſame Theil folgen, welcher an eines von den cycloidiſchen Blechen anſtoſſen und ſich beugen oder über daſſelbe ſich aufwickeln wird. Sobald aber das Steigrad aufhöret gegen die Spindellappen zu würken, ſo wird das Pendel durch ſein eigenes Gewicht herunter ſinken, und indem es über die Verticallinie AM heraus gehet, wird es ſeinen beugſamen Theil auf der anderen Cycloide AB aufwickeln. So gehet es nun, ſo lange die Schwingungen dauren, immer fort. Itzt wird man nach dem §. 29. 30 finden, daß der äuſſerſte Punkt M eines ſolchen Pendels nothwendig eine Cycloide oder einen Theil einer

Cycloide beſchreiben werde, und daß alſo ſeine Schwingungen, ſie mögen groß oder klein ſeyn, beſtändig iſochroniſch oder von gleicher Dauer ſeyn werden (§. 33).

§. 35.

Da es ſehr ſchwer iſt, die Bleche nach einem Bogen einer Cycloide ſehr genau zu beugen, und da der biegſame Theil des cycloidiſchen Pendels Veränderungen von Seiten der Luft unterworfen iſt, ſo iſt dieſe vortrefliche Erfindung, welche anfänglich mit allgemeinem Beyfall aufgenommen wurde, abgeſchaffet worden. Man gebraucht wieder cirkelförmig ſich bewegende Pendule. Allein eine Entdeckung, die im ganzen auch nicht glücket, iſt doch allemal zum Theil gut. Man hat bemerket, daß kleine cirkelförmige Oſcillationen, die in Bögen vor ungefehr 3 oder 4° geſchehen, nicht merklich von dem Bogen einer Cycloide unterſchieden ſind (*). Sind folglich dieſe letzteren von einer gleichen Dauer, ſo ſind jene cirkelförmigen es nothwendig auch. Würklich beweiſet es die Erfahrung, daß man mit dieſer Sorgfalt Pendeln bekomme, die ſchwerlich einer gröſſern Vollkommenheit fähig zu ſeyn ſcheinen: Und wir haben dieſelben einer krummen Linie zu verdanken, von welcher man ſich allem Anſehen nach nicht viel verſprechen konnte. Dieſes kann man aus der folgenden Geſchichte der Cycloide beurtheilen.

Hiſtorie

(*) Man leſe unter andern *Mako Phyſ. T. 1.* S. 116. und des ganzen 3ten Abſchnitts 1ſtes Capitel. Es kann gezeiget werden, daß, wenn unter 2 gleichen Pendeln, die in Cirkelbogen oſcilliren, das eine die allerkleinſten Schwingungen und das andere Schwingungen von 3 Graden macht, daß alsdenn auch nach 11382 Vibrationen der Unterſchied noch nicht eine Schwingung betrage. Wenn aber das 2te Pendul nur Schwingungen von 2 Graden macht, ſo wird man dieſen Unterſchied auch noch nach 29000 Schlägen nicht bemerken. Der Vater Boscowich, dieſer gelehrte Jeſuit, hat den Beweis davon gegeben. B.

Hiſtorie der Cycloide.

Dieſe krumme Linie wird immer vor unſern Augen beſchrieben und nichts deſtoweniger findet man nicht die geringſte Spur davon bey den Alten (*). Der Vater Merſennus, einer von den Leuten in Frankreich, die das mehrſte zum Fortgange der höhern Wiſſenſchaften beygetragen haben, bemerkte zuerſt, daß ſie ſich in der Natur befinde. Wie er durch die Straſſen von *Nevers* im Jahr 1615 ging, ſo heftete er ſeine Augen auf einem Nagel eines von den Rädern eines ſich bewegenden Fuhrwerks. Er machte ſeine Betrachtungen darüber, daß

(*) Daß der Herr Abt dieſe Erfindung dem Merſennus beyleget, das geſchiehet mehr aus einer zu zärtlichen Vaterlands-Liebe, als daß es für eine gewiſſe Wahrheit bewieſen werden könnte. Selbſt ein Bernoulli ſetzet in ſeinen Werken das 1599te Jahr für das Jahr der Erfindung, und er nimmt ohne Zweifel den Grund ſeiner Behauptung aus einem Briefe des alten Galilaeus, den er 1639 an ſeinen würdigen Schüler den Torricelli ſchrieb, worinn er ihm die Verſicherung gab, daß er ſchon vor 40 Jahren darüber nachgedacht habe, und ſie ihrer angenehmen Geſtalt wegen für Bögen zu einer Brücke dienlich halte. So viel iſt indeſſen gewiß, daß die Unterſuchungen des Galilaeus über die Cycloide ganz fruchtloß abliefen. Nach ſeinem Tode erfand Torricelli den Innhalt der Fläche derſelben und der edle Schüler des Galilaeus Viviani die Tangenten. Torricelli machte dieſe Entdeckungen in einem Anhange zu ſeinen Werken bekannt. Roberval, dieſer Mann von wunderbarem Character, übertriebenem Ehrgeitz und unanſtändiger Grobheit, ſchrieb einen höchſt pedantiſchen Brief deswegen an den Torricelli. Bernoulli ſagt, man hätte aus der Hitze und Lebhaftigkeit ihres Streites glauben ſollen, daß das Wohl des Vaterlands in Gefahr ſey. So ein elendes Ding, ſagt Hr. *Saverien* iſt es um die Erfindung! Wie ſelten bleibt man ein ruhiger Beſitzer von der damit verbundenen Ehre. Auſſer der Geſchichte der Cycloide vom Paſcal und Groning empfehle ich des Montucla Hiſtorie der Mathematik zum weitern Nachleſen. B.

daß die Bewegung dieſes Nagels von 2 Bewegungen zu gleicher Zeit zuſammengeſetzt ſey, deren eine den Nagel vorwärts, die andere aber ihn um die Axe des Rades herum trieb. Es beſchrieb folglich ein ſolcher Punkt eine Linie in der Luft, die weder eine grade noch eine cirkelförmige war. Er bemühete ſich aber vergebens ihre Natur aufzuſuchen. Wie er im Jahr 1634 ſeine Speculationen über dieſe krumme Linie wieder vornahm, ſo gab er dem Roberval von ſeinen gefundenen Schwierigkeiten Nachricht. Dieſer löſete ſie ihm auf. Zuerſt bemühete man ſich des Verhältniß des cycloidiſchen Raums gegen die Fläche des beſchreibenden Cirkels zu finden. Roberval fand, daß ſich die Cycloide zum Cirkel verhielt wie 3 : 1. Die Aufgabe aber, die Tangente derſelben zu beſtimmen, hielte ihn auf. Cartes zeigte 1638 zuerſt die Methode ſie zu ziehen. Hierauf hat man dem Wren, einem Engelländer die Rectification dieſer krummen Linie zu danken. Dadurch weiß man, daß ſie 4 mal ſo groß, als ihre Axe iſt. Hierauf gründete der Holländer, Hr. Hyghens von Zuitlichem ſeinen Beweis des Iſochroniſmus in der Cycloide. Er machte ſeine Entdeckung 1673 in ſeinem *Horologio oſcillatorio* bekannt. Dieſes Werk iſt ſo voll Genie, daß ſelbſt nach dem Bekenntniß der geſchickteſten Männer in der Uhrmacherkunſt, dieſer vortrefliche Mathematiker mehr zur Vollkommenheit dieſer ſchönen Maſchine beygetragen hat, als alle ſeine Vorgänger und alle ſeine bisherigen Nachfolger (*a*).

(*a*) Man leſe *Baillet* im Leben des *Cartes* und *Paſcal* in der Hiſtorie der Cycloide.

Innhalt.

Innhalt
der in dieſem Buche vorkommenden Materien.

Vorrede, die man nothwendig leſen muß. 1 = 22
Von der Rechnung mit den Potenzen in Anſehung ihrer Exponenten. . . 25
Wie werden Potenzen, die poſitive Exponenten haben, durcheinander multiplicirt und dividirt? Was iſt eine Potenz, deren Exponent o iſt? 26. 27
Wie kann ohne Veränderung des Werths einer Potenz aus einem poſitiven Exponenten ein negativer werden, und umgekehrt? Wie werden Potenzen, die negative Exponenten haben, durch einander multiplicirt und dividirt? 28. 29
Wie erhebet man eine jede Potenz zu einem beliebigen Grade, wovon der Exponent poſitiv oder negativ iſt? 30
Was heißt eine zur negativen Dignität erhöhete Gröſſe? 32
Wie kann man durch Hülfe der Rechnung mit den Exponenten eine jede Gröſſe ohne Veränderung ihres Werths vom Wurzelzeichen befreyen? 33
Exponenten, die Brüche ſind. 33. 34

Von der Wurzelrechnung.

Was heißt eine Wurzelgröſſe? 35
In welchem Falle kann eine Gröſſe ganz oder zum Theil von ihrem Wurzelzeichen ohne Veränderung des Werths befreyet werden? 36
Wie kann eine Gröſſe ohne Veränderung ihres Werths eine Wurzelgröſſe werden? 36
Was iſt eine Irrationalgröſſe, eine eingebildete Gröſſe und warum nimmt man im Calcul eingebildete Gröſſen an? 38 = 41
Wie können eingebildete Gröſſen würkliche Gröſſen werden und wie ſind ſie vom Nichts unterſchieden? 42
Wie bringt man eine Wurzelgröſſe zu ihrem einfachſten Ausdruck, und wie kann ein Bruch, der unter dem Wurzelzeichen ſtehet, ohne daß die Wurzelgröſſe ihren Werth verändert, in ein Ganzes verwandelt werden? 42. 43

Warum kann man den Exponenten eines Wurzelzeichens in einen andern ohne Veränderung des Werths der Wurzelgröſſe verwandeln? und iſt es nützlich, daß man verſchiedenen Wurzelzeichen einerley Exponenten gebe? 45. 46
Wie kann man finden, ob Gröſſen, die einzeln genommen irrational ſind, unter ſich rational ſind oder nicht? 47. 48
Von der Addition und Subtraction der Irrationalgröſſen. 48. 49
Von der Multiplication der Irrationalgröſſen. 50 = 54
Von der Diviſion der Irrationalgröſſen. 54 = 59
Von der Erhebung einer jeden Irrationalgröſſe zu einer beliebigen Dignität und von der Ausziehung der Wurzeln aus Irrationalgröſſen. 59 = 61
Wie kann man ohne Veränderung des Werths eine Gröſſe ſtatt mehrerer Wurzelzeichen, die ſie bey ſich hatte, nur ein einziges ververſchaffen? 62

Von der Parabel.

Entſtehung des Kegels und der Kegelſchnitte. Alter dieſer krummen Linien und die vornehmſten Männer, die davon geſchrieben haben. 63 = 65
Hauptſatz. I. II. III. Eine Perpendiculairlinie gegen eine Ebene iſt nothwendig gegen alle Linien dieſer Ebene, die durch den unterſten Punkt dieſer Perpendiculairlinie gezogen ſind, perpendiculair. Man kann alſo aus einem auf dieſer Ebene angenommenen Punkt nur eine einzige Perpendiculairlinie auf dieſer Ebene aufrichten. Man kann unmöglich auch von einem über dieſer Ebene angenommenen Punkt 2 Perpendiculairlinien auf dieſe Ebene fallen laſſen. Darum iſt der gemeinſchaftliche Durchſchnitt zwoer Ebenen, die gegen eine dritte Ebene perpendiculair ſind, auch gegen dieſe dritte Ebene perpendiculair. 65. 66
Entſtehung der Parabel. 67
Hauptſatz. IV. In einer Parabel verhalten ſich die Quadrate der Ordinaten, wie die correſpondirenden Abſciſſen. 68 = 71
Die Parabel iſt eine krumme Linie, die ſich immer weiter von ihrer Axe entfernet. Folgerungen daraus. 71 = 74
Was iſt der Parameter von einer Parabel, und wie beweiſt man, daß dieſer eine beſtändige Linie ſey, die aus den Eigenſchaften dieſer krummen Linie ſich herleiten läßt? 74 = 76
Das Quadrat einer jeden Ordinate der Parabel iſt ſo groß, als das Rechteck aus dem Parameter und der correſpondirenden Abſciſſe. 76 = 79

Aufgabe. Mit dem gegebenen Parameter einer Parabel dieſe krumme Linie zu zeichnen. 79. 80
Aufgabe. In einer gegebenen Parabel, wenn man den Scheitelpunkt kennet, ihre Axe, ihren Parameter, Ordinate und doppelte Ordinate, die ſo groß als der Parameter iſt, zu finden. 81
Was iſt die Subtangente einer Parabel? 82
Hauptſatz V. In der Parabel iſt die Subtangente allemal doppelt ſo groß, als die correſpondirende Abſciſſe. 82. 83
Verſchiedene merkwürdige Sätze. Imgleichen was die Subnormallinie ſey. 84 - 90
Eine jede mit der Tangente einer Parabel parallel gezogene Sehne wird durch eine Linie, die an dem Berührungspunkt mit der Axe der krummen Linie parallel gezogen iſt, in 2 gleiche Theile getheilet. 91
Dieſes geſchiehet aber nicht, wenn die Sehne nicht parallel lauft. Darum iſt eine Sehne, die durch einen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet wird, nothwendig mit der Tangente am Endpunkt dieſes Diameters parallel. Es iſt daher eine Linie, die durch den Scheitelpunkt eines Diameters mit einer der Ordinaten dieſes Diameters parallel gezogen wird, nothwendig eine Tangente dieſer krummen Linie. 91. 92
Eine Linie, die durch die Mitte zwoer parallellaufenden Sehnen gezogen wird, iſt mit der Axe dieſer krummen Linie parallel. 43
Aufgabe. In einer gegebenen Parabel einen von den Diametern derſelben, ihre Axe und ihren Scheitelpunkt zu finden. 93
Aufgabe. Den Diameter, der durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Parabel geht, imgleichen die Lage der Ordinaten gegen dieſen Diameter zu finden. 94
Aufgabe. Ohne Hülfe der Axe durch jeden Punkt einer Parabel eine Tangente zu ziehen. 95
Aufgabe. In einer gegebenen Parabel einen Diameter zu finden, der mit ſeinen Ordinaten einen Winkel macht, der ſo groß iſt, als ein gegebener ſchiefer Winkel. 95
Hauptſatz XII. Die Quadrate an einem jeden Diameter einer Parabel verhalten ſich unter einander, wie die correſpondirenden Abſciſſen. 96
Was iſt der Parameter von einem Diameter? 97
Das Quadrat einer jeden Ordinate an einem Diameter iſt ſo groß als das Rechteck aus der Abſciſſe und dem Parameter dieſes Diameters. 97
Aufgabe. Mit einer beliebigen Linie, deren Anfang beſtimmt iſt,

als dem Diameter einer Parabel, und mit dem gegebenen Parameter dieſes Diameters ſolchergeſtalt eine Parabel zu beſchreiben, daß der Winkel, den die Ordinaten an dieſem Diameter machen, einem gegebenen Winkel gleich ſey. 99

Bey jedem Diameter iſt die Subtangente doppelt ſo groß als die Abſciſſe. 101

Aufgabe. Von einem Punkt auſſerhalb der Parabel eine Tangente an dieſe krumme Linie zu ziehen. 101

Vorbereitungsaufgabe zur Quadratur der Parabel. In dem paraboliſchen Abſchnitte den gröſten möglichen Triangel zu verzeichnen. 102

Der gröſte Triangel, der in einem paraboliſchen Abſchnitte ſich verzeichnen läßt, iſt allemal gröſſer als die Hälfte des Abſchnitts, worinn er gezeichnet werden kann. Folgerungen daraus. 103

Progreßion, aus welcher man nach des Archimeds Methode die Quadratur der Parabel herleitet. Quadratur dieſer krummen Linie. 106

Lehnſatz, um die Quadratur der Parabel durch eine allgemeine und viel einfachere Methode zu erhalten. Dieſe Quadratur wird erklärt und bewieſen. 110-113

Aufgabe. Wenn eine halbe Parabel gegeben iſt, wie kann man auf einer andern Baſis, die der vorigen gleich iſt, eine Parabel beſchreiben, die mit der vorigen, in einem gewiſſen Verhältniß ſtehet? 113

Parabeln, die gleiche Grundlinien haben, verhalten ſich wie ihre Höhen und umgekehrt. u. ſ. w. 114

Die Cubatur einer Paraboloide oder die Ausrechnung ihres körperlichen Innhalts. 115-117

Abhandlung von einigen Methoden, den Innhalt der Flächen und der Körper zu finden.

Methode der Elemente von Cavalerius erfunden, vom Walliſius verbeſſert. Die Vertheidiger derſelben heiſſen auch Indiviſibiliſten. Die Demonſtration dieſer Methode iſt eine *Petitio Principii* oder Paralogiſmus. Durch Verwerfung dieſer Methode wird die Differential und Integralrechnung nicht untergraben. Zeugniſſe des Newtons und d'Alemberts darüber.

Me-

Methode der Erſchöpfung. Iſt ſchon vom den Alten erfunden. Woher ſie ihren Namen hat. Worinn ſie beſtehe? Iſt vielleicht der erſte Grund der Differential und Integral-Rechnung. 118-129

Hauptſatz XIV. Der 4te Theil eines jeden Parameters iſt ſo groß, als der Parameter der Axe, nebſt dem Stücke der Axe, das durch die Ordinate, welche durch die Spitze dieſes Diameters gezogen iſt, beſtimmt wird. 129

Hauptſatz XV. Wenn man durch das Ende eines beliebigen Diameters eine Tangente ziehet, und wenn man den Winkel TMF = TMO macht, ſo wird MF mit der Axe in einem Punkt F zuſammenſtoſſen und MF dadurch ſo groß als der 4te Theil dieſes Diameters werden. Zuſätze darzu. 130. 131

Hauptſatz XVI. Die Entfernung des Punkts F vom dem Scheitelpunkt einer Parabel iſt ſo groß, als der 4te Theil von dem Parameter der Axe. 132

Hauptſatz XVII. Der Punkt F iſt ein Brennpunkt. 133

Lichtſtrahlen, die aus dem Brennpunkt einer Parabel kommen, werden durch dieſe krumme Linie mit ihrer Axe parallel reflectirt. 133

Aufgabe. Den Brennpunkt in einer gegebenen Parabel zu finden. 134

Der Parameter eines jeden Diameters iſt allemal der 4te Theil der Entfernung des Scheitelpunkts dieſes Diameters vom Brennpunkt der Parabel. Iſt alſo der Brennpunkt einer Parabel und der Scheitelpunkt dieſer krummen Linie gegeben, ſo erhält man leicht den Parameter eines jeden Diameters. 134-136

Aufgabe. Wenn der Brennpunkt und die Axe einer Parabel gegeben iſt, an jeden Punkt dieſer krummen Linie eine Tangente zu ziehen. 135

Wenn man von einem Berührungspunkt eine Linie nach dem Brennpunkt ziehet, ſo iſt dieſe Linie ſo groß, als die Entfernung des Brennpunkts von dem Punkt, wo die Tangente mit der Axe zuſammenſtößt. 135

Was iſt ein Radius Vector? 136

Wenn man von den Punkten M und m, in welchen ſich ein Körper befindet, der ſich in einer Parabel bewegt, Tangenten ziehet, und wenn man aus dem Brennpunkt auf dieſe Tangenten Perpendiculairlinien fallen läßt, ſo werden ſich dieſe Perpendiculairlinien unter einander verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Trägern. 136

Was iſt eine Directrix? 137
Die Ordinate am Brennpunkt iſt ſo groß, als die Hälfte des Parameters der Axe. 138
Die Perpendiculairlinie am Endpunkt der Axe iſt eine Tangente an der Parabel. 138
Aufgabe. Mit dem Parameter und der Directrix einer Parabel dieſe krumme Linie zu beſchreiben. 139
Dieſes iſt die apolloniſche Parabel. 141
Was ſind ähnliche Kegelſchnitte? 141
Aufgabe. Auf einer gegebenen graden Linie eine Parabel zu beſchreiben, die einer gegebenen Parabel ähnlich iſt. 142
Alle Parabeln ſind ſich ähnlich. 143

Gebrauch der Parabel beym Bombenwerfen.

Urſprung dieſer Wiſſenſchaft. 144
Vom Galilaeus entdeckte Geſetze der Bewegung, 1) die Räume, die ein Körper im Fallen durchlauft, verhalten ſich, wie die natürlich auf einander folgenden ungraden Zahlen 1. 3. 5. 7. 9. . . . . 2) Die durchlaufenen Räume verhalten ſich, zu einander, wie die Quadrate der angewendeten Zeiten. Weiß man alſo, wie lange ein Körper gefallen iſt, ſo kann man die Höhe finden, von welcher er fiel, und aus der bekannten Höhe findet man die Zeit. 3) Die erlangten Geſchwindigkeiten verhalten ſich, wie die Zeiten; 4) Die Räume verhalten ſich, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, die der Körper am Ende dieſer Räume erhalten hat, und die Geſchwindigkeiten verhalten ſich unter einander, wie die Quadratwurzeln aus den Räumen. 5) Ein Körper, der ſich mit derjenigen Geſchwindigkeit, die er am Ende des erſten Moments ſeines Falles erhalten hat, gleichförmig fortbewegt, durchlauft in einer eben ſo langen Zeit einen Raum, der doppelt ſo groß, als der vorige iſt. 6) Ein Körper, der mit der am Ende ſeines Falls erhaltenen Geſchwindigkeit gegen den Horizont perpendiculair wieder in die Höhe gehet, muß in eben der Zeit, in welcher er herunter fiel, auch wieder zu dem Punkt ſich hinauf bewegen, von welchem ſein Fall anfing. 145 = 158
Ein gegen den Horizont ſchief geworfener und ſich ſelbſt überlaſſener

ner Körper, beſchreibet, wenn er kein Hinderniß findet, eine Parabel. 158 = 162
Aufgabe. Von welcher Höhe muß ein Körper fallen, um am Ende ſeines Falls eine Kraft zu haben, wodurch er einen gewiſſen Raum in der nämlichen Zeit durchlaufen kann, in welcher er durch ſeine Schwere eine gegebene ſenkrechte Tiefe erreicht? 162 = 164
Was iſt die Linie der Höhe? 164
Was verſteht man unter der Weite der Parabel? 166
Was heißt es, die Weite der Parabel liegt mit der Batterie Waſſerpaß? Und was iſt der Erhöhungswinkel? 170. 171
Nothwendiger Satz. Die Weiten verſchiedener Würfe, die Waſſerpaß mit der Batterie ſind, oder, die Weiten zwoer Parabeln, die von einem Körper, der mit einerley Kraft nach Richtungslinien, die gegen den Horizont ſchief ſind, abgeſchoſſen wird, beſchrieben werden, verhalten ſich untereinander, wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel. 171
Folglich geſchiehet der weiteſte von allen Würfen unter einem Winkel von 45 Graden, und dieſes heißt nach einem Bogenſchuß von der größten Erhöhung ſchieſſen. Der Erfinder dieſer Wahrheit iſt Tartaglea. 172
Die Schußweiten ſind ſich gleich, wenn der Körper unter Erhöhungswinkeln abgeſchoſſen wird, die gleichweit vom 45ten Grade entfernt ſind. Es iſt in der Ausübung aber nicht einerley, welchen von dieſen Winkeln man nimmt. Dieſen Lehrſatz kannte ſchon *Diego Vfano* 1611. 173. 174
Die Schußweite unter einem Winkel von 15 Grad iſt halb ſo groß, als die gröſte Schußweite. Wichtigkeit dieſer Wahrheit in Berechnung der Tabellen für das Bombenwerfen. 175. 176
Die Linie der Höhe iſt jederzeit halb ſo groß, als die größte Schußweite; und eine Bombe kann ſich nicht über die Linie der Höhe erheben. 177
Die Scheitelpunkte aller Parabeln, die durch einen Körper mit der nämlichen Kraft unter allen möglichen Winkeln beſchrieben werden, liegen in einer Ellypſe, deren groſſe Axe ſo groß iſt, als die größte Schußweite und doppelt ſo groß iſt, als die kleine Axe. 177
Was verſteht man unter der Weite des Flugs und unter dem Kernſchuß? 179
Die Weite des Kernſchuſſes eines Körpers iſt doppelt ſo groß, als die halbe mitlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen der Linie

nie der Höhe und des Abſtandes des Körpers vom Horizont. 180=182
Vergleichung der Syntheſis und Analyſis. 183
Practick beym Bombenwerfen. 1) Die Weite eines Wurfs zu finden, deſſen Ebene mit den Batterien in einerley Höhe liegt, wenn der Erhöhungswinkel gegeben iſt. 2) Den Erhöhungswinkel für einen Mörſer zu finden, um eine Bombe auf eine beſtimmte Weite zu ſchieſſen. 3) Die Weite des Kernſchuſſes zu beſtimmen, wenn man weiß, wie hoch die Batterie über das Feld erhöhet iſt. 4) Den Punkt zu finden, in welchem eine Bombe unter einem gegebenen Erhöhungswinkel auf eine Fläche fallen muß, die höher oder niedriger als die Batterie liegt. 5) Den Erhöhungswinkel zu finden, um eine Bombe auf einen beſtimmten Punkt einer Fläche zu ſchieſſen, der höher oder niedriger als die Batterie liegt. Wichtigkeit dieſer Aufgabe. Gelehrte, die ſie aufgelöſet haben. Schwierigkeit in dieſen Auflöſungen. Leichte Methode des Deidiers. 183=198
Aufgabe. Aus der Weite einer Parabel und dem gegebenen Erhöhungswinkel des Mörſers die größte Höhe zu finden, zu welcher ſich eine Bombe erheben muß. 198
Aufgabe. Welches muß der Erhöhungswinkel des Mörſers ſeyn, damit ſich eine Bombe zu einer beſtimmten Höhe erhebe? 199
Aufgabe. Wie kann man einem Mörſer eine verlangte Neigung geben? 199. 200
Beantwortung der Einwürfe gegen dieſe Theorie vom Bombenwerfen. Verſuche, die ſie beſtätigen. 201=206
Gebrauch der Parabel in der Berechnung der Höhlung der Minen. Was iſt eine Mine? Was hat Hr. v. Valliere, würklicher Generallieutenant zu ihrer Vollkommenheit beygetragen? Ihr Erfinder; ihr Alter; Methode, wie man durch die Kunſt einen Afterkegel oder jeden hohlen oder erhabenen Körper verfertigen kann. Die Maſchinen, die man gebraucht, um durch eine aneinanderhängende Bewegung die krummen Linien zu beſchreiben, ſind verdächtig. 215. 216
Die Minen ſind paraboliſche Afterkegel oder noch eigentlicher abgekürzte Paraboloiden. Was die Linie des geringſten Widerſtands ſey. Sie iſt nicht immer mit dem Halbmeſſer der oberſten Oefnung des Trichters von einerley Gröſſe. Beyſpiele davon, die zu Biſy 1753 angeſtellet ſind. Wie viel Pulver man ungefehr zu ihrer Ladung gebrauchen kann. 206=214

Gebrauch der Parabel in Verfertigung der Sprachröhre.

Was iſt ein Syrachrohr? Erfahrungsgründe zu ihrer Verfertigung. Was die Schallinie ſey. 217 = 220
Das cylindriſche oder kegelförmige Sprachrohr, als in welcher Form man ſie gewöhnlicher Weiſe macht, hat nicht alle mögliche Vollkommenheit. 220. 221
Das kegelförmige iſt doch dem cylindriſchen vorzuziehen. Doch ſcheinet das paraboliſche das vortheilhafteſte zu ſeyn. 221. 222

Abhandlung über die Erfindung der Sprachröhre.

Die Erfindung derſelben iſt ſehr alt. Der Vater Kircher ſcheint in Europa der erſte geweſen zu ſeyn, der es erfunden hat. Gelehrter Diebſtahl des Ritter Morlands, eines Engelländers. Er iſt noch nicht ſo gewiß. 224 = 227
Gebrauch der Parabel in Verfertigung der Hörröhre. 227
Gebrauch der Parabel in Verfertigung der Brennſpiegel. 228
Wie man einen Brennpunkt in eine brennende Linie verwandeln könne und warum man behauptet hat, daß man mit paraboliſchen Brennſpiegeln auf jede Entfernung brennen könne. Spiegel, die ſich ſelbſt verbrennen. 230. 231
Paraboliſche Laterne, wodurch man in einer ſehr groſſen Entfernung kleine Buchſtaben leſen kann. 232
Die Wände der Camine ſolten paraboliſch gemacht ſeyn. Es würden alsdenn die Zimmer beſſer erwärmet werden. Einfaches Mittel, dieſe Bequemlichkeit zu erhalten. 232 = 234
Verſuche des Hrn. du Fay und Mairan in Anſehung 2er paraboliſchen Brennſpiegel. Verſuche des Cavalieri, Varings und Nollets über eben derſelben Sache. Brennſpiegel von Kartenpapier, verſilbert oder vergoldet. 235. 236
Paraboliſches Echo, welches ein Wunder zu ſeyn ſcheint. Durch erhabene paraboliſche Spiegel können, wie durch die hohlen die Lichtſtrahlen parallel laufend gemacht werden. 236 = 238
Gebrauch der Parabel bey der Verdoppelung des Würfels. Geſchichte dieſer Aufgabe. Dieſe Aufgabe iſt aufgelöſet, wenn

man zu 2 gegebenen Gröſſen 2 mitlere Proportional Gröſſen zu finden weiß 239 = 243
Gebrauch der Parabel bey der Triſection des Winkels. Geſchichte dieſer Aufgabe. 243 = 246

Von der Ellypſe.

Hauptſatz I. Wenn eine krumme Linie von der Art iſt, daß die Quadrate ihrer Ordinaten, die perpendiculair gegen eine ihrer Sehnen ſind, allemal ſo groß ſind, als die Producte aus den Segmenten dieſer Sehne, die durch dieſe Perpendiculairlinien entſtehen, ſo iſt dieſe Figur ein Cirkel. Zuſätze oder Folgerungen. 247. 248
Was iſt ein antiparalleler Schnitt. 249
Hauptſatz II. Wenn man einen ungleichſeitigen Kegel antiparallel mit ſeiner Grundfläche durchſchneidet, ſo iſt die daher entſtehende Figur ein Cirkel. 249
Hauptſatz III. Wird aber der Kegel ſo durchſchnitten, daß der Durchſchnitt weder parallel noch antiparallel mit der Grundfläche iſt, ſo iſt die durch dieſen Schnitt entſtehende Figur kein Cirkel. Folgerungen. 250 = 252
Erklärung der Ellypſe und ihrer vornehmſten Linien. Ellypſen können auch aus Cylindern geſchnitten werdern. 252 = 253
Hauptſatz IV. In einer Ellypſe verhalten ſich die Quadrate der Ordinaten an der Axe zu einander, wie die Rechtecke aus den correſpondirenden Segmenten der Axe. 254
Der vorige Satz iſt umgekehrt falſch. 254
Hauptſatz V. Das Quadrat einer jeden Ordinate der groſſen Axe verhält ſich zum Rechteck aus den correſpondirenden Abſchnitten der Axe, wie das Quadrat der kleinen Axe zum Quadrat der groſſen. Zuſätze oder Folgerungen. 255. 258
Erklärung von conjugirten Axen. 259
Wenn die Abſciſſen in einer Ellypſe ſich gleich ſind, ſo ſind die correſpondirenden Ordinaten es auch, und umgekehrt. 259. 260
Ob ein Kegel gegen ſeine Spitze gleich viel ſchmäler, als gegen ſeine Grundfläche iſt, ſo iſt dennoch eine Ellypſe, welche entſtehet, wenn man den Kegel von oben nach unten durchſchneidet, dennoch unten nicht breiter als oben. 261
Erklärung, was der Parameter einer Ellypſe ſey. 262
Woher die Ellypſe ihren Namen bekommen hat? 264
Hauptſatz VI. Wenn man von den Brennpunkten einer Ellypſe

2 Linien an einerley Punkt der krummen Linie ziehet, ſo iſt die Summe derſelben allemal ſo groß als die groſſe Axe der Ellypſe. Folgerungen daraus. 265 = 268
Wie bekommt man die Tangente an einer Ellypſe? 267
Wie findet man es, daß dieſe krumme Linie Brennpunkte habe? 267
Die Entfernung eines Brennpunkts einer Ellypſe von dem nächſten Endpunkt der Axe, iſt gröſſer als der 4te Theil des Parameters dieſer krummen Linie. 268
Wenn ein Winkel, den 2 Linien, die aus den Brennpunkten der Ellypſe an einen Punkt derſelben gezogen ſind, machen, durch eine Linie in 2 gleiche Theile getheilet wird, ſo ſtehet dieſe Linie auf der krummen Linie oder auf der Tangente an dieſem Punkt perpendiculair. 269
Ein in der Dioptrick ſehr wichtiger Satz. 270 = 272
Eine jede Tangente an jedem Punkt, der von den Endpunkten der Axe unterſchieden iſt, hat nothwendig eine Neigung mit der groſſen Axe zuſammenzuſtoſſen. 272
Die Ordinate an einem der Brennpunkte der Ellypſe iſt die Hälfte von dem Parameter der groſſen Axe. 273
Die Gröſſe der Subtangente einer Ellypſe durch eine neue und allgemeine Methode zu beſtimmen. 277 = 282
Warum kann man ſich der groſſen oder kleinen Axe nach Belieben zur Erfindung der Tangente bedienen? 282
Vier Wahrheiten, die man nöthig hat, die newtonianiſchen Inſtitutionen vom Hr. Sigorgne zu verſtehen. 282 = 290
Aufgabe. Aus den gegebenen Axen die Brennpunkte der Ellypſe zu finden und dieſe krumme Linie zu zeichnen. 290 = 292
Lehnſatz. Wenn man man mit der groſſen Axe der Ellypſe als einem Diameter einen Cirkel beſchreibt, ſo werden die Ordinaten der Ellypſe mit den correſpondirenden Ordinaten des Cirkels in einerley Verhältniß ſtehen. 293
Die Fläche einer Ellypſe verhält ſich zur Fläche eines Cirkels, der über ihrer groſſen Axe beſchrieben iſt, wie die kleine Axe dieſer krummen Linie zu ihrer groſſen Axe. 294
Könnte man einen Cirkel durch eine Linie, die von einem vom Centrum verſchiedenen Punkt einer Fläche an die Peripherie gezogen wäre, nach einem gegebenen Verhältniß theilen. So könnte man auch eine Ellypſe durch eine Linie, die von einem ihrer Brennpunkte gezogen würde, nach einem gegebenen Verhältniß theilen. Was iſt die Excentricität? 297

Sehr einfache Auflöſung dieſer Aufgabe, wodurch man dem wahren Verhältniß ſehr nahe kommt. 297. 298
Die Fläche einer Ellypſe iſt der Cirkelfläche gleich, deſſen Diameter die mitlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen der groſſen und kleinen Axe iſt. 299
Die Flächen der Ellypſen verhalten ſich unter einander wie die Producte aus ihren Axen. 299
Was iſt eine Ellypſoide. 300
Wie findet man den körperlichen Innhalt derſelben? 300
Die conjugirten Diameter der Ellypſe werden erklärt? 303
Wie muß man ſie ſuchen, wenn ſie ſich gleich ſind? 304
Wie beſtimmt man die beyden Axen der Ellypſe durch 2 bekannte ungleiche conjugirte Diameter? 306
Hauptſatz VII. Das Rechteck aus den Theilen eines Diameters, die durch eine an dieſen Diameter gezogene Ordinate gemacht werden, verhält ſich zu dieſer Ordinate, wie das Quadrat dieſes nämlichen Diameters zum Quadrat ſeines conjugirten Diameters. 311
Eine jede Sehne, die eine Ordinate an einem Diameter oder parallel mit der Tangente an dem Endpunkte dieſes Diameters iſt, wird durch dieſen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet. 314
Eine Linie, die die Mitten zwoer parallellaufenden Sehnen in einer Ellypſe verbindet, iſt ein Diameter dieſer krummen Linie. 316
In wiefern kommen die Eigenſchaften, die den Axen zu kommen, auch jeden conjugirten Diametern zu? 320
Was iſt der Parameter von 2 conjugirten Diametern? 313
Aufgabe. Zu einer gegebenen Ellypſe einen jeden Diameter, den Mittelpunkt, die Axen, die Brennpunkte und die gleichen conjugirten Diameter zu finden. 314
Aufgabe. Zu finden, welche Lage die Ordinaten gegen einen gegebenen Diameter haben; Eine Tangente an einen von deſſen Endpunkten zu ziehen, und deſſen conjugirten Diameter zu finden. 316
Aufgabe. Von einem Punkt auſſerhalb der Ellypſe an dieſelbe eine Tangente zu ziehen. 317
Aufgabe. Das Verhältniß des Rechtecks aus den Axen der Ellypſe gegen das Parallelogramm aus 2 beliebigen conjugirten Diametern derſelben zu finden. 318. 319
Gleichung für die Ellypſe, wenn die Abſciſſen vom Scheitelpunkt angerechnet werden. Aehnlichkeit der Parabel und der Ellypſe. Dieſe letzte wird eine Parabel wenn ihre Axe unendlich groß wird. 321 = 324

Gebrauch der Ellypſe in der Dioptrick oder bey Verfertigung der Brenngläſer und anderer Inſtrumenten, als Augengläſer, wodurch man das Geſicht verſtärket, oder die Fehler derſelben verbeſſeret.

Was iſt die Dioptrick? Das Hauptgeſetz derſelben. Cartes iſt der Erfinder dieſes Geſetzes. 324. 328
Die Lichtſtrahlen, die durch ein ellyptiſches Glas gehen, bekommen eine Neigung nach dem entfernteſten Brennpunkt ſich zu begeben. 328 - 330
Conſtruction einer Ellypſoide, damit dadurch die Lichtſtrahlen in einem ihrer Brennpunkte vereiniget werden, und damit man dadurch ein vortrefliches Brennglas bekomme. 331
Wie kann man eine Ellypſe beſchreiben, deren groſſe Axe und die Entfernung der Brennpunkte in dem Verhältniß der Refraction ſind. Wichtige Vorſicht um ein ſehr vollkommenes ellyptiſches Brennglas zu erhalten. 331. 332
Dieſes Glas kann den Brennpunkt der natürlichen Augen verändern und dient für Perſonen, die ein kurzes Geſicht haben. 334
Carteſius Dioptrick wird gelobet. 335

Abhandlung über die Erfindung des Geſes der Refraction.

Man hat nicht zugeben wollen, daß Cartes der Erfinder deſſelben ſey, und hat dieſe Ehre dem Willebrod Snell zugeeignet.
Gründe, aus welchen man dem Cartes dieſe Ehre hat rauben wollen. 335 - 337
Unterſuchung und Widerlegung dieſer Gründe. 338 - 340
Erklärung der Erfindung des Snells mit der Erfindung des Cartes verglichen. Eine fließt leicht aus der andern. Warum man daraus nichts gegen den Cartes ſchlieſſen kann. Dieſer groſſe Mann wird gerechtfertigt. 340 - 344
Gebrauch der Ellypſe bey Verfertigung der Sprachröhre. 345
Die Ellypſe macht das Licht lebhafter. Ihr Nutzen in Verfertigung der Sprachgewölbe. Erklärung derſelben. 346. 347
Gebrauch der Ellypſe in Verfertigung der Hörröhre und warum dieſe ellyptiſchen Röhre vor den paraboliſchen einen Vorzug haben? 347. 348
Gebrauch der Ellypſe in Verfertigung und Ausrechnung gedruckter Gewölber. 348 - 350

Von

Von der Hyberbel.

Entſtehung dieſer krummen Linie. 351
In der Hyperbel verhalten ſich die Quadrate der Ordinaten unter einander, wie die Rechtecke aus den Abſciſſen und der correſpondirenden aufgefangenen Axe. 352
Die nämliche Fläche, welche in einem Kegel eine Hyperbel erzeuget, erzeuget in dem entgegengeſetzten Kegel eine gleiche und ähnliche. Die entgegengeſetzten Hyperbeln werden erkläret. 353
Erklärung der erſten und 2ten Axe. 356
Wie man die zweyte Axe der Hyperbel, vermöge ihrer Haupteigenſchaft herausbringt, und wie man dieſe 2te Axe in dem Durchſchnitte eines Kegels findet. 356
Weswegen die Axen der Hyperbel conjugirte heiſſen? 358
In einer Hyperbel verhält ſich das Rechteck aus jeder Abſciſſe und ihrer aufgefangenen Axe zum Quadrat ihrer correſpondirenden Ordinate, wie das Quadrat der erſten Axe zum Quadrat der 2ten. 358
Anmerkung über einen Kegelſchnitt, der parallel mit der Axe deſſelben iſt. 359
Characteriſtiſche Gleichung der Hyperbel. Was iſt eine gleichſeitige Hyperbel? Wie findet man ſie in dem Kegel? Und in welchem Fall erhält man durch den Durchſchnitt dieſes Kegels gleiche oder ungleiche Axen? 360 = 362
Warum iſt die 2te Axe eigentlich zu reden keine Axe? 363
Wie beſtimmt man die 2te Axe einer Hyperbel? 366
Der Unterſchied der beyden Linien, die von einem nämlichen Punkt der Hyperbel an ihren Brennpunkt und an den Brennpunkt der entgegengeſetzten Hyperbel gezogen ſind, iſt jederzeit der erſten Axe dieſer krummen Linie gleich. 369
Was der Parameter von der Hyperbel ſey, wird erklärt. Er iſt ſo groß als die doppelte Ordinate am Brennpunkt. Und die Entfernung des Brennpunkts einer Hyperbel von ihrem Scheitelpunkt iſt kleiner, als der 4te Theil des Parameters. 369 = 371
Das Quadrat einer jeden Ordinate an der erſten Axe einer Hyperbel iſt gröſſer, als das Rechteck aus der correſpondirenden Abſciſſe und dem Parameter der erſten Axe. 371
Woher die Hyperbel ihren Namen hat? 372
Wie findet man den Parameter der 2ten Axe? 373
Das Quadrat einer jeden Ordinate an der 2ten Axe iſt gröſſer, als das Rechteck aus der correſpondirenden Abſciſſe und dem Parameter der 2te Axe. Nur muß die Abſciſſe gröſſer oder kleiner ſeyn, als die Hälfte der 2ten Axe. 373 = 376

Wenn man in den Aſymptotenwinkel eine Linie mit der 2ten Axe parallel und ſo ziehet, daß ſie die Hyperbel durchſchneidet, ſo iſt das Rechteck aus den 2 Theilen dieſer Linie, die durch die krumme Linie entſtehen, ſo groß, als das Quadrat der 2ten Axe. 374

Alle Rechtecke, die aus 2 Theilen einer beliebigen Linie, die in den Aſymytotenwinkel mit der 2ten Axe parallel gezogen, und von der krummen Linie durchſchnitten iſt, entſtehen, ſind unter ſich gleich. 376

Die Hyperbel nähert ſich immer den Aſymptoten, ohne ſie jemals zu erreichen, wenn man ſie auch ins unendliche fortzöge. Und dieſes zeigt auch eigentlich das Wort Aſymptote an. 377.378

Wie kann man die Aſymptoten einer Hyperbel finden? 378

Eine Linie, die durch das Centrum der Hyperbel in ihren Aſymptotenwinkel gezogen wird, ſchneidet nothwendig dieſe krumme Linie oder ihre entgegengeſetzte in einem Punkt und gehet in die krumme Linie hinein, ohne ſie zum 2tenmal zu durchſchneiden. 380

Erklärung des erſten Diameters einer Hyperbel. Dieſer wird durch das Centrum der krummen Linie in 2 gleiche Theile getheilet. 380

Wenn man durch einen beliebigen Punkt der Aſymptote einer Hyperbel in den Aſymptotenwinkel mit der andern Aſymptote eine Parallellinie ziehet, ſo wird dieſe Parallellinie die krumme Linie nothwendig in einem einzigen Punkt durchſchneiden. 381

Wenn man durch einen beliebigen Punkt einer Hyperbel 2 Linien mit den Aſymptoten parallel ziehet, und ſie durch dieſe Aſymptoten beſtimmt, ſo iſt das Rechteck aus dieſen 2 Linien jederzeit ſo groß, als die Potenz der Hyperbel. 381

Dieſer Satz iſt auch umgekehrt wahr. 382

Die Potenz der Hyperbel iſt ſo groß, als der 4te Theil von der Summe der Quadrate der beyden Axen. 383

Die halbe erſte Axe iſt ſo groß, als die Quadratwurzel aus der doppelten Potenz der Hyperbel. 383

Wenn man durch einen beliebigen Punkt einer Aſymptote eine Linie ziehet, die die Arme der Hyperbel und die Aſymptoten derſelben durchſchneidet, ſo ſind die Theile dieſer Linie, die zwiſchen einer Aſymptote und dem nächſten Arme der krummen Linie liegen, ſich gleich. 384

Dieſer Satz iſt auch umgekehrt wahr. 384

Wie findet man die Tangente von der Hyperbel? 385

Eine Linie, die durch die Aſymptoten beſtimmt und in dem Punkt, wo ſie mit der Hyperbel zuſammenſtößt, in 2 gleiche Theile getheilet wird, iſt nothwendig eine Tangente. 385

Dieſer Satz iſt auch umgekehrt wahr. 386
Die Linie, die durch den Scheitelpunkt der Hyperbel mit der 2ten Axe parallel gezogen wird, iſt die Tangente der krummen Linie. 386
Erklärung des 2ten conjugirten Diameters und wie er in 2 gleiche Theile getheilet wird? 387
Wenn die Aſymptoten der Hyperbel und ein Punkt dieſer krummen Linie gegeben iſt, 2 conjugirte Diameter zu finden. 388
Mit 2 gegebenen conjugirten Diametern die Aſymptoten der Hyperbel zu beſtimmen. 389
Wenn eine Sehne der Hyperbel durch einen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet wird, ſo wird dieſe Sehne nothwendig mit der Tangente parallel ſeyn, die an den Punkt, wo der Diameter die krumme Linie durchſchneidet, gezogen iſt. 390
Wenn 2 parallellaufende Sehnen einer Hyperbel durch eine Linie in 2 gleiche Theile getheilet werden, ſo gehet dieſe verlängerte Linie nothwendig durchs Centrum dieſer krummen Linie. 390
Was heißt eine Ordinate an einem Diameter? 391
Ein jeder von der Axe verſchiedener erſter Diameter macht mit ſeinen Ordinaten ſchiefe Winkel. Folglich iſt die Axe der einzige erſte Diameter, der mit ſeinen Ordinaten rechte Winkel macht. 391
Das Quadrat einer jeden Ordinate an einem erſten Diameter verhält ſich zum Rechteck aus dem aufgefangenen Diameter und der correſpondirenden Abſciſſe, wie das Quadrat des Diameters der parallel mit dieſer Sehne lauft, zum Quadrat des conjugirten Diameters. 392
Die Quadrate der Ordinaten an einem erſten Diameter verhalten ſich unter einander, wie die Rechtecke aus den aufgefangenen Diametern und den correſpondirenden Abſciſſen. 393
Die Eigenſchaften und Gleichungen der Hyperbel in Abſicht auf ihren Axen und Parameter dieſer Axen ſind von den Gleichungen der nämlichen krummen Linie in Abſicht auf 2 conjugirte Diameter und die Parameter dieſer Diameter nur darinn unterſchieden, daß die Axen unter ſich rechte, die conjugirte Diameter aber unter ſich ſchiefe Winkel machen. 395
Gleichung für die gleichſeitige Hyperbel. 395
Zwo Tangenten an der Hyperbel werden durch den Berührungspunkt und durch den Punkt, wo ſie ſich ſchneiden, ſo getheilet, daß die Theile der einen im Verhältniß mit den Theilen der andern ſtehen. 397
Eine jede Tangente an der Hyperbel ſtößt mit einem jeden erſten Diameter dieſer krummen Linie in einem Punkt unterhalb dem Centrum

trum ſo zuſammen, daß daraus ein Geſetz, entſteht, wodurch man die Tangente an der Hyperbel finden kann 398
Dieſes Geſetz durch eine neue und allgemeine Methode für alle krumme Linien zu finden. 400
Dieſe letztere Methode iſt geſchwind. Sie erfordert eine kleine Anzahl von Grundſätzen. 401-402
In welchem Verſtand kann man ſagen, daß die Aſymptoten der Hyperbel endlich Tangenten werden? 403. 404
Drey Sätze, die zum Verſtand der newtonianiſchen Inſtitutionen des Hrn. Sigorgne nützlich ſind. 405-408
Wenn man von einerley Punkt der Hyperbel 2 Linien an die Brennpunkte, und eine Tangente an dieſe krumme Linie ziehet, ſo wird der Winkel, der durch dieſe 2 Linien gemacht wird, durch die Tangente in 2 gleiche Theile getheilet werden. 408. 409
Dieſer Satz iſt auch umgekehrt wahr. 409. 410
Es iſt ſehr nützlich, die Brennpunkte entgegengeſetzter Hyperbeln zu finden. 410
Ein in der Dioptrick oder bey der Verfertigung der Augengläſer ſehr brauchbarer Satz. Der umgekehrte Satz iſt es gleichfalls. 411.412
Wenn man an 2 Punkte der Hyperbel 2 Tangenten, und von dem Brennpunkt derſelben auf dieſe Tangenten Perpendiculairlinien ziehet, ſo werden ſie gegeneinander in einem geringern Verhältniße wachſen, als in dem Verhältniße der Quadratwurzeln aus den Trägern. 413
Satz, den Herr Sigorgne in ſeinen Inſtitutionen gebraucht. 415
Aufgabe. Entgegengeſetzte Hyperbeln ſo zu beſchreiben, daß ihre Brennweiten mit ihrer Zwergaxe in einem gegebenen Verhältniß ſtehen. 416
Mit 2 für die Axen gegebenen Linien eine Hyperbel zu beſchreiben. 418
Aufgabe. In einer gegebenen Hyperbel ihr Centrum, ihre Axen, ihre Parameter, ihren Brennpunkt und Aſymptoten zu finden. 419
Aufgabe. Das Verhältniß des Rechtecks aus den Axen gegen das Parallellogramm jeder 2 conjugirten Diameter zu finden, welches um die entgegengeſetzten Hyperbeln beſchrieben iſt. 420. 421
Aufgabe. Die Fläche der Hyperbel zu finden. 421
Lehnſatz für die Cubatur der Hyperboloide. Eine Krone iſt einem Cirkel gleich der mit einem Radius beſchrieben wird, welcher eine mitlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen der Summe der Halbmeſſer der concentriſchen Cirkel und ihrer Differenz iſt. 422
Aufgabe. Den körperlichen Innhalt der Hyperboloide zu finden. 423

Von conjugirten Hyperbeln.

Was ſind conjugirte Hyperbeln? Sie haben mit denjenigen, wovon ſie conjugirt, ſind, einerley Aſymptoten und Axen. 425 - 428
Die conjugirten Hyperbeln gehen durch die Entpunkte aller 2ten Diameter derjenigen Hyperbeln, mit welchen ſie conjugirt ſind. Daher haben einige Geometer behauptet, daß 4 conjugirte Hyperbeln nur 4 Viertel der nämlichen krummen Linie wäre. Dieſes iſt ohne Grund. 428 - 429

Gebrauch der Hyperbel in der Dioptrick, theils bey Verfertigung der Brenngläſer, theils bey Conſtruction der Augengläſer.

Vorbereitung. 429
Wenn eine Hyperbel nach dem Verhältniße der Refraction conſtruirt iſt, ſo kañ dadurch eine Hyperboloide entſtehen, welche die Lichtſtrahlen, die mit der Axe parallel einfallen, in einem Punkt vereiniget.
Wie kann man eine ſolche Hyperbel beſchreiben? 429 - 430
Wie kann man eine Hyperboloide beſchreiben, daß, wenn ſie aus Glas gemacht iſt, ſie die parallelen Strahlen nach ihrem Durchgehen ſo auseinander breche, als wenn ſie alle aus dem Brennpunkt der Hyperbel kämen, die der beſchreibenden entgegengeſetzt iſt. 432
Wie hyperboliſche Gläſer als ſowohl alten kurzſichtigen Perſonen nützlich ſeyn können. 434

Wichtige Bemerkung bey der Ausübung dieſer Theorie.

Die Gewohnheit, die Augengläſer ſphaeriſch zu ſchleifen, hat die Oberhand behalten; es wäre nützlich, wenn Gelehrte auch Künſtler würden. Beyſpiele hievon in den Perſonen des Herrn Hyghens, Mydorge und Cartes. Der Mangel verſtändiger Künſtler hat den Fortgang der Wiſſenſchaften ſehr gehindert. Man verfertigt heut zu Tage in Engelland nach der carteſianiſchen Anweiſung Ferngläſer. Fortgang dieſer Praxis. Die franzöſchen Künſtler haben ein wahres Inntereſſe ſich darauf zu legen. 435 - 439
Gebrauch der Hyperbel in der Catoptrick. 439
Gebrauch der Hyperbel bey der Dreytheilung des Winkels. 440
Gebrauch der Hyperbel bey der Verdoppelung des Würfels. 443

Abhand-

Abhandlung über die Brennſpiegel des Archimeds und Proclus.

Nöthige Kenntniſſe, um das, was verſchiedene Geſchichtſchreiber von dieſer Materie erzählen, gehörig zu beurtheilen. 446
Tzetzes redet von den Brennſpiegeln des Archimeds; Plutarch ſchweigt davon. Geſetzt ſie wären würklich geweſen, ſo wäre die Brennweite dieſer Spiegel doch viel zu groß angegeben. Beſtätigung dieſes Urtheils durch den Vater Kircher. 446. 447
Es iſt nicht wahrſcheinlich, daß dieſe Spiegel parabolich geweſen; auch kann man durch keine Parabel einen Brennpunkt in eine unbeſtimmte Brennlinie verwandeln. Unzulänglichkeit der elliptiſchen und hyperboliſchen Spiegel. Unterſuchung der hohlen ſphaeriſchen Spiegel. Sie haben eigentlich keinen Brennpunkt; dennoch brennen ſie. Woher dieſe Eigenſchaft kommt? Theorie und Erfahrung ſtimmen mit einander überein. Dennoch iſt es nicht wahrſcheinlich, daß die Spiegel des Archimeds oder des Proclus, die Zonaras anführt, dieſe Geſtalt hatten. 448 - 452
Waren die Spiegel des Archimeds und Proclus Planſpiegel? Verſuche des Vater Kirchers hierüber. Ihre Stärke im Brennen iſt vorher geſagt worden. Dieſe Vorherſagung erfüllt Hr. v. Buffon. Er gründet eine neue Wiſſenſchaft. 453 - 458
Beſondere Bemerkungen über die Kegelſchnitte vom Hrn. Marſſon. Die 3 Gleichungen derſelben machen ein arithmetiſches zuſammenhängendes Verhältniß aus. Artige Folgerungen daraus. 458 - 466

Von der Ciſſoide.

Entſtehung dieſer kummen Linie. Diocles hat ſie erfunden. Sie iſt älter als 1400 Jahr. Sie hat eine Aſymptote. 466 - 467
Durch dieſelbe findet man 4 Linien in zuſammenhängendem geometriſchen Verhältniße. Daraus entſpringt ihr Gebrauch bey der Verdoppelung des Würfels. 469.

Von der Muſchellinie.

Ihre Entſtehung. Ihr Erfinder. Ihr Alter. Sie hat eine Aſymptote. 470. 471
Eine grade Linie mag mit der Aſymptote der Conchoide einen Winkel machen, welchen ſie will, ſo wird ſie nothwendig würklich von der Conchoide durchſchnitten oder hat wenigſtens die Lage dazu. 471
Nothwendiger Lehnſatz um den Nutzen dieſer kummen Linie in der Geometrie zu verſtehen. 472

Gebrauch der Muſchellinie bey der Verdopplung des Würfels. 473
Pappus hat ſie auch zur Dreytheilung des Winkels gebraucht. Und Archimed zur Conſtruction körperlicher Aufgaben. Newton ziehet ſie bey der Conſtruction der Gleichungen vom 3ten und 4ten Grad ſelbſt den Kegelſchnitten vor. 474
Blondel verjüngt durch ſie die Säulen. 475

Von der Quadratrix.

Entſtehung dieſer krummen Linie. Der Grund ihrer Benennung. Dinoſtrates iſt ihr Erfinder. 475
Wenn man durch einen beliebigen Punkt der Quadratrix einen Radius des erzeugenden Bogens, und aus dem nämlichen Punkt eine Perpendikulairlinie auf die Axe dieſer krummen Linie zieht, ſo verhält ſich der beſchreibende Bogen zu dem Theil, der durch den Radius abgeſchnitten iſt, wie die Axe dieſer krummen Linie zu dem durch die Perpendiculairlinie abgeſchnittenen Theil. 476
Lehnſatz. I. Wenn man aus der Spitze eines Winkels zwiſchen ſeinen Schenkeln verſchiedene concentriſche Bögen zieht und wenn man dieſe Bögen durch Halbmeſſer durchſchneidet, ſo verhalten ſich die ganzen Bögen zu einander, wie ihre durch die Halbmeſſer abgeſchnittenen Theile. 476. 477
Lehnſatz II. Die Tangente eines Bogens iſt gröſſer als dieſer Bogen ſelbſt. 477
Die Quadratrix kann zur ſehr genauen Beſtimmung der Peripherie eines Cirkels gebraucht werden. Der erzeugende Quadrant iſt die 3te Proportionallinie zu der Grundlinie der Quadratrix und zum Halbmeſſer des Quadranten. 477. 478
Unter welchen Umſtänden die Peripherie des Cirkels durch die Quadratrix rektificirt ſeyn würde. Warum ſie nicht rectificirt wird? Doch findet man die Peripherie, und folglich auch die Quadratur des Cirkels ſehr nahe. Hierzu braucht man nicht einmal die Quadratrix ſelbſt zu beſchreiben, ohngeachtet die Quadratur auf den Eigenſchaften derſelben gegründet iſt. 479.=481
Wenn man auch durch dieſe Methode den vollkommenen Innhalt der Cirkelfläche finden könnte, ſo würde man dadurch noch nicht das Verhältniß des Diameters zur Peripherie haben. Deswegen ſcheint die Bemühung des Archimeds hierüber ſchätzbarer zu ſeyn. 481
Irrthum einiger neuern Mathematiker, die durch dieſe krumme Linie einen jeden Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen zu können glaubten. 481

Worinn der Fehlſchuß beſteht? Wann die Quadratrix eine Omniſectrix ſeyn würde? Dieſer Fall iſt eine *Petitio Principii.* Schon vor 1400 Jahren hat Pappus dieſes angemerkt. 482

Von der Spirallinie.

Ihre Entſtehung. Was eine erſte, zwote, dritte Spirallinie ſey, u. ſ. w.? Dieſe Benennung iſt nicht genau. Man ſubſtituirt dafür eine andere. 483

Wie man ſich die Spirallinie ſo vorſtellen kann, daß ſie durch einen rollenden Punkt entſtehe. Unter welchen Umſtänden die Spirallinie die Peripherie eines Cirkels nach einem gegebenen Verhältniß theilen könnte. Es ſetzt dieſes ſchon die geometriſche Theilung der Peripherie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile voraus. Dieſe krumme Linie des Archimeds iſt alſo in denen Operationen, die eine vollkommene Genauigkeit erfordern, unnütz. 484. 485

Von der Cycloide.

Ihre Entſtehung und verſchiedene Namen. Ihre Grundlinie iſt genau ſo groß, als die Peripherie des beſchreibenden Cirkels. Was ihr culminirender Punkt ſey. Alle doppelte Ordinaten an derſelben werden durch die Axe in 2 gleiche Theile getheilt. Warum eine Perpendiculairlinie, die auf der Axe in dem culminirenden Punkt aufgerichtet iſt, eine Tangente dieſer krummen Linie ſey. 485. 487

Satz I. Der Theil einer jeden Ordinate der Cycloide, der zwiſchen dieſer krummen Linie und dem beſchreibenden Cirkel enthalten iſt, iſt jederzeit ſo groß, als der Cirkelbogen, der zwiſchen dem culminirenden Punkt und dem Berührungspunkt enthalten iſt. 487

Iſt hingegen eine krumme Linie ſo beſchaffen, daß, wenn man mit ihrer Axe als mit einem Diameter einen Cirkel beſchreibt, alsdenn alle gerade Linien, die von einem ihrer Punkte gezogen werden, immer ſo groß ſind, als die correſondirenden Cirkelbögen, ſo iſt dieſe krumme Linie eine halbe Cycloide, und der Cirkel, der auf ihrer Axe beſchrieben iſt, iſt der erzeugende Zirkel. 488

Satz II. Wenn man nach Belieben eine Ordinate an die Cycloide ziehet und ſie mit dem Cirkel zuſammenſtoſſen läßt, und wenn man darauf von dieſem Punkt an den Cirkel eine Tangente und durch den Punkt, wo die Ordinate auf die Cycloide ſtößt, mit der Tangente eine Parallellinie ziehet, ſo wird dieſe Parallellinie in die Cycloide hinein gehen. 488. 489

Satz III. Wenn man bey der vorigen Ordinate in den Punkten, wo ſie mit der Cycloide und dem Cirkel zuſammenfällt, eine Tangente an der Cycloide und dem Cirkel ſich gezogen vorſtellt, ſo werden dieſe Tangenten nothwendig eine ſolche Lage haben, daß ſie endlich zuſammenſtoſſen, oder ſich durchſchneiden. 490
Satz IV. Die 2 vorigen Tangenten werden ſich ſolcher Geſtalt in einem Punkt durchſchneiden, daß dieſe Ordinate ſo gros ſeyn wird, als die correſpondirende Tangente an dem beſchreibendē Cirkel. 491
Wenn man hingegen von einem beliebigen Punkt der Cycloide eine Ordinate oder eine Parallellinie mit der Grundlinie gezogen hat und von dem Punkt, wo dieſe Parallele mit dem beſchreibenden Cirkel zuſammenfällt, an dieſen Cirkel eine Tangente zieht und dieſe Tangente der Ordinate gleich macht, ſo werden dieſe einen Winkel machen, deſſen unterſter Schenkel eine Tangente an der Cycloide ſeyn wird. 491
Satz V. Es bleibe die vorige Tangente, ſo iſt die Sehne, die aus dem Punkt, wo der Cirkel mit dem culminirenden Punkt zuſammenfällt, gezogen wird, mit der correſpondirenden Tangente der Cycloide parallel. 492
Der umgekehrte Satz iſt gleichfalls wahr. 493
Folglich iſt die Linie, die von beyden Endpunkten dieſer krummen Linie auf die Grundlinie der Cycloide perpendiculair gezogen wird, eine Tangente derſelben. 493
Aufgabe. Die Quadratur der Cycloide zu finden. 493
Die Methode der Gränzen, die man zur Quadratur der krummen Linie gebraucht, iſt ſehr leicht und einfach. 495
Zuſatz. Hätte man die vollkommene Quadratur des Cirkels, ſo würde man auch die Cycloide genau quadriren können u. umgekehrt. 495
Aufgabe. Eine Cycloide zu beſchreiben. Dieſe Beſchreibung kann entweder ganz mechaniſch oder zum Theil mechaniſch und zum Theil geometriſch ſeyn. Aufmerkſamkeit, die man bey der mechaniſchen Beſchreibung dieſer krummen Linie nöthig hat. Leichtes Mittel die Peripherie des Cirkels auf eine ſehr vollkommene Art mechaniſch zu rectificiren. 495. 496
Eine Cycloide theils mechaniſch, theils geometriſch zu beſchreiben. Gründe dieſer Beſchreibung. 497

Von der Linie der Evolution der Cycloide.

Was iſt eine Linie der Evolution, eine Evolute, und ein Halbmeſſer der Evolute? 498. 499
Ein jeder Halbmeſſer der Evolute iſt allemal ſo groß, als der Theil der krum-

krummen Linie, worüber er abgewickelt iſt. Dieſer Halbmeſſer iſt allemal eine Tangente von der Evolute. 499
Zuſatz. Wenn man am Ende eines jeden Halbmeſſers der Krümmung auf dieſem Radius eine Perpendikulairlinie aufrichtet, ſo wird dieſe die Tangente von der Linie der Evolution ſeyn. Und folglich ſind alle Halbmeſſer der Krümmung gegen die Linie der Evolution perpendiculair. 499
Warum es nicht genug ſey, daß man zeige, daß eine Linie eine krumme Linie nur in einem Punkt berühre, wenn man beweiſen will, daß dieſe Linie eine Tangente ſey. 501
Die Linie der Evolution einer krummen Linie iſt wieder eine krumme Linie und wenn die Evolute gegen eine Seite hohl iſt, gleichfalls gegen dieſelbige Seite hohl. 502
Lehnſatz. Zwo krumme Linien, die immer gegen eine Seite hohl ſind und von einerley Punkt ihren Anfang nehmen, können nicht ſo beſchaffen ſeyn, daß alle Linien, die gegen die eine perpendiculair ſind, es auch zugleich gegen die andere ſind. 503
Die Linie der Evolution einer gegebenen halben Cycloide zu beſtimmen. 504
Die Linie der Evolution einer Cycloide iſt wieder eine Cycloide, die in allem ihrer Evolute gleich iſt. 505
Der Bogen der Cycloide iſt allemal doppelt ſo groß, als die correſpondirende Sehne des beſchreibenden Cirkels 507
Wichtige Beobachtung über dieſe Rectifikation. 507
Ein Faden, der ſich von einer Cycloide abwickelt, die eben ſo gros iſt, als er, beſchreibt durch die Bewegung ſeines äuſſerſten Punkts eine Cycloide, die ihrer Evolute gleich und ähnlich iſt. 508

Erklärung der Gründe, auf welchen ſich der Beweis des Iſochronismus in der Cycloide ſtützet.

Wenn ein Körper von verſchiedenen Höhen fällt, ſo verhalten ſich die Geſchwindigkeiten in jedem Punkt unter einander, wie die Quadratwurzeln aus ihren wahren Höhen, von welchen ſie fallen. 509
Eine krumme Linie kann in ſo kleine Theile getheilt werden, daß die Geſchwindigkeiten eines Körpers, während des Durchlaufens eines der kleinen Theilchens nicht merklich vermehrt werden. 510

Wenn ſich bey einer gleichförmigen Bewegung, die Geſchwindigkeiten unter einander verhalteü, wie die durchlaufenen Räume, ſo ſind die angewendeten Zeiten nothwendig ſich gleich. 511

Satz VI. Ein Körper, der ſich durch ſeine Schwere in einer umumgekehrten Cycloide bewegt, deren Baſis mit dem Horizonte parallel lauft, beſchreibt in einerley Zeit die ganze Hälfte einer Cycloide, in welcher er eiuen Bogen von ihr dürchlauft. Dieſes iſt der Verſtand des Satzes, daß die Vibrationen eines Pendels in einer Cycloide iſochroniſch oder gleichdauernd ſind. Linea brachyſtochrona des Hrn. Bernoulli. Sie iſt zur Vollkommenheit der Dioptrick nützltch. Sie iſt von verſchiedenen Geometern erfunden worden und beſtätigt das Geſetz der Bewegung des Galilaeus. 511 = 514

Gebrauch der Cycloide in Verfertigung der Pendeluhren. Nutzen des Penduls bey dieſer Maſchine. Es mäßigt die Bewegung und macht ſie dadurch gleichförmig. Ein Pendul, das ſich cirkelförmig bewegt, bringt dieſen Effect nicht hervor. 514 = 516

Ein Pendul, welches Bögen einer Cycloide beſchreibt, macht lauter iſochroniſche Vibrationen, die Bögen mögen groß oder klein ſeyn. 516

Wie ſich ein Pendel in einer Cycloide bewegt? Worzu die Gabel dienet. Wie lang das Pendel ſeyn muß, uud wie die cycloidiſchen Bleche angebracht werden müſſen, damit das Pendel dadurch determinirt werde, eine Cycloide zu beſchreiben. Warum das Pendul aus 2 Theilen, nämlich aus einem biegſamen und einem unbiegſamen zuſammengeſetzt werden muß. 516 = 518

Die Cycloide wird bey den Pendeluhren nicht weiter gebraucht. Sie hat nichts deſto weniger ihre Vollkommenheit bewürkt. 518

Hiſtorie der Cycloide.

Der Vater Merſennus oder vielmehr Galilaei hat ſie zuerſt bemerket; Roberwall erfand die Quadratur derſelben; Carteſius ihre Tangenten; Wren die Rectification derſelben und Hyghens den Iſochroniſmus bey dieſer Linie. 519 = 520

Pl. I.

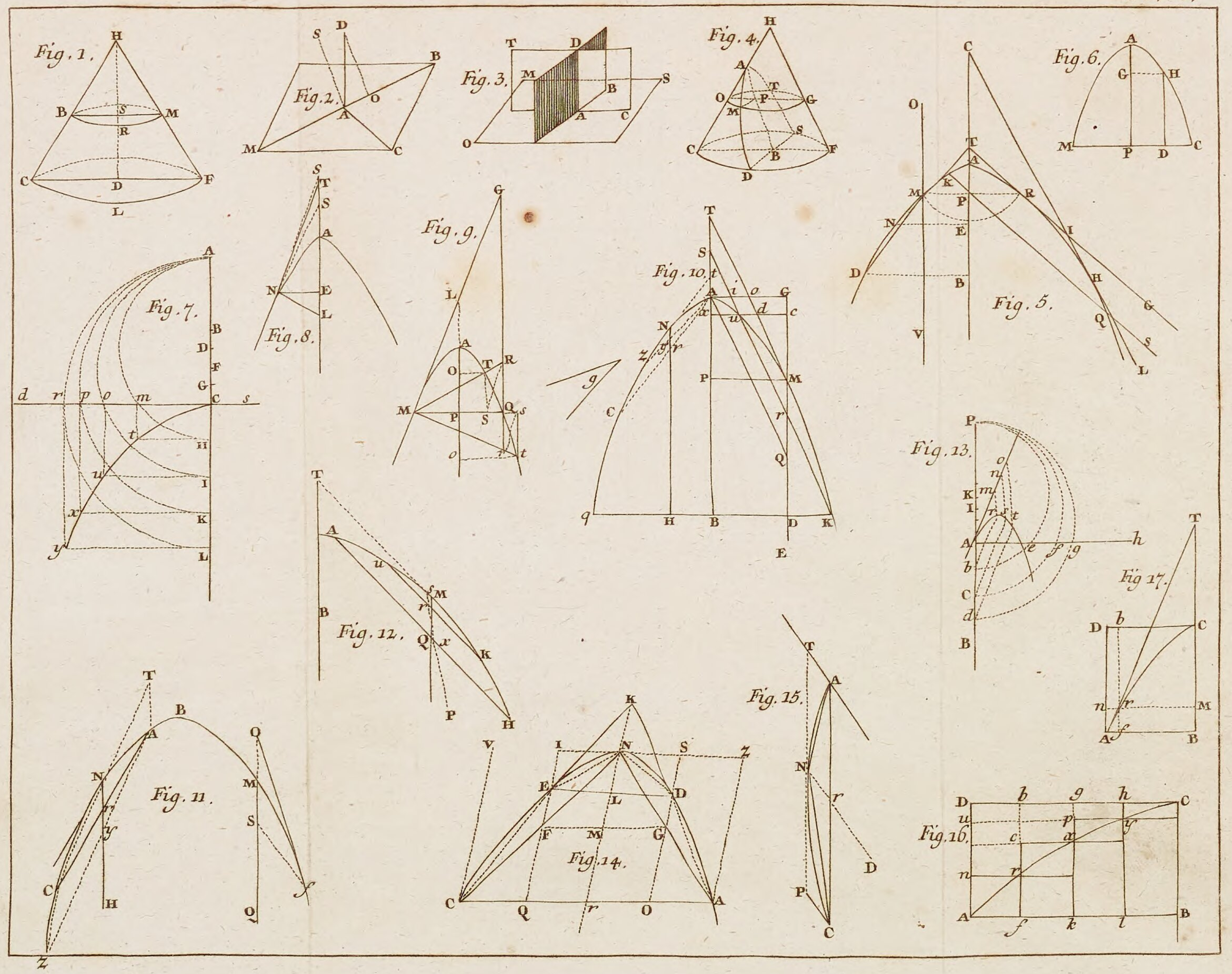


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig 17.

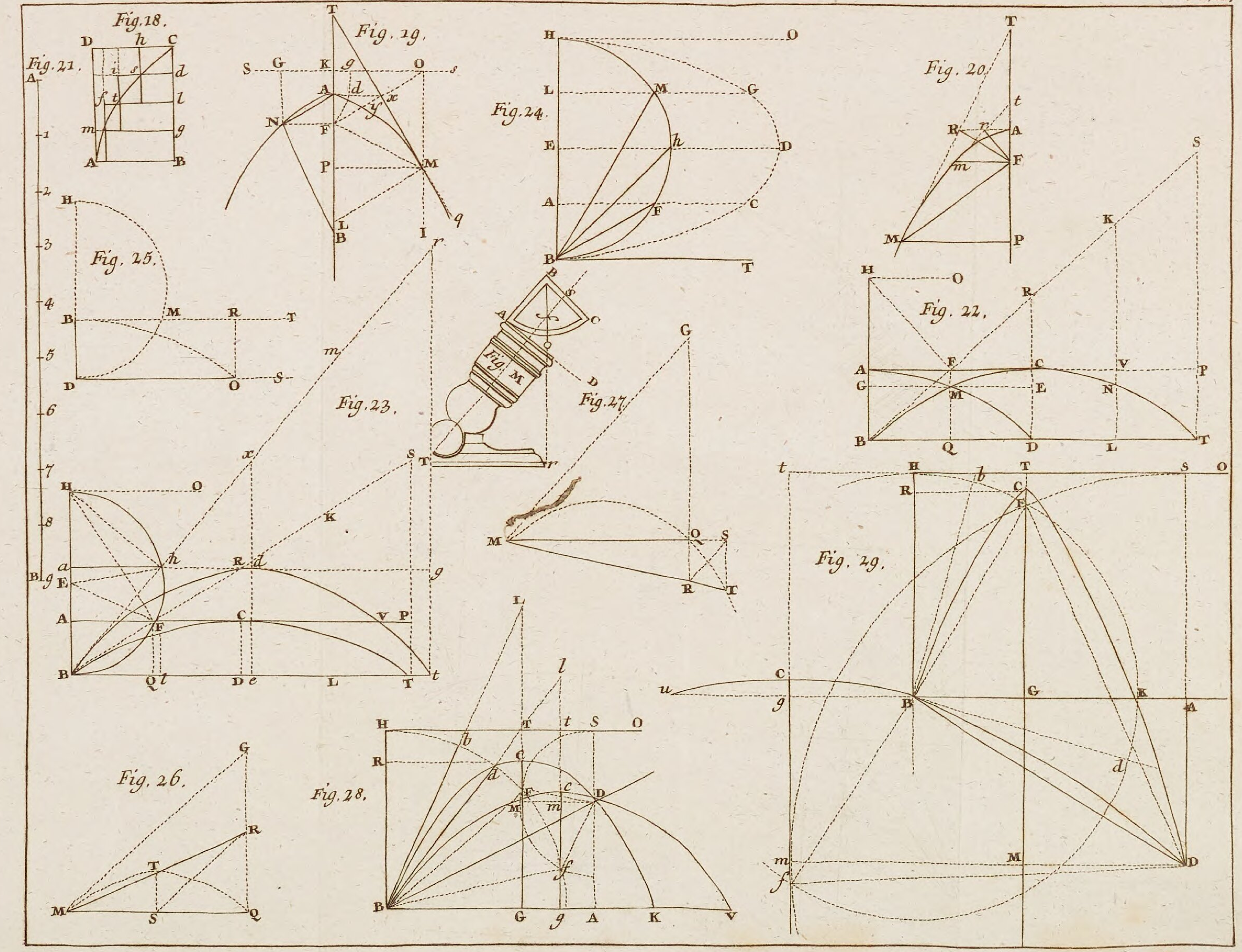


Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.

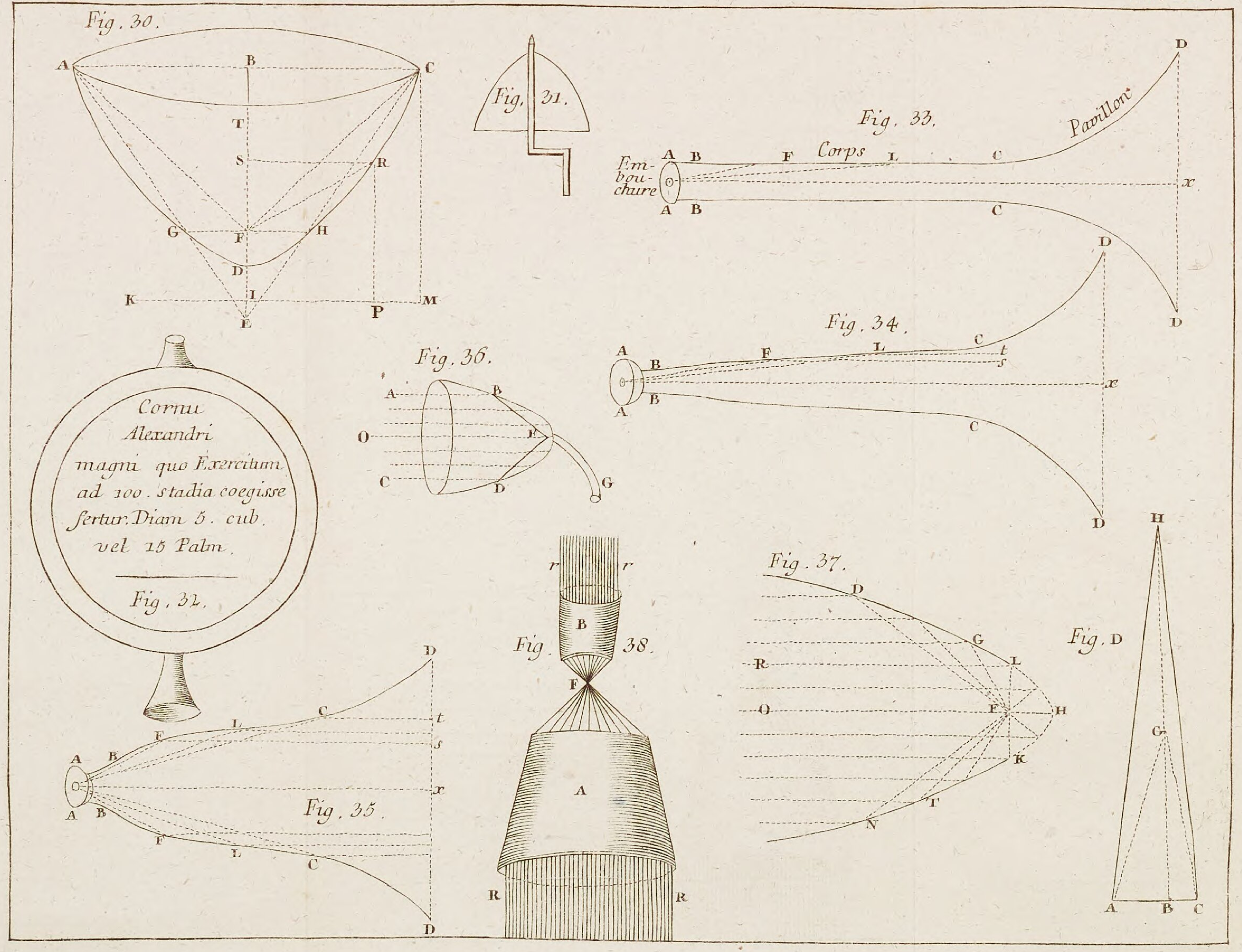


Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 33.
Em-
bou-
chure
Corps
Pavillon
Fig. 34.
Fig. 36.
Cornu
Alexandri
magni quo Exercitum
ad 100. stadia coegisse
fertur. Diam 5. cub.
vel 15 Palm.
Fig. 32.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. D
Fig. 35.

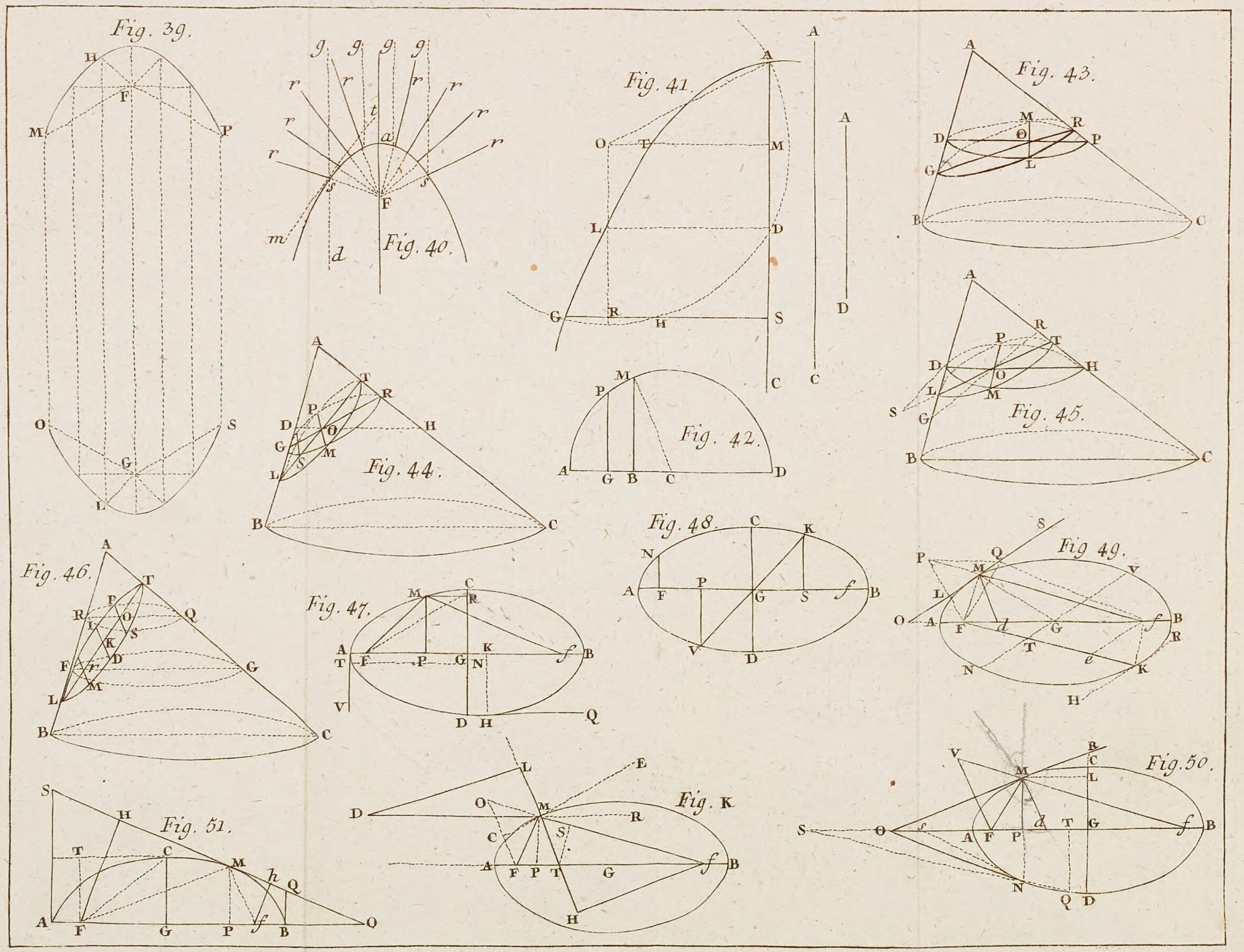


Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. K

Pl. V.

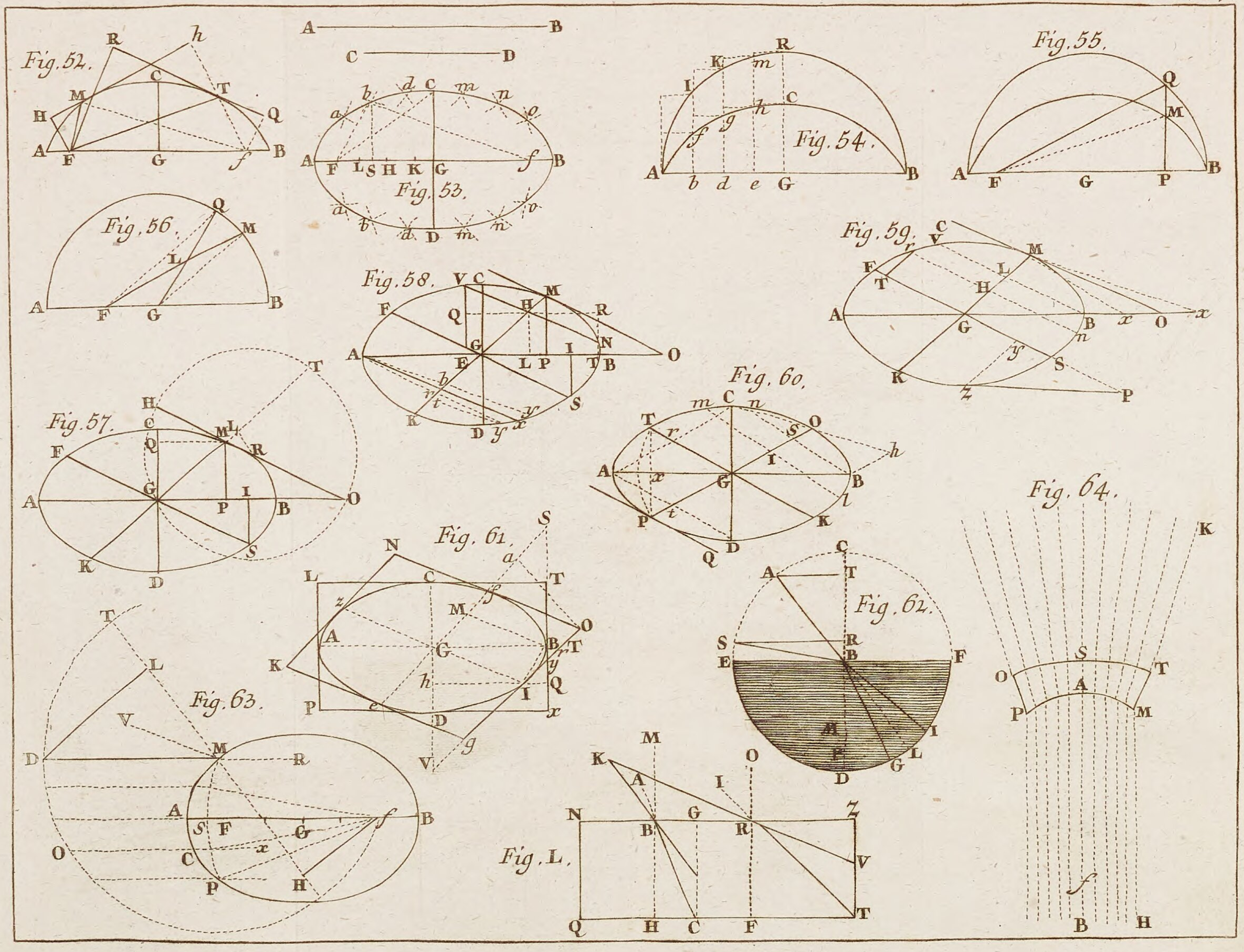
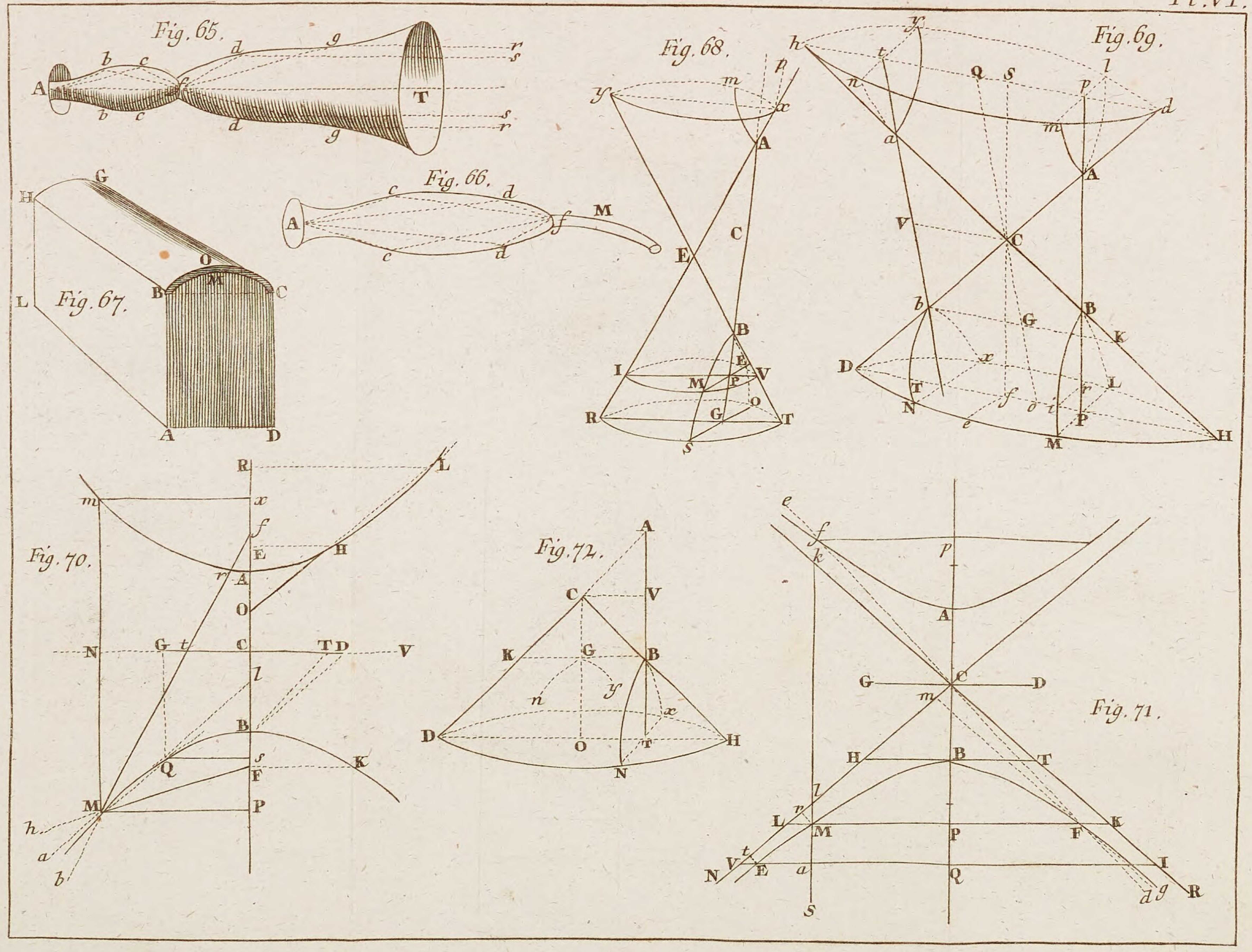


Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. L.

Pl. VI.



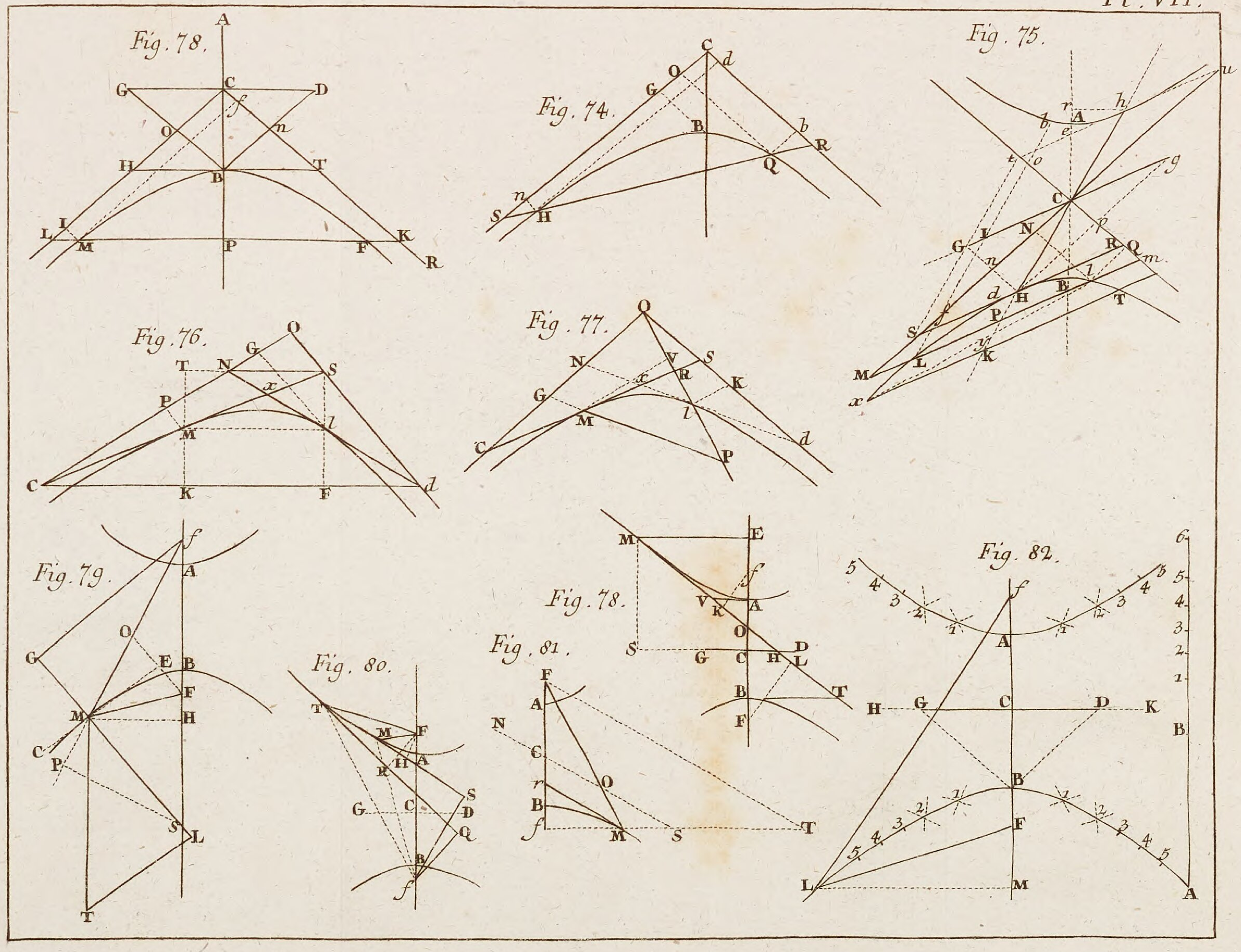


Fig. 78.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 78.
Fig. 82.

Pl. VIII.

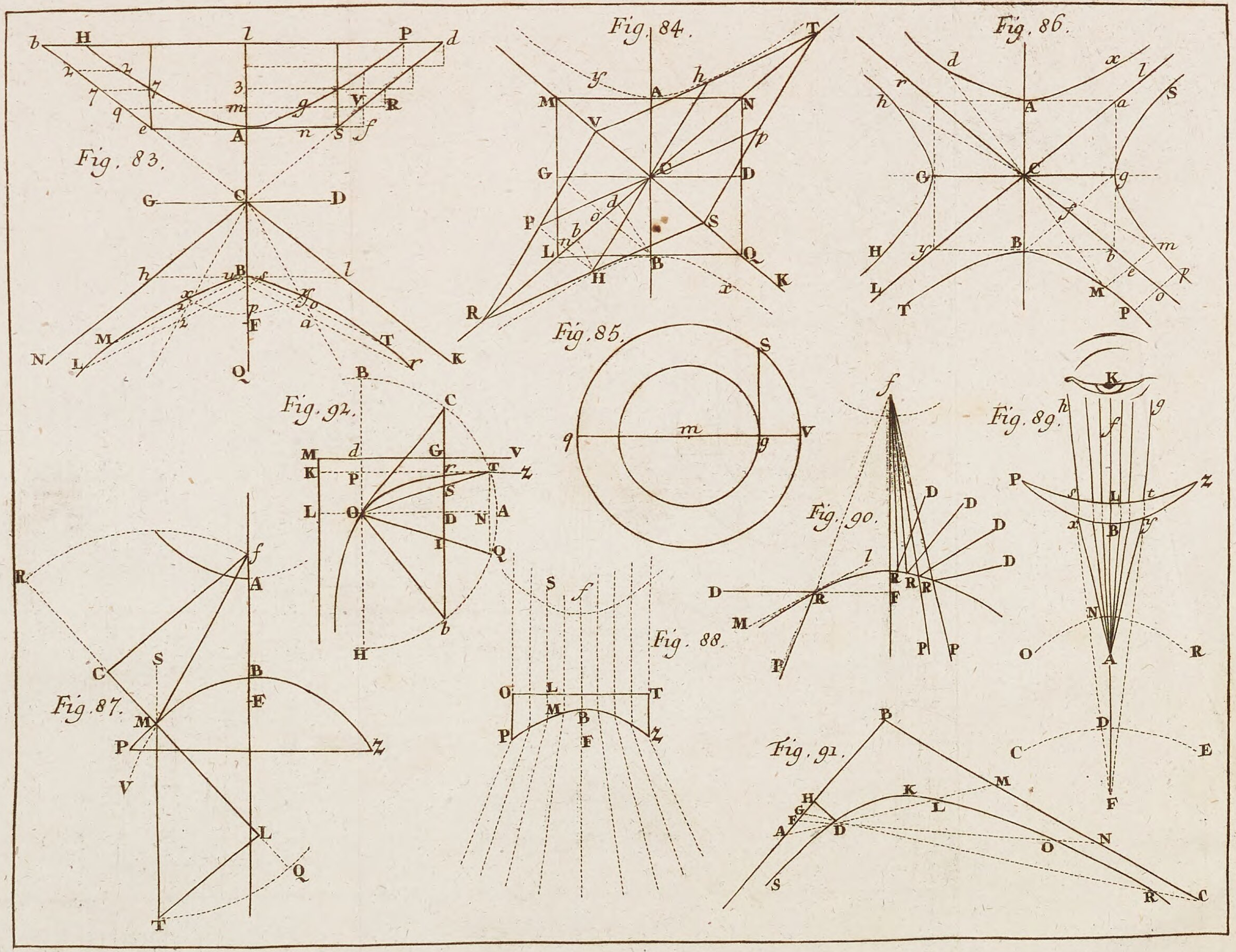


Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.

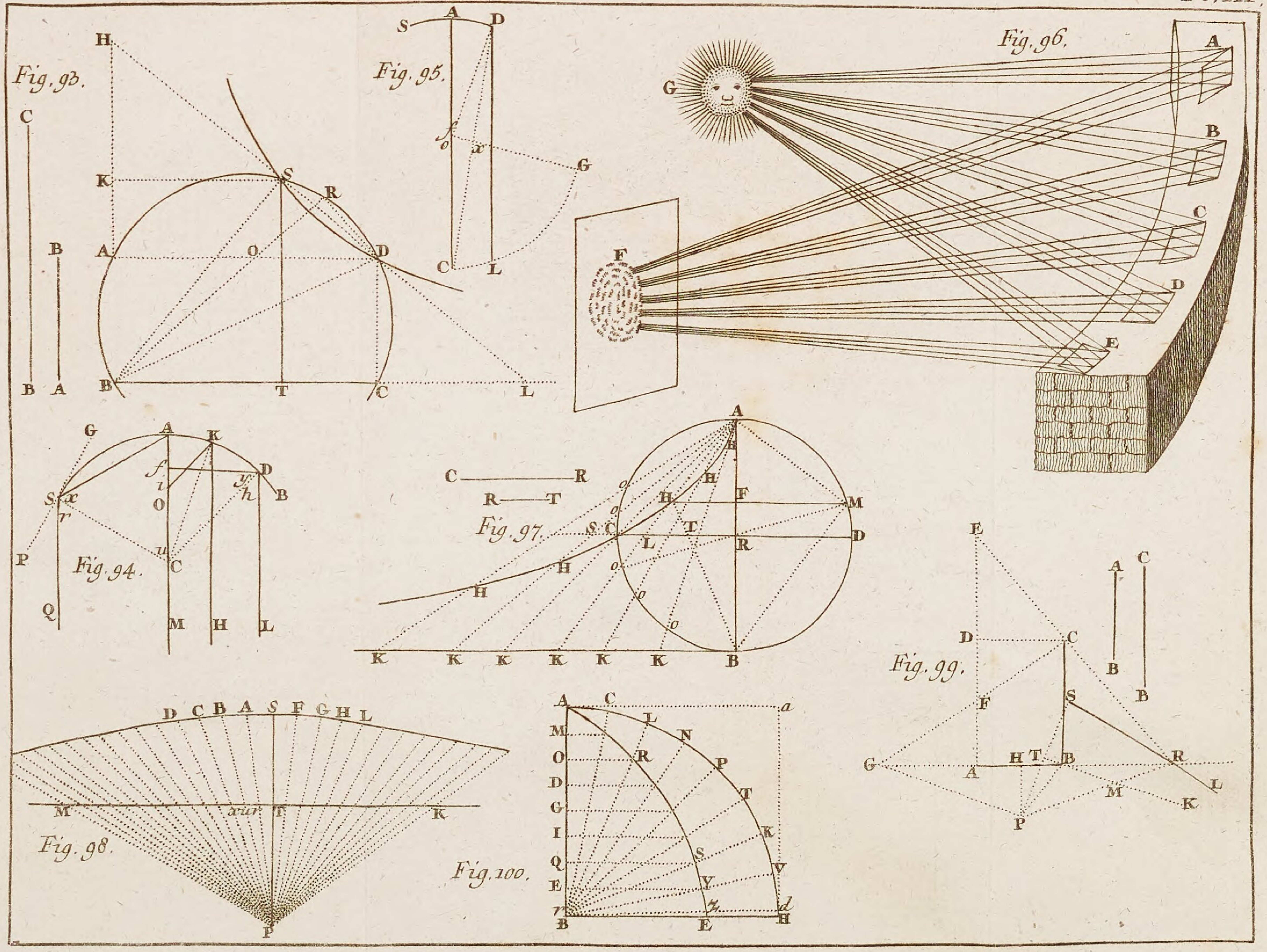


Fig. 93.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 94.
Fig. 97.
Fig. 99.
Fig. 98.
Fig. 100.

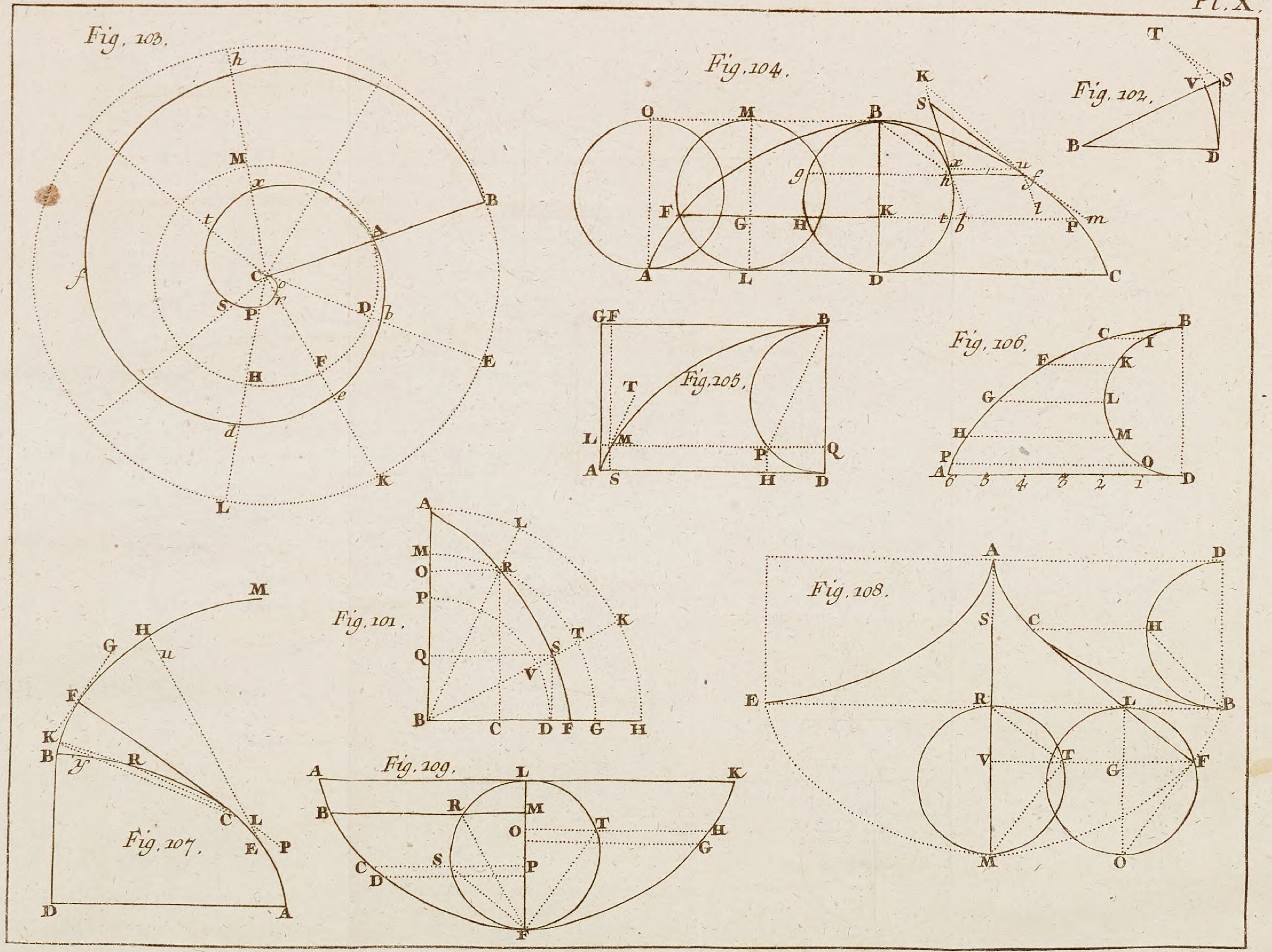


Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 102.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 101.
Fig. 108.
Fig. 107.
Fig. 109.

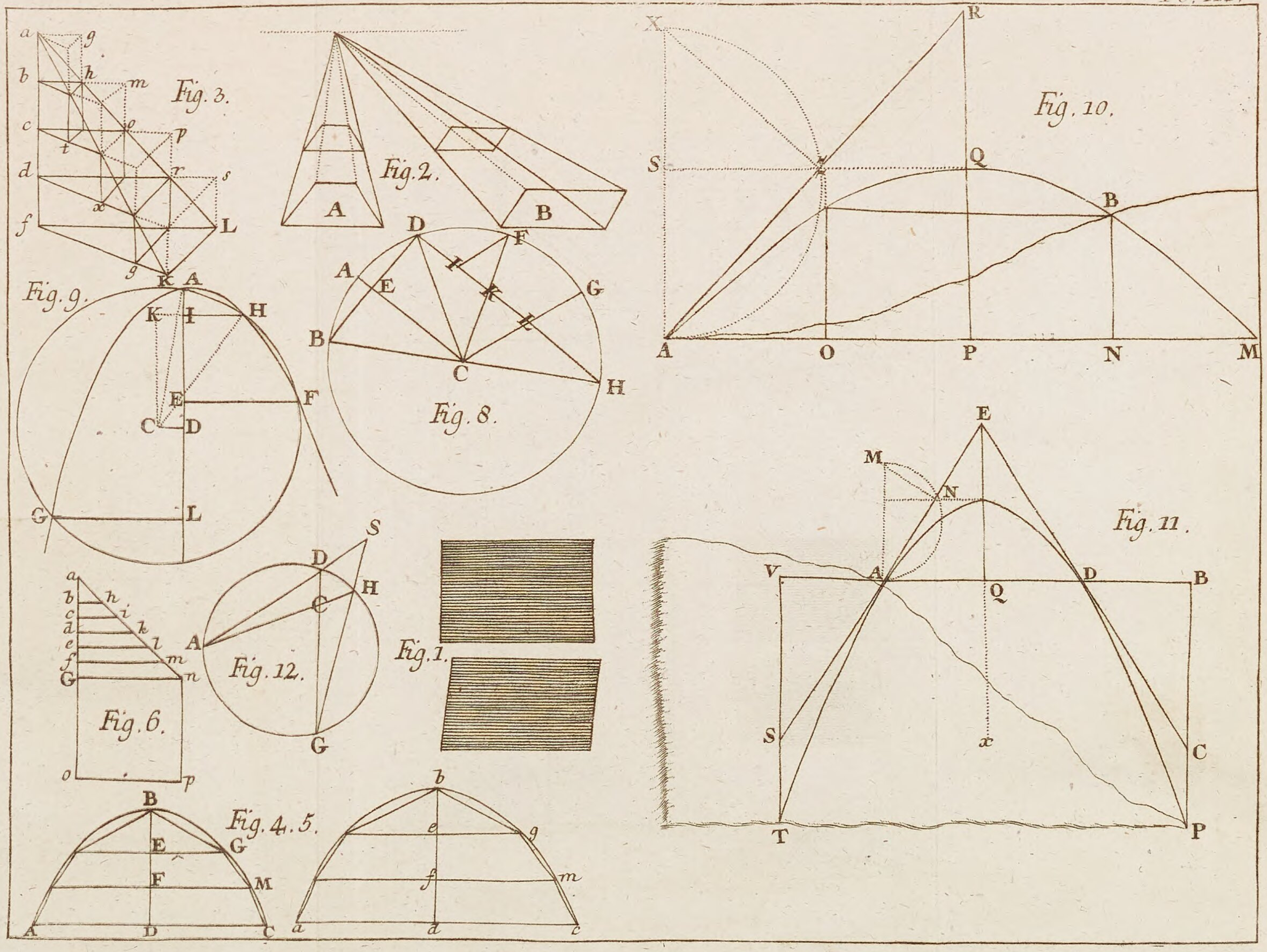


Fig. 3.
Fig. 2.
Fig. 10.
Fig. 9.
Fig. 8.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 1.
Fig. 6.
Fig. 4. 5.

SBB013401378522

La Chapelle <<de>>,

Abhandlung über die Kegelschnitte über verschiedene andere krumme Linien der Alten und der Cycloide, nebst einer practischen Anwendung derselben auf Künste und Wissenschaften

Carlsruhe 1791

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.191
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11740036-5
VD18 11931078-002